151..(418).-***Una cuerda sin masa que obedece a la ley de Hooke puede romperse cuando sobre ella actúa una cierta tensión. Un extremo de la cuerda está fijo y en el otro está enganchada una masa 3m. Otra masa m se desplaza con velocidad constante v_o y alcanza a la masa 3m, formando un solo conjunto; la cuerda se estira y luego se rompe, siendo nula la energía cinética del conjunto. Si la colisión entre las masas fuese perfectamente elástica y central la cuerda también se rompe y la masa 3m adquiere, después de la ruptura de la cuerda, una velocidad final v_f. Todo el movimiento ocurre sobre un suelo horizontal sin rozamiento.***

a) Encontrar la relación $\dfrac{v_f}{v_o}$

b) Encontrar la relación entre la energía de las dos masas, después del choque perfectamente elástico y ya rota la cuerda, y la energía inicial de la masa m antes de la colisión

Propuesto en las Olimpiadas USA.

Nota añadida por nosotros. Al resolver el problema se admite que en los choques no hay calor desprendido ni deformación de las masas; la energía se almacena en la cuerda.

a) El choque es inelástico y existe conservación de la cantidad de movimiento, la velocidad del conjunto de las dos masas pegadas entre sí justamente en el instante posterior a la colisión vale:

$$m v_o + 3m \cdot 0 = 4m \cdot v' \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{v_o}{4}$$

A partir del instante anterior la cuerda comienza a estirarse y se llega a romper, tal como indica el enunciado, cuando la energía cinética del conjunto aparece en energía potencial elástica en la cuerda.

$$U = \frac{1}{2} 4m \cdot \left(\frac{v_o}{4}\right)^2 = \frac{m v_o^2}{8}$$

Si el choque fuese perfectamente elástico, analizamos el problema desde el sistema de referencia ligado al centro de masas.

Velocidad del centro de masas

$$v_{CM} = \frac{m v_o + 3m \cdot 0}{4m} = \frac{v_o}{4}$$

Las velocidades de las masas respecto al sistema de referencia ligado al centro de masas son:

$$v_m = v_o - v_{CM} = v_o - \frac{v_o}{4} = \frac{3v_o}{4} \qquad v_{3m} = 0 - \frac{v_o}{4} = -\frac{v_o}{4}$$

Inmediatamente después del choque y dado que el centro de masas se desplaza a la misma velocidad, las velocidades de las masas respecto del centro de masas son:

$$v'_m = -\frac{3v_o}{4} \qquad v'_{3m} = \frac{v_o}{4}$$

Las velocidades de las masas respecto del sistema del laboratorio son:

$$V_m = -\frac{3v_o}{4} + v_{CM} = -\frac{3v_o}{4} + \frac{v_o}{4} = -\frac{v_o}{2} \quad ; \quad V_{3m} = \frac{v_o}{4} + v_{CM} = \frac{v_o}{4} + \frac{v_0}{4} = \frac{v_0}{2}$$

La masa m conserva su velocidad, pero la 3m está ligada a la cuerda y progresivamente pierde algo de su velocidad y por tanto de su energía cinética que se va almacenado en la cuerda, cuando esta energía es U la cuerda se rompe y la masa 3m queda libre con la velocidad v_f

$$\frac{1}{2}3mv_f^2 = \frac{1}{2}3m\left(\frac{v_o}{2}\right)^2 - U = \frac{3mv_o^2}{8} - \frac{mv_o^2}{8} = \frac{mv_o^2}{4} \Rightarrow \frac{3}{2}v_f^2 = \frac{v_o^2}{4} \Rightarrow \left(\frac{v_f}{v_o}\right)^2 = \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\frac{v_f}{v_o} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

b)

$$\frac{\frac{1}{2}m\left(-\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}3mv_f^2}{\frac{1}{2}mv_o^2} = \frac{\frac{v_o^2}{4} + 3\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{6}v_o\right)^2}{v_o^2} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{6}}{1} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

152.(**424)-**La energía cinética de una partícula que se mueve por una circunferencia de radio R depende del camino recorrido según la ley $E_c=\alpha s^2$, donde α es una constante. Determinar la fuerza que actúa sobre la partícula en función de s.

b) Si la velocidad de la partícula varía de acuerdo con la ley $v=\frac{k}{1+s}$ siendo $k=0{,}5\ m^2/s$ y $R = 1$ m , cuando t=0, la posición es $s_o=0$. Determinar en función de la variable tiempo, la posición, la velocidad, la aceleración tangencial y la centrípeta y representarlas gráficamente.

Según el enunciado $\frac{1}{2}mv^2=\alpha s^2 \Rightarrow v^2=2\frac{\alpha s^2}{m} \Rightarrow v=\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}s$

Sobre la partícula actúan dos fuerzas, una la centrípeta dirigida constantemente al centro de la circunferencia y otra la fuerza tangencial en cada punto de la trayectoria .Ambas fuerzas forman entre sí un ángulo de 90º.

La fuerza centrípeta vale $F_C=\frac{mv^2}{R}=\frac{m\frac{2\alpha s^2}{m}}{R}=\frac{2\alpha s^2}{R}$

La fuerza tangencial:
:

$$F_T=ma_T=m\frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=mv\frac{dv}{ds}=mv\frac{d}{ds}\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}s\right)=mv\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}=m\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}s\cdot\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F_T=2\alpha s$$

El módulo de la fuerza total sobre la partícula

$$F=\sqrt{F_C^2+F_T^2}=\sqrt{\frac{(2\alpha)^2}{R^2}s^4+(2\alpha)^2s^2}=2\alpha s\sqrt{1+\left(\frac{s}{R}\right)^2}$$

b)

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{k}{1+s}\Rightarrow\int(1+s)ds=\int k\,dt\Rightarrow \quad s+\frac{s^2}{2}=kt+Cte$$

Cuando t=0, $s=s_o=0$, luego la Cte=0

$$s^2+2s-2kt=0 \quad\Rightarrow\quad s=\frac{-2\pm\sqrt{4+8kt}}{2}=-1\pm\sqrt{1+2kt}$$

De las dos soluciones solamente es válida con el signo positivo, ya que s adquiere valores positivos al variar t.

