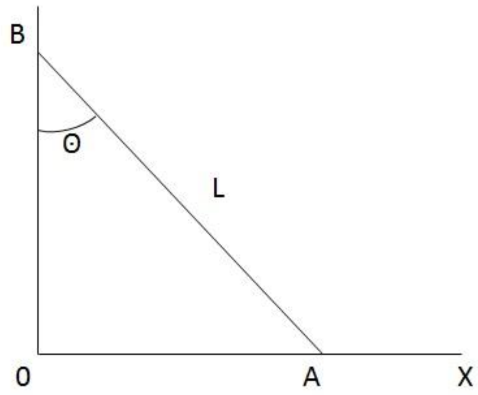
118.- Una barra homogénea de longitud L se desplaza por medio de dos guías que la obligan a moverse por los ejes coordenados XY.



El desplazamiento del extremo A de la barra por el eje x se realiza a velocidad constante v_o. Determinar: a) la velocidad y aceleración angular de la barra en función del tiempo, b) La velocidad y aceleración del extremo B. En el tiempo t =0 la barra se encuentra en posición vertical.

El movimiento de la barra es un movimiento plano que puede descomponerse en la suma de dos movimientos, primero uno de traslación del extremo B seguido de una rotación alrededor de un eje perpendicular a la barra en el extremo A. Ambos movimientos pueden observarse en la figura 1.

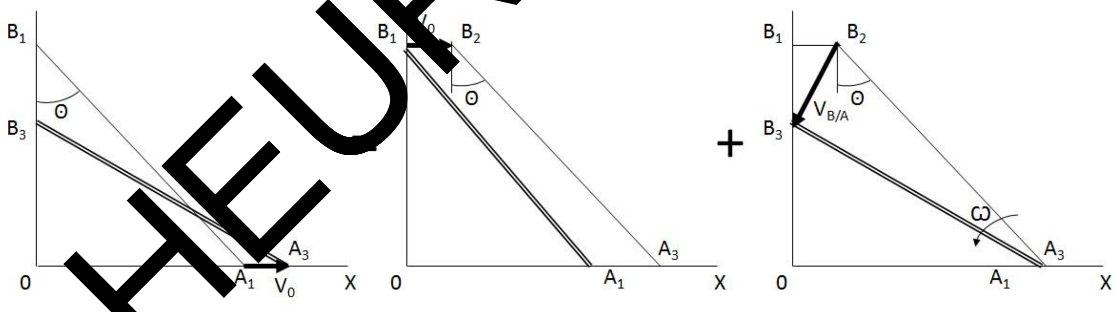
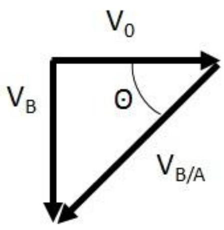


Fig.1

El extremo B está obligado a desplazarse por el eje y en sentido negativo, debido a la ligadura a la que se encuentra sometido; designamos su velocidad en un determinado instante como v_B . En ese mismo instante la velocidad del extremo A es v_o. Con $v_{B/A}$ designamos a la velocidad del extremo B respecto de A, que es la diferencia entre la velocidad absoluta de B menos la de A.

De donde se cumple que.



$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{v}_{B/A}$$

Designamos con $\vec{\omega}$ a la velocidad angular de la barra, que es un vector perpendicular al plano xy, y, por tanto, también a la barra

$$\vec{v}_{B/A} = \vec{\omega} \times \vec{L} \quad \Rightarrow \quad v_{B/A} = \omega\ L\,\mathrm{sen}\,90^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_{B/A}}{L}$$

$\vec{L}$ es un vector de módulo L dirigido a lo largo de la barra desde el extremo A al B.

Volviendo a la figura 1 en ella están representados los vectores. Designamos con t al tiempo que ha empleado el extremo A de la barra en desplazarse desde O a A_1.

$$OA_1 = x = v_o t$$

La velocidad del extremo B es v_y y su ordenada es: $y = L\cos\theta$

Del triángulo de velocidades se deduce: $v_{B/A} \cdot \cos\theta = v_o$, con lo que el módulo de $\vec{\omega}$ es:

$$\omega = \frac{v_o}{L\cos\theta}$$

De la figura 1 también se deduce que:

$$x^2 + y^2 = L^2 \ \Rightarrow v_o^2\,t^2 + \left(L\cos\theta\right)^2 = L^2 \ \Rightarrow \ L\cos\theta = \sqrt{L^2 - v_o^2\,t^2}$$

Finalmente

$$\omega = \frac{v_o}{\sqrt{L^2 - v_o^2\,t^2}}$$

La aceleración angular de la barra la obtenemos derivando la ecuación anterior respecto del tiempo.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{-v_o\,\dfrac{-2v_o^2 t}{2\sqrt{L^2 - v_o^2 t^2}}}{L^2 - v_o^2 t^2} = \frac{v_o^3 t}{\left(L^2 - v_o^2 t^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

La velocidad del extremo B es:

$$v_B = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{L^2 - v_o^2 t^2}\right) = \frac{-2v_o^2\,t}{2\sqrt{L^2 - v_o^2 t^2}} = -\frac{v_o^2 t}{\sqrt{L^2 - v_o^2 t^2}}$$

