$$x_{CM}(t=0)=\frac{mx_B+mh}{2m}\quad ;\quad x_{CM}(t=t)=\frac{m(L+x_B)+m\left(L+\frac{h}{2}\right)}{2m}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{CM}(t=0)=x_{CM}(t=t)\Rightarrow x_B+h=L+x_B+L+\frac{h}{2}\Rightarrow L=\frac{h}{4}$$

Dado que en el tiempo t=0 , la velocidad del sistema es cero , el observador del sistema inercial puede escribir

$$L=\frac{h}{4}=\frac{1}{2}a\,t^2\Rightarrow t^2=\frac{h}{2a}\quad (1)$$

El observador ligado al sistema no inercial (O´X´Y´) que sabe que se encuentra en un sistema acelerado y para que las leyes de la mecánica sean válidas, a las fuerzas N (interacción de m con la diagonal) y peso (interacción de m con la Tierra) ha de incluir una fuerza denominada de inercia y de valor ma y sentido contrario a la aceleración del sistema..este observador también sabe que en la Mecánica clásica el tiempo medido por el observador inercial t (tiempo que emplea el sistema en recorrer la distancia L) es el mismo que el tiempo que el mide y que emplea la masa m en recorrer la distancia OA/2. Proyecta las fuerzas sobre el eje O´X´ y concluye

$$m\,g\,sen\alpha+m\,a\cos\alpha=m\,a_{x'}\Rightarrow a_{x'}=g\,sen\alpha+a\cos\alpha\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{D}{2}=\frac{1}{2}\left(g\,sen\alpha+a\cos\alpha\right)t^2\Rightarrow D=\left(g\frac{b}{D}+a\frac{h}{D}\right)t^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D^2=\left(g\,b+a\,h\right)t^2\Rightarrow t^2=\frac{D^2}{g\,b+a\,h}\quad (2)$$

Igualando (1) y (2)

$$\frac{h}{2a}=\frac{D^2}{g\,b+a\,h}\Rightarrow g\,b\,h+a\,h^2=2aD^2\Rightarrow a=\frac{g\,b\,h}{2D^2-h^2}=\frac{g\,b\,h}{2\left(b^2+h^2\right)-h^2}=\frac{g\,b\,h}{2b^2+h^2}$$

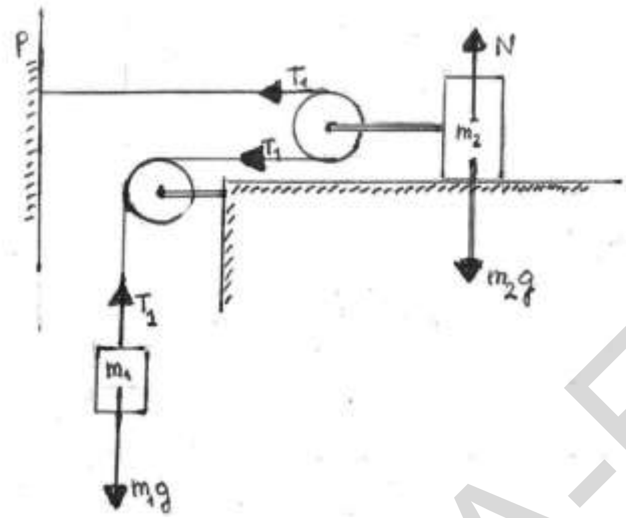
Sustituyendo la aceleración en (1)

$$t=\sqrt{\frac{h}{2a}}=\sqrt{\frac{h\cdot\left(2b^2+h^2\right)}{2\,g\,b\,h}}=\sqrt{\frac{2b^2+h^2}{2\,g\,b}}$$

La velocidad del bastidor tiene la dirección de la aceleración y solamente componente sobre el je X

$$v_B=at=\frac{g\,b\,h}{2b^2+h^2}\sqrt{\frac{2b^2+h^2}{2\,g\,b}}=\sqrt{\frac{g^2b^2h^2\left(2b^2+h^2\right)}{2\,g\,b\left(2b^2+h^2\right)^2}}=\sqrt{\frac{g\,b\,h^2}{2\left(2b^2+h^2\right)}}$$

165. (457)***.- En el sistema de la figura la cuerda está unida a una pared P. Calcular la aceleración de la masa m_1 cuando el sistema se deje en libertad. Se supone, que no hay rozamientos, que las poleas carecen de masa, y que la cuerda es inextensible.***