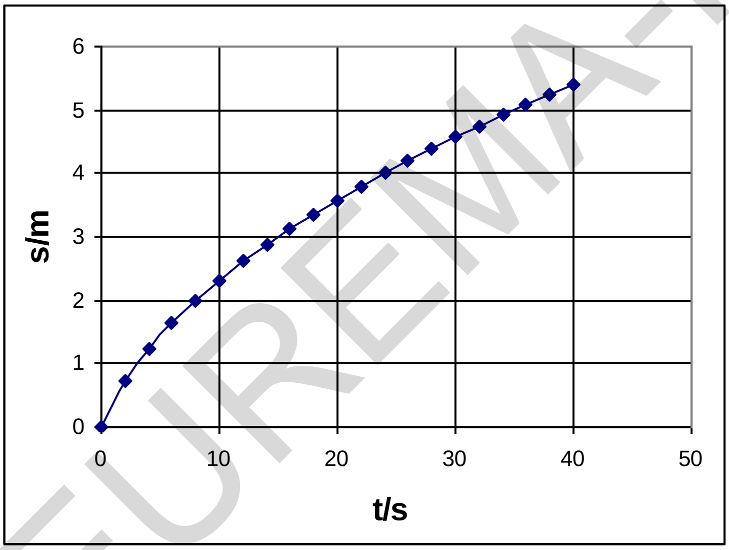
$$s=-1+\sqrt{1+2kt}=-1+\sqrt{1+t}$$

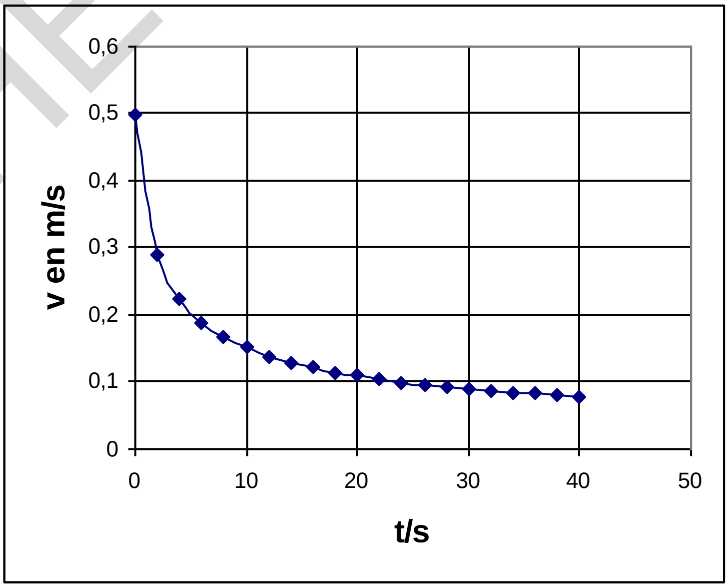
$$v=\frac{k}{1+\left(-1+\sqrt{1+2kt}\right)}=\frac{k}{\sqrt{1+2kt}}=\frac{0{,}5}{\sqrt{1+2kt}}=\frac{0{,}5}{\sqrt{1+t}}$$

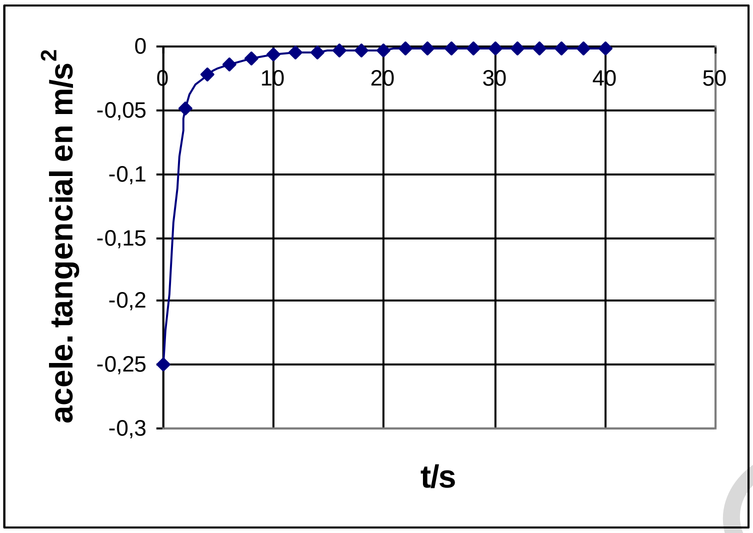
$$a_T=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{d}{ds}\left[\frac{k}{1+s}\right]\cdot v=\frac{-k}{(1+s)^2}\cdot\frac{k}{1+s}=-\frac{k^2}{(1+s)^3}=-\frac{k^2}{\left[1+\left(-1+\sqrt{1+2kt}\right)\right]^3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad a_T=-\frac{k^2}{(1+2kt)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{0{,}25}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}$$

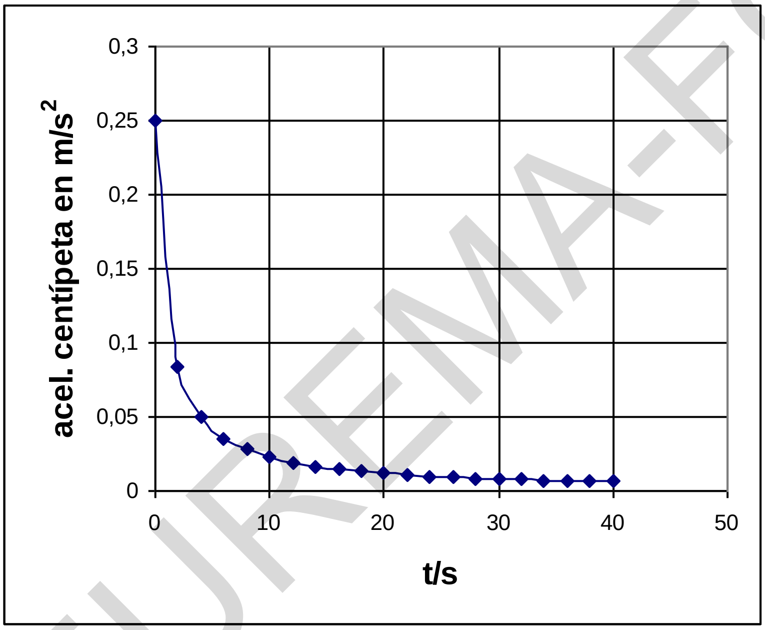
$$a_C=\frac{v^2}{R}=\frac{\frac{0{,}25}{1+2kt}}{R}=\frac{0{,}25}{1+2kt}=\frac{0{,}25}{1+t}$$







acele. tangencial en m/s^2
0
-0,05
-0,1
-0,15
-0,2
-0,25
-0,3
0
10
20
30
40
50
t/s



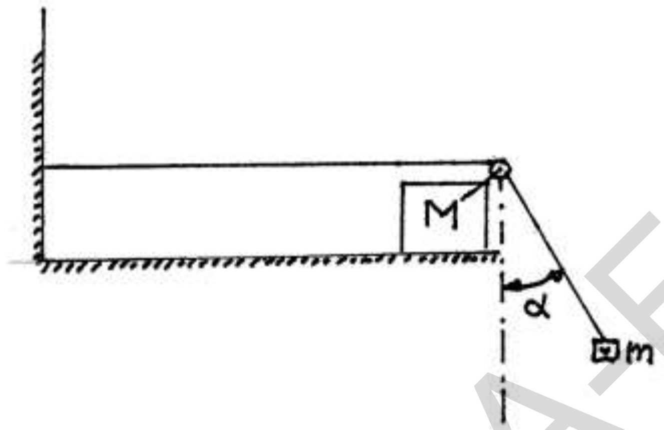
acel. centípeta en m/s^2
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
0
10
20
30
40
50
t/s

153.(425)-***En el sistema mecánico de la figura inferior, el cuerpo M puede deslizar horizontalmente sin rozamiento. En el tiempo t=0, el ángulo con la vertical es α y las dos masas tienen velocidades nulas.***

a) Se pide la relación entre m y M si al dejar la masa m en libertad el ángulo α permanece constante.

b) la aceleración de la masa M.

La polea carece de masa y la cuerda es inextensible.



a) En la figura 1a se han representado las fuerzas que actúan en el sistema y en la figura 1b las posiciones de esas masas cuando ha transcurrido un cierto tiempo t. La longitud de la cuerda al ser inextensible es constante y designamos esa longitud por L.