Para hallar la aceleración de B nos basta con derivar v_B con respecto a la variable tiempo.

$$a_B = \frac{dv_B}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-\frac{v_o^2\, t}{\sqrt{L^2 - v_o^2 t^2}}\right] = -\frac{\sqrt{L^2 - v_o^2 t^2}\cdot v_o^2 - v_o^2 t\cdot \dfrac{-2 v_o^2 t}{2\sqrt{L^2 - v_o^2 t^2}}}{L^2 - v_o^2 t^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_B = -\frac{L^2 v_o^2 - v_o^4 t^2 + v_o^4 t^2}{\left(L^2 - v_o^2 t^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{L^2\, v_o^2}{\left(L^2 - v_o^2 t^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Otra forma de abordar el problema, y probablemente de forma más sencilla, es considerar una rotación pura alrededor del centro instantáneo de rotación en un movimiento plano, que en el caso que nos ocupa se determina por el corte de las perpendiculares a las velocidades de los extremos A y B. El punto C de la figura 2 es el centro instantáneo de rotación en un determinado instante. Se puede escribir

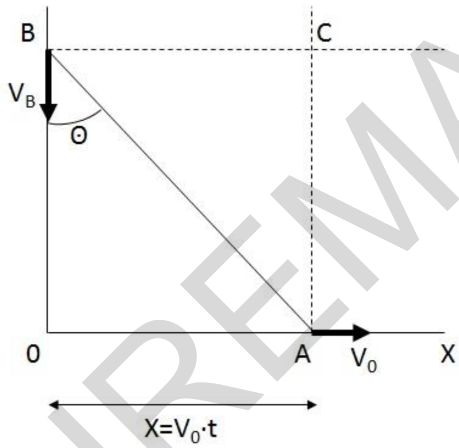


Fig.2

$$v_o = \omega\cdot CA = \omega\cdot\sqrt{L^2 - x^2} = \omega\sqrt{L^2 - v_o^2 t^2} \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_o}{\sqrt{L^2 - v_o^2 t^2}}$$

$$\left|v_B\right| = \omega\cdot CB = \omega\cdot v_o t = \frac{v_o}{\sqrt{L^2 - v_o^2 t^2}}\cdot v_o t = \frac{v_o^2 t}{\sqrt{L^2 - v_o^2 t^2}}$$

119.- La fosa de las Marianas situada en el Océano Pacífico tiene una profundidad de H=10920 m. La densidad del agua del mar en la superficie es: ρ_o = 1025 kg/m^3, la aceleración de la gravedad 9,81 m/s^2 y el coeficiente de compresibilidad del agua

$$\alpha = \frac{1}{K} = -\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dp}\right)_{T=Cte} \quad ; \quad K = 2{,}1.10^{9}\ Pa$$

Despreciando el cambio de temperatura, la variación de la aceleración de la gravedad con la profundidad y la presión atmosférica, determinar la presión p(H) en el fondo de la fosa.

Propuesto en las Olimpiadas Asiáticas de Física

La presión hidrostática, en función de la densidad del fluido y de la profundidad, despreciando la presión atmosférica y la variación de temperatura y considerando g constante, está dada por la ecuación

$$p = \rho(h)\, g\, h$$

Cuando h es pequeña se considera que la densidad es constante. En este problema hemos de encontrar cómo varía la densidad con la profundidad.

El volumen y la densidad son magnitudes inversamente proporcionales y podemos en consecuencia, escribir:

$$V = \frac{k}{\rho} \quad \Rightarrow \quad dV = -\frac{k}{\rho^2}\,d\rho$$

Sustituyendo en el coeficiente de compresibilidad

$$\alpha = -\frac{\rho}{k}\left(\frac{-\frac{k}{\rho^2}\,d\rho}{dp}\right)_{T=Cte} \quad \Rightarrow \quad \alpha\,dp = \frac{d\rho}{\rho}$$

Por otra parte:

$$dp = \rho\,g\,dh \quad \Rightarrow \quad \alpha\,\rho\,g\,dh = \frac{d\rho}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \int \alpha\,g\,dh = \int \frac{d\rho}{\rho^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha\,g\,h = -\frac{1}{\rho} + Cte$$

Cuando h=0 la densidad es ρ_o

$$\alpha g h = -\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_o} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_o} - \frac{g h}{K} = \frac{K - \rho_o g h}{\rho_o K} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\rho_o K}{K - \rho_o g h}$$

Calculamos la presión.

$$dp = \rho\, g\, dh \Rightarrow p(H) = g\int_0^H \frac{\rho_o K}{K-\rho_o g\, h}dh = \rho_o g K\int_0^H \frac{dh}{K-\rho_o gh} = \rho_o g K\left[-\frac{1}{\rho_o g}\ln\left(K-\rho_o g\, h\right)\right]_0^H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(H) = K\left[-\ln\left(K-\rho_o g\, H\right)+\ln K\right] = K\ln\frac{K}{K-\rho_o g\, H} =$$

$$= 2{,}1.10^9 \ln\frac{2{,}1.10^9}{2{,}1.10^9 - 1025\cdot 9{,}81\cdot 10920} \Rightarrow \quad p(H) = 1{,}13.10^8\ \text{Pa}$$

.