fuerzas: mg y N. De la figura se deduce que entre la posición inicial 1 y la final f, el centro de masas ha descendido una distancia h

$$h = R - R\cos\alpha = R(1-\cos\alpha)$$

Como el cilindro rueda no existe disipación de energía, conservándose la energía mecánica y esta pérdida de altura da lugar a una disminución de la energía potencial que se traduce en un aumento de la energía cinética de rotación.

$$m\,g\,R(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}I\left(\omega_f^2 - \omega_i^2\right) = \frac{1}{2}I\left(\frac{v_f^2}{R^2} - \frac{v_i^2}{R^2}\right) \quad (1)$$

El momento de inercia del cilindro respecto del eje perpendicular a sus bases y que pasa por el centro es: $I_{CM} = \frac{1}{2}mR^2$.

Según el teorema de Steiner el momento de inercia respecto del eje que pasa por O:

$$I = I_{CM} + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

Sustituyendo en (1)

$$m\,g\,R(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}mR^2\left(\frac{v_f^2}{R^2} - \frac{v_i^2}{R^2}\right) \Rightarrow \frac{4}{3}\,g\,R\,(1-\cos\alpha) = v_f^2 - v_i^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_i^2 = v_f^2 - \frac{4}{3}\,g\,R\,(1-\cos\alpha) \quad (2)$$

En la posición f de la figura 1, la componente del peso mg·cosα junto con N proporcionan la fuerza centrípeta

$$mg\cos\alpha - N = m\frac{v_f^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v_f^2 = \frac{R}{m}(mg\cos\alpha - N) \quad (3)$$

Combinando (2) y (3):

$$v_i^2 = \frac{R}{m}(m\,g\cos\alpha - N) - \frac{4}{3}g\,R(1-\cos\alpha) = R\,g\cos\alpha - \frac{RN}{m} - \frac{4}{3}g\,R + \frac{4}{3}g\,R\cos\alpha \Rightarrow$$

$$v_i^2 = \frac{7}{3}g\,R\cos\alpha - \frac{4}{3}g\,R - \frac{RN}{m} \Rightarrow v_i = \sqrt{\frac{g\,R}{3}(7\cos\alpha - 4) - \frac{RN}{m}} \quad (4)$$

Observamos que en la ecuación (4) cuanto más pequeño sea N mayor es v_i, lo más pequeño que puede ser N es cero y por tanto v_i es el máximo posible, en consecuencia la velocidad máxima es:

$$v_i = \sqrt{\frac{g\,R}{3}(7\cos\alpha - 4)}$$