Se observa que la masa M se mueve con una aceleración hacia la izquierda que designamos su módulo con A_X; la masa m tiene dos aceleraciones: una en sentido horizontal de módulo a_X y otra en sentido vertical descendente de módulo a_Y.

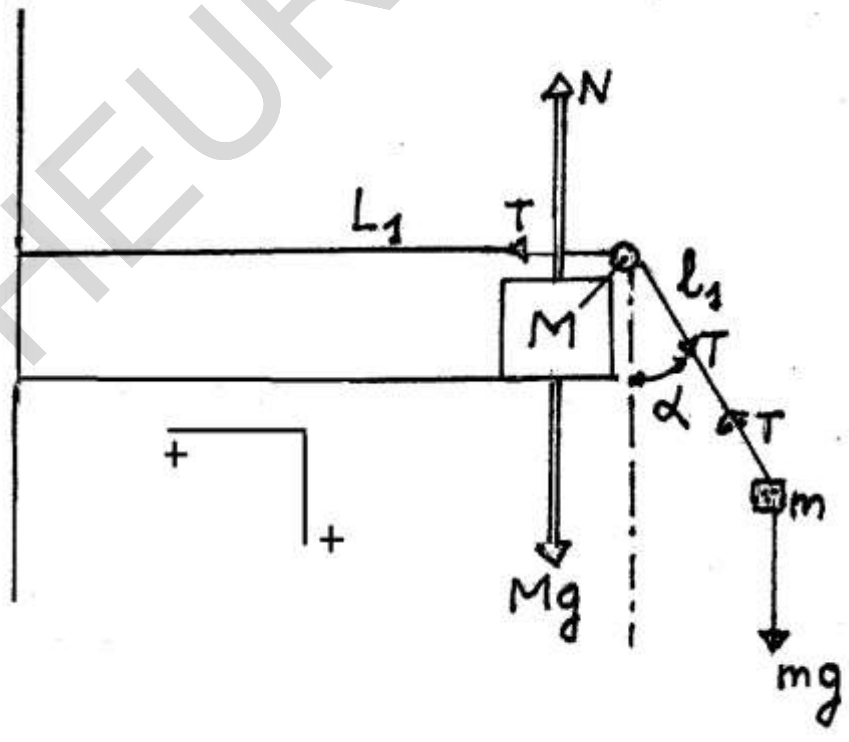


Fig.1a

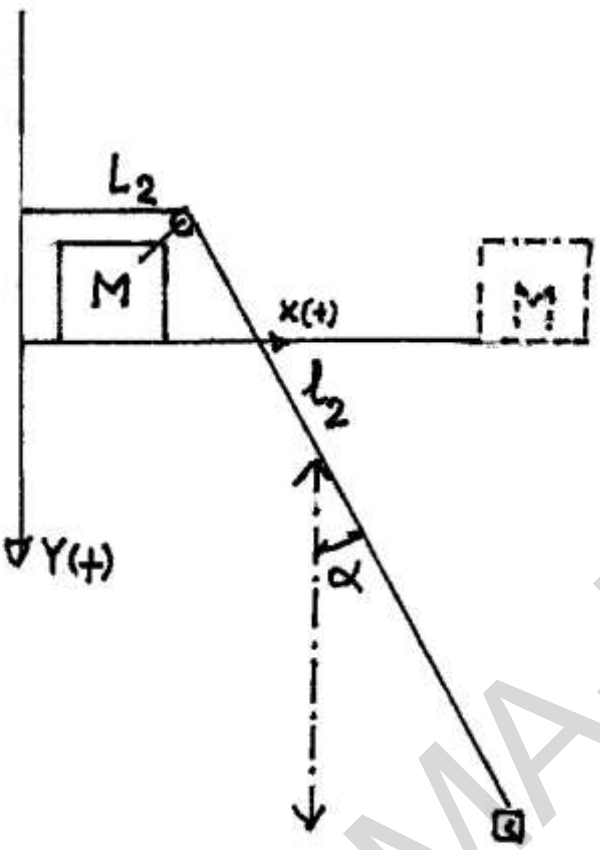


Fig.1b

Al ser la cuerda inextensible, se cumple

$$L_1 + l_1 = L_2 + l_2 \Rightarrow \quad L_1 - L_2 = l_2 - l_1 \quad (1)$$

De la figura 1a se deduce: $\quad T - T\operatorname{sen}\alpha = MA_X \Rightarrow \quad T(1 - \operatorname{sen}\alpha) = MA_X \quad (2)$

El módulo A_X es constante lo que significa que el movimiento de la masa M es uniformemente acelerado y dirigido hacia la izquierda; En el tiempo que transcurre desde t=0 a t=t se ha desplazado L_1-L_2 y por tanto

$$L_1 - L_2 = \frac{1}{2}A_X t^2 \Rightarrow \qquad l_2 - l_1 = \frac{1}{2}A_X t^2 \quad (3)$$

Para la masa m y a partir de la figura 1a deducimos:

$$T\operatorname{sen}\alpha = ma_x \quad (4)$$

El módulo a_X es constante lo que significa que el movimiento de la masa m es uniformemente acelerado y dirigido hacia la izquierda. En el tiempo que transcurre desde t=0 a t=t se ha desplazado

$$(L_1 + l_1\operatorname{sen}\alpha) - (L_2 + l_2\operatorname{sen}\alpha) = (L_1 - L_2) + \operatorname{sen}\alpha(l_1 - l_2) = (l_2 - l_1) - \operatorname{sen}\alpha(l_2 - l_1)$$

En el tiempo que media entre t=0 y t=t

$$\left(l_2-l_1\right)-\operatorname{sen}\alpha\left(l_2-l_1\right)=\frac{1}{2}a_X t^2 \Rightarrow \quad \left(l_2-l_1\right)\left(1-\operatorname{sen}\alpha\right)=\frac{1}{2}a_X t^2 \quad (5)$$

Dividiendo las ecuaciones (3) y (5).

$$1-\operatorname{sen}\alpha=\frac{a_X}{A_X} \quad (6)$$

Dividiendo las ecuaciones (2) y (4).

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}=\frac{m\,a_X}{M\,A_X}=\frac{m}{M}\cdot\left(1-\operatorname{sen}\alpha\right) \Rightarrow \qquad \frac{m}{M}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\left(1-\operatorname{sen}\alpha\right)^2}$$

b) Volviendo a la figura 1a escribimos.

$$mg-T\cos\alpha=m\,a_Y \Rightarrow \qquad T\cos\alpha=m\left(g-a_Y\right) \quad (7)$$

$$l_2\cos\alpha-l_1\cos\alpha=\frac{1}{2}a_y t^2 \quad \Rightarrow \left(l_2-l_1\right)\cos\alpha=\frac{1}{2}a_y t^2 \quad (8)$$

Dividiendo la ecuación (2) por la (7).

$$\frac{T\left(1-\operatorname{sen}\alpha\right)}{T\cos\alpha}=\frac{M\,A_X}{m\left(g-a_Y\right)} \quad (9)$$

Dividiendo la ecuación (3) por la (8)

$$\frac{l_2-l_1}{\left(l_2-l_1\right)\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{2}A_X t^2}{\frac{1}{2}a_Y t^2} \Rightarrow \qquad a_Y=A_X\cos\alpha \quad (10)$$

