$$T - F_{RM} - \left(T + F_{RM}\right) = 6a_1 - 1{,}5a_2 \Rightarrow a_1 = \frac{1{,}5a_2 - 2F_{RM}}{6} \Rightarrow$$

$$T - F_{RM} + \left(T + F_{RM}\right) = 6a_1 + 1{,}5a_2 \Rightarrow 2T = 6a_1 + 1{,}5a_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7{,}5g - \left(6a_1 + 1{,}5a_2\right) = 7{,}5\left(a_1 + a_2\right) \Rightarrow 7{,}5g - 6a_1 - 1{,}5a_2 = 7{,}5a_1 + 7{,}5a_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13{,}5a_1 = 7{,}5g - 9a_2 \Rightarrow a_1 = \frac{7{,}5g - 9a_2}{13{,}5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1{,}5a_2 - 2F_{RM}}{6} = \frac{7{,}5g - 9a_2}{13{,}5} \Rightarrow 20{,}25a_2 - 27 \cdot F_{RM} = 441 - 54a_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{441 + 27 \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}5 \cdot 9{,}8}{54 + 20{,}25} = 9{,}15\frac{m}{s^2} \Rightarrow a_1 = \frac{1{,}5 \cdot 9{,}15 - 2 \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}5 \cdot 9{,}8}{6} = -0{,}65\frac{m}{s^2}$$

No es posible físicamente que la masa m_1 se desplace con aceleración negativa, esto indica que la suposición de cómo actúa la fuera de rozamiento es la propuesta para establecer las ecuaciones (2) de este apartado.

109-. Un punto P tiene de coordenadas (d, h). Desde el origen del sistema de coordenadas OXY se lanzan cuerpos con velocidades v_o y ángulos α. Ambas magnitudes pueden tomar cualquier valor. Todas las trayectorias descritas por los cuerpos pasan por el punto P. Se pide determinar la v_o mínima que cumple la anterior condición.
Dibujar las trayectorias descritas por tres cuerpos cuando d = 10 m y h = 4 m. 1) el que tienen velocidad mínima, 2) el que α =1,1 α_{minimo} y 3) el que α =0,94 α_{minimo}.

Las ecuaciones del movimiento de los cuerpos son:

$$x = v_o \cos\alpha\ t \ ; \ y = v_o \operatorname{sen}\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 \ \Rightarrow t = \frac{x}{v_o \cos\alpha} \Rightarrow y = v_o \operatorname{sen}\alpha \frac{x}{v_o\cos\alpha} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_o \cos\alpha}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = x \operatorname{tag}\alpha - \frac{g x^2}{2 v_o^2 \cos^2\alpha}$$

Según la condición del problema en la ecuación de la trayectoria anterior podemos sustituir y = h ; x = d.

$$h = d \operatorname{tag}\alpha - \frac{g d^2}{2 v_o^2 \cos^2\alpha} \Rightarrow d \operatorname{tag}\alpha - h = \frac{g d^2}{2 v_o^2 \cos^2\alpha} \Rightarrow \quad v_o = \sqrt{\frac{g d^2}{2 \cos^2\alpha (d \operatorname{tag}\alpha - h)}}$$

Como queremos la velocidad v_o mínima, derivamos v_o respecto de α e igualamos a cero

$$\frac{dv_0}{d\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{g d^2}{2 \cos^2\alpha (d \operatorname{tag}\alpha - h)}}} \cdot \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{g d^2}{2 \cos^2\alpha (d \operatorname{tag}\alpha - h)}\right) =$$

$$= \frac{g d^2}{2\sqrt{\dfrac{g d^2}{2 \cos^2\alpha (d \operatorname{tag}\alpha - h)}}} \cdot \frac{-\left(2 \cos^2\alpha \cdot \dfrac{d}{\cos^2\alpha} + (d \operatorname{tag}\alpha - h)\cdot 4 \cos\alpha(-\operatorname{sen}\alpha)\right)}{\left[2 \cos^2\alpha (d \operatorname{tag}\alpha - h)\right]^2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2d + 4(d \operatorname{tag}\alpha - h)\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = 0 \Rightarrow (d \operatorname{tag}\alpha - h)\cdot \operatorname{sen} 2\alpha = d \Rightarrow \ d \operatorname{tag}\alpha - h = \frac{d}{\operatorname{sen} 2\alpha} (1)$$

Llevamos la ecuación (1) a la ecuación de v_o.

$$v_0 = \sqrt{\frac{gd^2}{2\cos^2\alpha \cdot \frac{d}{\text{sen}2\alpha}}} = \sqrt{\frac{gd^2}{2\cos^2\alpha \frac{d}{2\,\text{sen}\alpha\cos\alpha}}} = \sqrt{g\,d\ \text{tag}\,\alpha}\ \ (2)$$

Dados los valores de d y h, la ecuación (1) se resuelve por tanteo y se calcula la velocidad mínima mediante la ecuación (2) .

$$10\,\text{tag}\,\alpha - 4 = \frac{10}{\text{sen}\,2\alpha} \Rightarrow \qquad 5\ \text{tag}\,\alpha - 2 = \frac{5}{\text{sen}\,2\alpha}$$

α = 50 º 3,96 >5,08 ; α = 55 º 5,14 <5,32 ; α = 55,5 º 5,28 <5,36

α = 55,8 5,36 <5,38 ; α = 55 ,9º 5,38 <5,39

$$v_0(\text{mínima}) = \sqrt{10 \cdot 9{,}8 \cdot \text{tag}\ 55{,}9} = 12{,}03\ \frac{m}{s}$$

Para dibujar las trayectorias pedidas en el enunciado, volvemos a la ecuación general

$$y = x\,\text{tag}\,\alpha - \frac{g\,x^2}{2\,v_o^2\cos^2\alpha}$$

Sustituimos α minimo = 55,9º y v_o= 12,03 m/s

$$y = x\,\text{tag}\,55{,}9 - \frac{9{,}8 \cdot x^2}{2 \cdot 12{,}03^2 \cdot \cos^2 55{,}9} = 1{,}477\,x - 0{,}108x^2\ \ (3)$$

Para α=1,1α mínimo ; α = 61,49º

$$v_o = \sqrt{\frac{g\,d^2}{2\ \cos^2\alpha(d\,\text{tag}\,\alpha - h)}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot 100}{2 \cdot \cos^2 61{,}49 \cdot (10 \cdot \text{tag}\,61{,}49 - 4)}} = 12{,}22\frac{m}{s}$$

$$y = x\,\text{tag}\ 61{,}49 - \frac{9{,}8 \cdot x^2}{2 \cdot 12{,}22^2 \cdot \cos^2 61{,}49} = 1{,}841x - 0{,}14\,4\,x^2\ \ \ (4)$$

Para α=0,94 α mínimo ; α = 52,55 º

$$v_o = \sqrt{\frac{g\,d^2}{2\ \cos^2\alpha(d\,\text{tag}\,\alpha - h)}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot 100}{2 \cdot \cos^2 52{,}55º \cdot (10 \cdot \text{tag}\,52{,}55º - 4)}} = 12{,}10\frac{m}{s}$$

$$y = x \operatorname{tag} 52{,}55^\circ - \frac{9{,}8 \cdot x^2}{2 \cdot 12{,}10^2 \cdot \cos^2 52{,}55^\circ} = 1{,}306\,x - 0{,}0905\,x^2 \quad (5)$$

En las ecuaciones (3), (4) y (5) damos valores a x y obtenemos los correspondientes de y, con ellos construimos las tres trayectorias.