Sustituyendo (10) en (9) y la relación $\frac{M}{m}=\frac{\left(1-\operatorname{sen}\alpha\right)^2}{\operatorname{sen}\alpha}$, resulta:

$$\frac{1-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\left(1-\operatorname{sen}\alpha\right)^2}{\operatorname{sen}\alpha}\cdot\frac{A_X}{g-A_X\cos\alpha} \Rightarrow \quad \operatorname{tag}\alpha\left(g-A_X\cos\alpha\right)=A_X-A_X\operatorname{sen}\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad g\ \operatorname{tag}\alpha - A_X\cos\alpha\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=A_X-A_X\operatorname{sen}\alpha \quad \Rightarrow \quad A_x=g\ \operatorname{tag}\alpha$$

154. (426).-***Una partícula de masa m recorre un circunferencia de radio R. La componente tangencial de la fuerza que actúa sobre la partícula obedece a la ley F = k t. La partícula en el tiempo t=0 posee una velocidad nula y*** s_o***=0 m.***
a) Calcular el tiempo que emplea la partícula en dar una vuelta completa
b) Determinar la fuerza centrípeta que actúa sobre ella cuando se haya desplazado un ángulo de 45º.

a) Aplicamos la segunda ley de Newton

$$F = kt = m\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{k}{m}\, t\, dt = \int dv \quad \Rightarrow \quad \frac{k\,t^2}{2\,m} + Cte = v$$

$$\text{Cuando } t = 0 \rightarrow v = v_o \quad \Rightarrow \quad v = \frac{k\,t^2}{2\,m} = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int ds = \int \frac{k\,t^2}{2\,m} dt \quad \Rightarrow \quad s = \frac{k\,t^3}{2m} + Cte \quad \text{cuando } \; t = 0 \rightarrow Cte = 0$$

b) Si la partícula da una vuelta completa $s = 2\pi\, R$

$$2\pi R = \frac{k\,t^3}{6\;m} \Rightarrow \quad t = \sqrt[3]{\frac{12\pi\, m\, R}{k}}$$

b) El arco al cual corresponde un ángulo de $45º = \dfrac{\pi}{4}$ rad

$$s = \frac{\pi}{4} R = \frac{k\,t^3}{2\,m} \Rightarrow \quad t = \sqrt[3]{\frac{\pi\, m\, R}{2\,k}}$$

La fuerza centrípeta vale

$$F_C = \frac{m\,v^2}{R} = \frac{m}{R}\left(\frac{k\,t^2}{2\,m}\right)^2 = \frac{k^2 t^4}{4\,m\,R} = \frac{k^2}{4\,m\,R}\left(\sqrt[3]{\frac{\pi\, m\, R}{2\,k}}\right)^4 = \frac{k^2}{4\,m\,R}\left(\frac{\pi\, m\, R}{2\,k}\right)^{\frac{4}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad F_C = \frac{k^2}{4\,m\,R}\,\frac{\pi^{\frac{4}{3}}\, m^{\frac{4}{3}} R^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{4}{3}}\, k^{\frac{4}{3}}} = \frac{\pi^{\frac{4}{3}}\, k^{\frac{2}{3}}\, m^{\frac{1}{3}}\, R^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{10}{3}}}$$

155. (428)-***Una bala de forma esférica de 2 gramos de masa y 9 mm de diámetro abandona el arma con una velocidad de 250 m/s y atraviesa un cilindro de 15 m de longitud y diámetro 1 m que contiene argón a la presión de 20 atmósferas y a temperatura ambiente de T = 300 K.. Durante su paso por el gas está sometida a una fuerza de frenado***

$$F = -\frac{1}{2}\varepsilon \rho A v^2$$

ε es un coeficiente de valor 0,5 para la esfera, ρ es la densidad del gas, A el área del círculo máximo de una esfera y v la velocidad de la bala.
Se desprecia la acción de la gravedad.
a) Calcular la ecuación que relaciona la velocidad de la bala con el tiempo
b) Determinar el tiempo que emplea la bala en recorrer el cilindro
c) Calcular la pérdida de energía cinética de la bala al travesar el gas y determinar el aumento de su temperatura si la pérdida de energía cinética se transforma íntegramente en calor en el gas.
Datos masa molar del argon M =39,9 g/mol,
Calor específico 312,5 J/(kg K)

Olimpiadas Universidad de Toronto

a) Aplicamos la segunda ley de Newton

$$F = -\frac{1}{2}\varepsilon\rho A v^2 = -k v^2 = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \int \frac{-k}{m}dt = \int v^2 dv \Rightarrow -\frac{k}{m}t = -\frac{1}{v} + Cte$$

Cuando t=0 , la velocidad es la inicial v_o.; $Cte = \frac{1}{v_o}$

$$-\frac{1}{v} + \frac{1}{v_o} = -\frac{k}{m}t \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{v_o} + \frac{k}{m}t \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{m + k v_o t}{m v_o} \Rightarrow v = \frac{m v_o}{m + k v_o t}$$

Calculamos el valor de la densidad del gas a partir de la ecuación de los gases perfectos

$$PV = \frac{g}{M}RT \Rightarrow P = \frac{\rho}{M}RT \Rightarrow \rho = \frac{PM}{RT} = \frac{20\cdot 101325\frac{N}{m^2}\cdot 39{,}9.10^{-3}\frac{kg}{mol}}{8{,}31\frac{J}{mol K}\cdot 300K} = 32{,}4\frac{kg}{m^3}$$

Calculamos el valor de k: $k = \frac{1}{2}\cdot 0{,}5\cdot 32{,}4\frac{kg}{m^3}\pi\left(4{,}5.10^{-3}\right)^2 m^2 = 5{,}15.10^{-4}\frac{kg}{m}$

$$v = \frac{2.10^{-3}kg\cdot 250\frac{m}{s}}{2.10^{-3}kg + 5{,}15.10^{-4}\frac{kg}{m}\cdot 250\frac{m}{s}t} = \frac{0{,}5}{2.10^{-3} + 0{,}1288t}\ \frac{m}{s}$$

b) Para calcular el tiempo hacemos uso de la ecuación v= v(t)

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{0{,}5}{2.10^{-3} + 0{,}1288.t} \Rightarrow \quad \int dx = 0{,}5\int \frac{1}{2.10^{-3} + 0{,}1288.t}dt$$

Para resolver la segunda integral hacemos uso del siguiente cambio de variable

$$2.10^{-3} + 0{,}1288t = p \Rightarrow 0{,}1288dt = dp \Rightarrow \quad dt = \frac{dp}{0{,}1288} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}5\int \frac{dp}{0{,}1288p} = \frac{0{,}5}{0{,}1288} \cdot \ln p = \frac{0{,}5}{0{,}1288} \cdot \ln\left(2.10^{-3} + 0{,}1288t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{0{,}5}{0{,}1288} \cdot \ln\left(2.10^{-3} + 0{,}1288t\right) + Cte$$

Cuando t=0 , x= 0 m, $Cte = -\frac{0{,}5}{0{,}1288}\ln 2.10^{-3} = 24{,}13$

El tiempo pedido corresponde a que el valor de x sea 15 m

$$15 = \frac{0{,}5}{0{,}1288}\ln\left(2.10^{-3} + 0{,}1288t\right) + 24{,}13 \Rightarrow 3{,}864 = \ln\left(2.10^{-3} + 0{,}1288t\right) + 6{,}22 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2{,}356 = \ln\left(2.10^{-3} + 0{,}1288t\right) \Rightarrow \quad e^{-2{,}356} = 2.10^{-3} + 0{,}1288t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{0{,}0948 - 2.10^{-3}}{0{,}1288} = 0{,}72s$$

c) Calculamos la velocidad que posee la bala después de recorrer los 15 m de longitud

$$v = \frac{m\,v_o}{m + k\,v_o\,t} = \frac{2.10^{-3} \cdot 250}{2.10^{-3} + 5{,}15.10^{-4} \cdot 250 \cdot 0{,}72} = 5{,}3\ \frac{m}{s}$$

La pérdida de energía cinética

$$\Delta Ec = \frac{1}{2}m\left(5{,}3^2 - 250^2\right) = -62{,}5J$$

Esta energía pérdida aparece en energía calorífica que hace aumentar la temperatura del gas del cilindro La masa del gas del cilindro es: $M = \pi \cdot 0{,}5^2 15 \cdot 32{,}4 = 381{,}7kg$

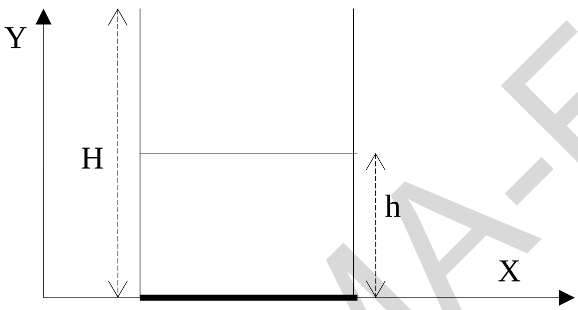
$$\Delta T = \frac{62{,}5J}{381{,}7kg \cdot 312{,}5\frac{J}{kgK}} = 5{,}2.10^{-4}\,K$$

156.(430).- ***Un vaso de forma cilíndrica tiene una masa total M, distribuida $\frac{M}{4}$ en su base y el resto por las paredes. Se pide para qué altura de agua añadida al vaso el centro de masas ocupa la posición más baja.***

Calcular su valor numérico si M= 200 gramos; radio R = 6 cm y altura H =20 cm

Dato. Densidad del agua ρ= 10^3 kg/m^3

En la figura h es la altura que alcanza el agua en el vaso.



Calculamos primero la posición del centro de masas del vaso sin agua, suponiendo que el espesor de la base del vaso es prácticamente cero.

$$y_V = \frac{\frac{M}{4}\cdot 0 + \frac{3}{4}M\cdot\frac{H}{2}}{M} = \frac{3}{8}H$$

Calculamos la posición del centro de masas del vaso con agua hasta una altura h

$$y_S = \frac{M\cdot\frac{3}{8}H + M_{agua}\cdot\frac{h}{2}}{M + M_{agua}} = \frac{M\cdot\frac{3}{8}H + \pi R^2 h\rho\cdot\frac{h}{2}}{M + \pi R^2 h\rho} = \frac{M\cdot\frac{3}{4}H + \pi R^2\rho\, h^2\,\cdot}{2M + 2\pi R^2 h\rho}$$

Para hallar el valor de h mínimo derivamos la anterior ecuación e igualamos a cero

$$\frac{dy_S}{dh} = \frac{\left(2M + 2\pi R^2\rho h\right)\cdot\left(2\pi R^2\rho h\right) - \left(M\frac{3}{4}H + \pi R^2\rho h^2\right)\cdot\left(2\pi R^2\rho\right)}{\left(2M + 2\pi R^2\rho h\right)^2} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2Mh + 2\pi R^2\rho h^2 - M\frac{3}{4}H - \pi R^2\rho h^2 = 0 \;\Rightarrow\; \pi R^2\rho h^2 + 2Mh - M\frac{3}{4}H = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado

$$h = \frac{-2M \pm \sqrt{4M^2 + 3\pi R^2 \rho M H}}{2\pi R^2 \rho} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ solución válida : } \quad h = \frac{-2M + \sqrt{4M^2 + 3\pi R^2 \rho M H}}{2\pi R^2 \rho}$$

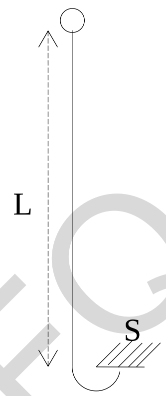
Sustituyendo los valores numéricos

$$h_{min} = \frac{-2 \cdot 0{,}2 + \sqrt{4 \cdot 0{,}2^2 + 3\pi\left(6.10^{-2}\right)^2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2}}{2\pi\left(6.10^{-2}\right)^2 \cdot 10^3} = 0{,}037\,\text{m} = 3{,}7\,\text{cm}$$

157. (431)- ***Una cuerda uniforme e inextensible de masa M y longitud L está en reposo en la posición indicada en la figura ya que está sostenida por el extremo superior. El extremo inferior esta fijo a un soporte S. La longitud del bucle inferior se considera despreciable frente a la longitud L de la cuerda. Se deja en libertad la cuerda sin velocidad inicial.***

a) Se pide la fuerza que el soporte S ejerce sobre la cuerda en función del tiempo.

b) El tiempo que emplea la cuerda desde el inicio del movimiento hasta que su extremo superior alcanza la posición más baja.



a) En la figura 1 se representa la posición de la cuerda en función del tiempo. Como el bucle tiene longitud despreciable frente a L, en la figura 1 aparece dibujado en forma discontinua.

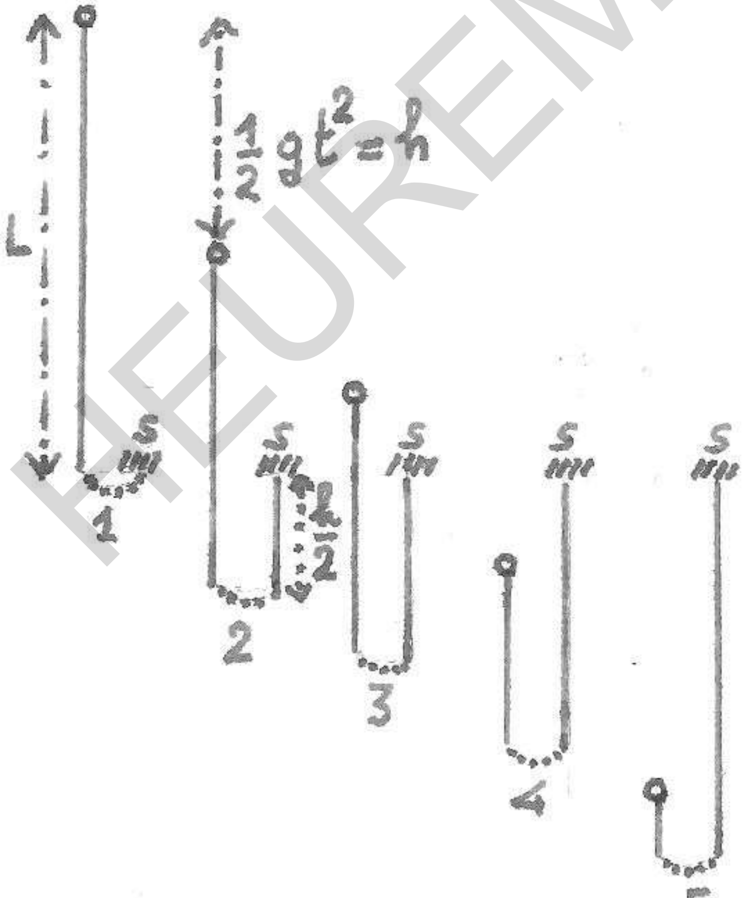


Fig.1

En ausencia de rozamiento, entre las posiciones señaladas con 1 y 2 el extremo superior de la cuerda se ha desplazado una altura $h=\frac{1}{2}gt^2$, siendo t el tiempo empleado por la cuerda en ese desplazamiento. Colgando del lado del soporte S, la longitud es $\frac{h}{2}=\frac{1}{4}g\,t^2$, En ese instante el soporte tira de la cuerda que cuelga con una fuerza N, vertical y hacia arriba. .Vertical y hacia abajo actúa el peso de la cuerda.

En el instante representado por el número 2 en la figura 1 la cuerda de la izquierda cuya longitud es $L-\frac{h}{2}=L-\frac{1}{4}g\,t^2$h tiene una velocidad v=gt, vertical y hacia abajo, el trozo de cuerda de longitud h/2 está en reposo.

El sistema en el tiempo t=0 tiene una cantidad de movimiento nula y en el tiempo t ha adquirido una cantidad de movimiento cuyo módulo vale

$$p=mv=\frac{M}{L}(L-\frac{1}{4}g\,t^2)\cdot g\,t$$

De acuerdo con la Dinámica clásica

$$\sum F=\frac{dp}{dt}\Rightarrow Mg-N=\frac{d}{dt}\left[M\,g\,t-\frac{1}{4}\frac{M}{L}g^2t^3\right]=Mg-\frac{1}{2}\frac{M}{L}g^2\cdot 3t^2 \quad \Rightarrow$$

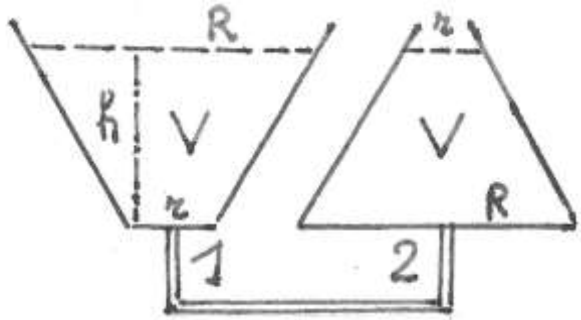
$$\Rightarrow \qquad N=\frac{3}{4}\frac{M\,g^2t^2}{L} \quad (1)$$

b) De la observación de la figura 1 se deduce que el extremo superior de la cuerda se desplaza como máximo hacia abajo una longitud 2L.

$$2L=\frac{1}{2}g\,t_M^2 \quad \Rightarrow \quad t_M=\sqrt{\frac{4L}{g}}$$

La ecuación (1) tiene validez desde t =0 a t=$t_{M..}$ Justamente después de la llegada del extremo de la cuerda la velocidad se anula en muy poco tiempo por lo que N debe sufrir una percusión y por tanto un valor muy elevado y cuando todo quede en reposo N será igual al peso de la cuerda.

158. (433)- ***En la figura inferior, 1 y 2 son dos recipientes iguales de volumen V que contienen agua a la misma temperatura. R es el radio de la base mayor y r de la menor, y h es la altura del agua. Ambos recipientes están conectados por una tubería.***



a) Se calienta el agua del recipiente 1, razonar en qué sentido fluirá el agua de 1 a 2 o de 2 a 1.

b) Se calienta el agua del recipiente 2, razonar en qué sentido fluirá el agua de 1 a 2 o de 2 a 1.

c) Supongamos un recipiente de la misma forma que el 1, siendo r = 5,0 cm ; la generatriz del mismo forma con la dirección vertical un ángulo θ=20º. Determinar la fuerza que ejerce el agua sobre la pared lateral en función de la altura H del agua. Representar la fuerza en newtones frente a la altura H en centímetros. Representar la fuerza F frente al volumen de agua.

Dato. Volumen del tronco de cono: $V = \frac{h\pi}{3}\left(R^2 + r^2 + R\,r\right)$

a) Cuando el agua de los dos recipientes se encuentra a la misma temperatura la presión sobre el fondo es la misma $p = \rho\, g\, h$.

Al calentar el agua del recipiente 1 esta se dilata y sube de nivel, al mismo tiempo su densidad disminuye. La presión sobre el fondo del recipiente 1 es: $p_1 = \rho_1 g\, h_1$.

Designamos con ΔT el aumento de temperatura del agua del recipiente 1, γ el coeficiente de dilatación cúbica del agua, y M la masa de agua., el nuevo volumen será

$$V_1 = V\left(1+\gamma\,\Delta T\right)\,; \Rightarrow \quad \frac{M}{V_1} = \frac{M}{V\left(1+\gamma\,\Delta T\right)} \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = \frac{\rho}{\left(1+\gamma\,\Delta T\right)}$$

La masa de agua no varía al calentarla, luego:

$$\frac{h_1\,\pi}{3}\left(R_1^2+r^2+R_1 r\right)=\frac{h\ \pi}{3}\left(R^2+r^2+R\ r\right)\cdot\left(1+\gamma\,\Delta T\right)\Rightarrow\ h_1=h\,\frac{\left(R^2+r^2+R\ r\right)}{\left(R_1^2+r^2+R_1 r\right)}\cdot\left(1+\gamma\,\Delta T\right)$$

La presión sobre el fondo del recipiente 1 es:

$$p_1=\frac{\rho}{\left(1+\gamma\,\Delta T\right)}\cdot g\cdot h\,\frac{\left(R^2+r^2+R\ r\right)}{\left(R_1^2+r^2+R_1 r\right)}\cdot\left(1+\gamma\,\Delta T\right)=\rho\,g\,h\,\frac{\left(R^2+r^2+R\ r\right)}{\left(R_1^2+r^2+R_1 r\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_1=p\,\frac{\left(R^2+r^2+R\ r\right)}{\left(R_1^2+r^2+R_1 r\right)}\quad (1)$$

Como R_1 es mayor que R, $p_1 < p$. El agua fluirá desde el recipiente 2 al 1.

a) De acuerdo con la fórmula (1) R es constante y r aumenta a $r_2 > r$.

$$p_1=p\,\frac{\left(R^2+r^2+Rr\right)}{\left(R^2+r_2^2+Rr_2\right)}\quad (2)$$

En la ecuación (2) el denominador es mayor que el numerador, por tanto, $p_1<p$, el agua se desplazará del recipiente 2 al 1 como en el caso anterior.

b) En la figura 1, H es la altura del agua. A una altura h hemos considerado dos rodajas de espesor dh y radio a, cuya superficie lateral es: $dS=2\pi a\,dh$. La presión a la altura h es: $p=\rho\,g\,h$ y la fuerza que actúa sobre el volumen Dv es:

$$dF=\rho\,g\,h\,2\,\pi\,a\ dh$$

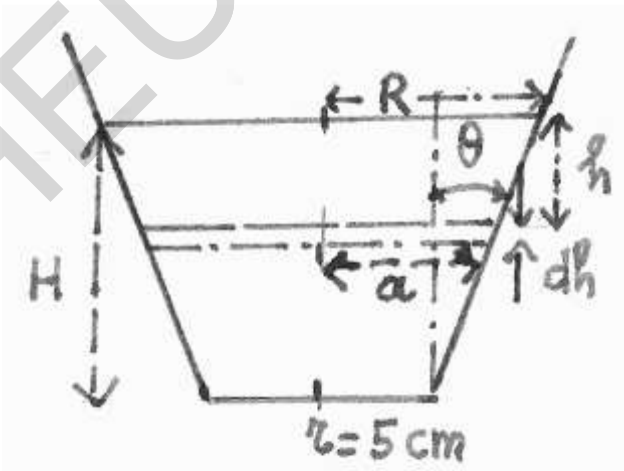


Fig.1

En la ecuación anterior aparecen dos variables h y a, que están relacionadas entre sí

$$\operatorname{tag}\theta = \frac{a-r}{H-h} \quad \Rightarrow \quad a = r + (H-h)\operatorname{tag}\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad dF = 2\pi\rho g\, h\left[r + (H\text{-}h)\ \operatorname{tag}\theta\right]dh$$

Para calcular la fuerza sobre toda la superficie lateral del depósito, hemos de integrar la anterior ecuación

$$F = 2\pi\rho g\int\left(h\,r + h\,H\operatorname{tag}\theta - h^2\operatorname{tag}\theta\right)dh = 2\pi\rho g\left|\frac{h^2 r}{2} + \frac{h^2 H\operatorname{tag}\theta}{2} - \frac{h^3\operatorname{tag}\theta}{3}\right|_0^H \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F = 2\pi\rho g\left(\frac{H^2 r}{2} + \frac{H^3\operatorname{tag}\theta}{2} - \frac{H^3\operatorname{tag}\theta}{3}\right) = 2\pi\rho g\left(\frac{H^2 r}{2} + \frac{H^3\operatorname{tag}\theta}{6}\right) \qquad (3)$$

En la ecuación (3) sustituimos los valores numéricos del enunciado

$$F = 2\cdot\pi\cdot 10^3\cdot 9{,}8\left(\frac{5.10^{-2}H^2}{2} + \frac{\operatorname{tag}20°H^3}{6}\right) = 6{,}16.10^3\left(2{,}5.10^{-3}H^2 + 0{,}0607H^3\right) \Rightarrow$$

$$F = 15{,}4H^2 + 373{,}9H^3 = H^2\left(154 + 373{,}9H\right)\ \ N$$

Calculamos el volumen de agua en función de H. De la figura 1 se deduce:

$$\operatorname{tag}\theta = \frac{R-r}{H} \quad \Rightarrow \quad R = r + H\operatorname{tag}\theta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{H\pi}{3}\left[(r + H\operatorname{tag}\theta)^2 + r^2 + r(r + H\operatorname{tag}\theta)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{H\pi}{3}\left[r^2 + H^2\operatorname{tag}^2\theta + 2\,r\,H\operatorname{tag}\theta + r^2 + r^2 + r\,H\operatorname{tag}\theta\right] \Rightarrow$$

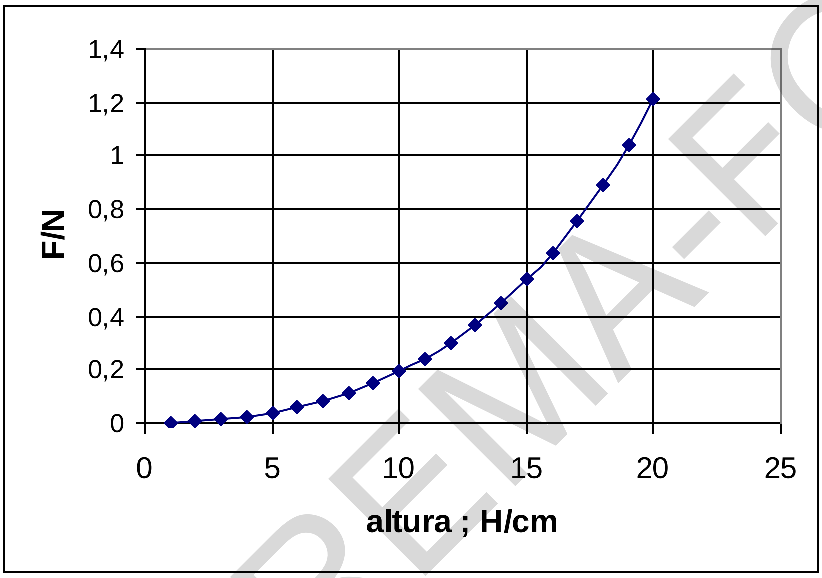
$$\Rightarrow \quad V = \frac{H\pi}{3}\left(3r^2 + H^2\operatorname{tag}^2\theta + 3\,r\,H\operatorname{tag}\theta\right) \Rightarrow$$

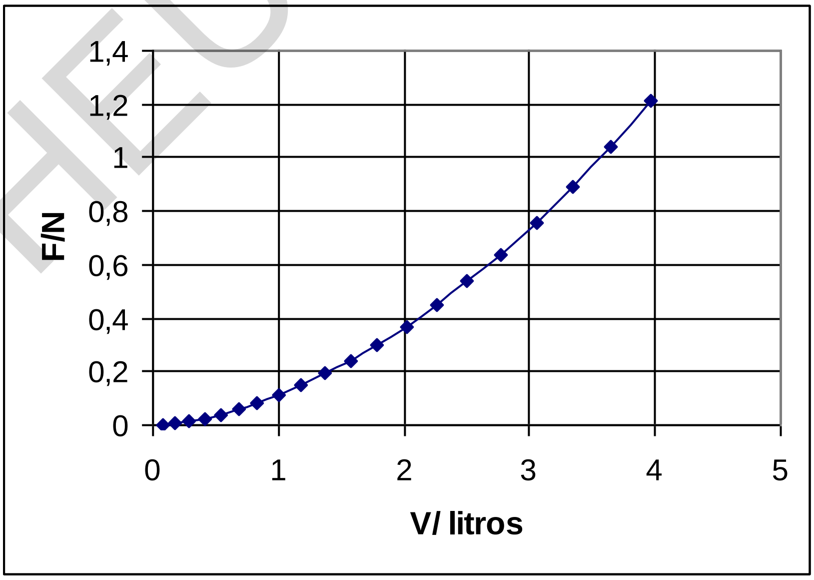
$$\Rightarrow \quad V = \pi H r^2 + \frac{\pi H^3\operatorname{tag}^2\theta}{3} + \pi\,r\,H^2\operatorname{tag}\theta$$

Sustituyendo los valores numéricos

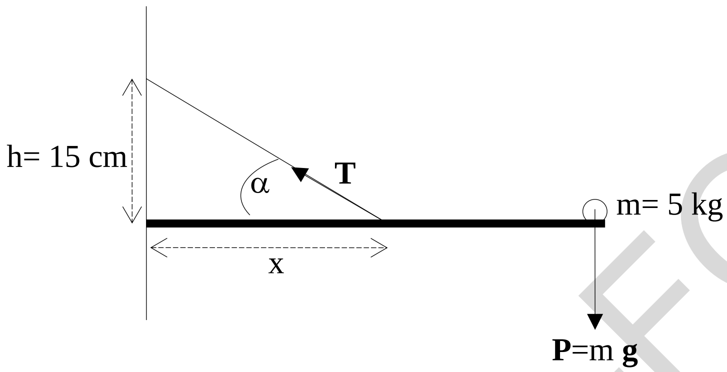
$$V = 7{,}85.10^{-3}H + 0{,}057H^2 + 0{,}139H^3$$

En la hoja de cálculo damos valores a H y obtenemos los correspondientes de F y H . Las representaciones gráficas son:





159. (436)-***Una barra de masa despreciable lleva en uno de sus extremos una masa de 5 kg. El otro extremo de la barra está articulado en una pared vertical. La barra se mantiene en posición horizontal. Un cable de acero de diámetro d= 1 mm está fijo por un extremo en la pared vertical a una altura h=15 cm por encima de la barra y el otro extremo está unido a un punto de ella (ver la figura inferior).***



a) Calcular el valor del ángulo α***, tal que la elongación que sufra el cable de acero sea mínima.***

b) El módulo de la fuerza T.

c) El alargamiento del cable de acero

Dato: Módulo de Young del cable de acero Y =20.10^{10} ***N/ m***^{2}***.***

a) L_B representa la longitud de la barra ; l la longitud del hilo de acero, T la fuerza con que el cable tira de la barra; una fuerza de reacción a T es la fuerza con que la barra tira del cable y es la causa de su alargamiento, x es una incógnita ; S sección del cable.

Al estar la barra en equilibrio los módulos de los momentos del peso P y de la fuerza T respecto al punto donde la barra se empotra en la pared deben ser iguales

$$T\,\text{sen}\alpha\cdot x = mg\cdot L_B \quad ; \quad \text{tag}\,\alpha = \frac{h}{x} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mg\cdot L_B}{\text{sen}\,\alpha\cdot\dfrac{h}{\text{tag}\,\alpha}} = \frac{mg\cdot L_B}{h\,\cos\alpha} \qquad (1)$$

La definición del módulo de Young es:

$$Y = \frac{\dfrac{T}{S}}{\dfrac{\Delta l}{l}} = \frac{T\,l}{S\Delta l} = \frac{\dfrac{mg\,L_B}{h\cos\alpha}\cdot\dfrac{h}{\text{sen}\alpha}\,.}{\dfrac{\pi d^2}{4}\Delta l} = \frac{4\,mg\,L_B}{\pi d^2\,\Delta l\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad \Delta l = \frac{4\,mg\,L_B}{\pi d^2\,Y\text{sen}\,\alpha\cos\alpha} \quad (2)$$

Para hallar el mínimo de la elongación derivamos (2) respecto de la variable α, .e igualamos a cero.

$$\frac{d\Delta l}{d\alpha}=\frac{4mg\ L_B}{\pi d^2 Y}\left[\frac{-\left(-\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha\right)}{\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}\right]=0\Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \operatorname{sen}\alpha=\cos\alpha\ \Rightarrow\quad \alpha=45^o\ \Rightarrow\ x=\frac{15\,cm}{tag\,45^o}=15cm$$

b) Sustituyendo en (1)

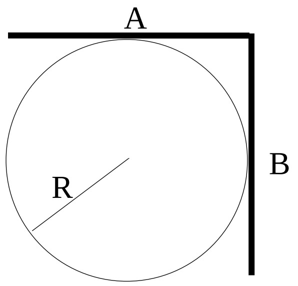
$$T=\frac{5\cdot 9{,}8\cdot 50.10^{-2}}{15{,}10^{-2}\cdot\cos 45^o}=231\,N$$

a) Sustituyendo los valores numéricos en (2)

b)

$$\Delta l=\frac{4\cdot 5\cdot 9{,}8\cdot 50.10^{-2}}{\pi\cdot\left(10^{-3}\right)^2\cdot 20.10^{10}\cdot \operatorname{sen}45^o\cos 45^o}=3{,}12.10^{-4}\ m$$

160. (439)- ***Dos superficies iguales unidas entre sí forman un ángulo diedro recto. Estas superficies se apoyan sobre un cilindro de radio R, tal como indica la figura inferior.***
Determinar el coeficiente de rozamiento estático mínimo para que las superficies no resbalen sobre el cilindro.



Designamos con m a la masa de cada superficie.

Las fuerzas que actúan se representan en la figura 1

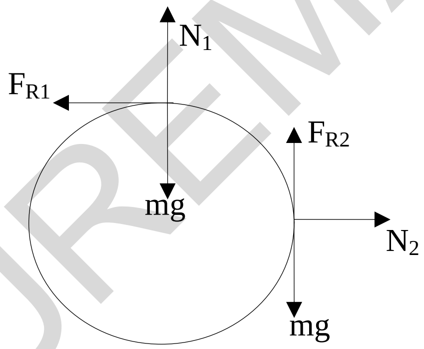


Fig.1

Si el sistema está en equilibrio se cumplen las siguientes ecuaciones

$$N_1 + F_{R2} - 2\,mg = 0 \qquad (1)$$

$$N_2 - F_{R1} = 0 \qquad (2)$$

Los momentos respecto a A y B son nulos

$$N_2 R - mg\,R + F_{R2} R = 0 \;\Rightarrow\; N_2 + F_{R2} = mg \qquad (3)$$

$$mg\,R + F_{R1} R - N_1 R = 0 \;\Rightarrow\; N_1 - F_{R1} = mg \qquad (4)$$

De las ecuaciones (2) y (3) resulta: $F_{R1} + F_{R2} = mg \qquad (5)$

Las relaciones entre las fuerzas normales y las de rozamiento son:

$$F_{R1} \le \mu N_1 \quad ; \quad F_{R2} \le \mu N_2$$

Despejando N_1 de (4) y sustituyendo en la desigualdad primera

$$F_{R1} \le \mu\left(mg + F_{R1}\right) \Rightarrow F_{R1} \le \mu\, mg + \mu\, F_{R1} \Rightarrow F_{R1} - \mu F_{R1} \le \mu\, mg \Rightarrow \quad F_{R1} \le \frac{\mu}{1-\mu} mg \quad (6)$$

Despejando N_2 de (3) y sustituyendo en la desigualdad segunda

$$F_{R2} \le \mu\left(mg - F_{R2}\right) \Rightarrow F_{R2} \le \mu\, mg - \mu\, F_{R2} \Rightarrow F_{R2} + \mu F_{R2} \le \mu\, mg \Rightarrow \quad F_{R2} \le \frac{\mu}{1+\mu} mg \quad (7)$$

Sustituyendo en la ecuación (5) en el caso de que (6) y (7) sean igualdades

$$\frac{\mu}{1-\mu} mg + \frac{\mu}{1+\mu} mg = mg \quad \Rightarrow \quad \mu \frac{2}{1-\mu^2} = 1 \Rightarrow \quad \mu^2 + 2\mu - 1 = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \quad \Rightarrow \quad \mu = -1 \pm \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \mu = \sqrt{2} - 1 = 0{,}414$$