En la figura están representadas las fuerzas que actúan sobre las masas. Aplicamos la segunda ley de Newton

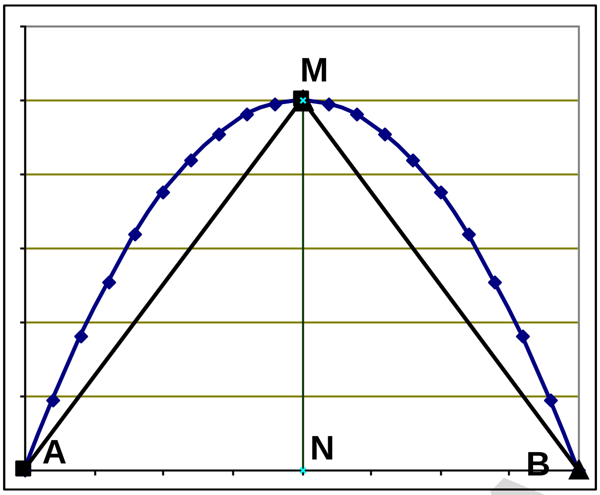
$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \quad ; \quad 2T_1 = m_2 a_2 \Rightarrow \quad m_1 g - \frac{m_2\, a_2}{2} = m_1\, a_1$$

Teniendo en cuenta que la cuerda es inextensible cuando la masa m_1 desciende una longitud l, las dos ramas paralelas de la cuerda también se desplazan en total l, pero l/2 en la cuerda superior y l/2 en la inferior, en consecuencia, cuando m_1 se desplaza l, m_2 solamente se desplaza l/2 y como ambas masas están ligadas la aceleración $a_1 = 2\, a_2$

$$m_1 g - \frac{m_2\, \frac{a_1}{2}}{2} = m_1\, a_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_2\, \frac{a_1}{2}}{2} + m_1\, a_1 = m_1 g \quad \Rightarrow \quad a_1\left(m_1 + \frac{m_2}{4}\right) = m_1 g \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = \frac{m_1 g}{m_1 + \frac{m_2}{4}} = \frac{4\, m_1 g}{4\, m_1 + m_2}$$

166. (458)**.-** ***Se lanza un cuerpo con velocidad inicial v_o y ángulo θ con la horizontal. En la figura inferior se ha dibujado un boceto de una trayectoria y sobre ella se ha dibujado el triángulo AMB, siendo M el punto más alto de la trayectoria.***



a) Calcular el ángulo θ que hace al área del triángulo AMB máxima.

b) Dibuja la gráfica del área frente a los diversos valores del ángulo, para $v_o = 10$ m/s

Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria son:

$$x = v_o(\cos\theta)t \quad ; \quad y = v_o \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

Calculamos el alcance máximo que en el boceto corresponde al segmento AB. Para ello hacemos y=0

$$0 = v_0(\operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2} g t^2, \text{una solución es } t = 0 \text{ que corresponde al punto A y la otra:}$$

$$v_o \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2} g t = 0 \;\Rightarrow\; t_{AB} = \frac{2 v_o \operatorname{sen}\theta}{g} \;\Rightarrow\; AB = v_o \cos\theta \cdot \frac{2 v_o \operatorname{sen}\theta}{g} = \frac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$$

Para calcular MN el tiempo que tarda el móvil en alcanzar el punto más alto de la trayectoria es la mitad de lo que tarda en alcanzar el punto B.

$$MN = v_0 \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_o^2 \operatorname{sen}^2\theta}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{v_o^2 \operatorname{sen}^2\theta}{g}$$

El área del triángulo AMB es:

$$\text{Área} = A = \frac{AB \cdot MN}{2} = \frac{\left(v_o^2 \operatorname{sen} 2\theta\right) \cdot \left(v_o^2 \operatorname{sen}^2\theta\right)}{4 g^2} = \frac{v_o^4}{4 g^2} \operatorname{sen} 2\theta \cdot \operatorname{sen}^2\theta \quad (1)$$

Para calcular el ángulo θ que hace un valor máximo para el área del triángulo derivamos la función (1) con respecto a θ e igualamos a cero

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{v_o^4}{4g^2}\left(\operatorname{sen}2\theta \cdot 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta \cdot 2 \cdot \cos 2\theta\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}2\theta \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}\theta\cos\theta = -\operatorname{sen}^2\theta \cdot \cos 2\theta \Rightarrow$$

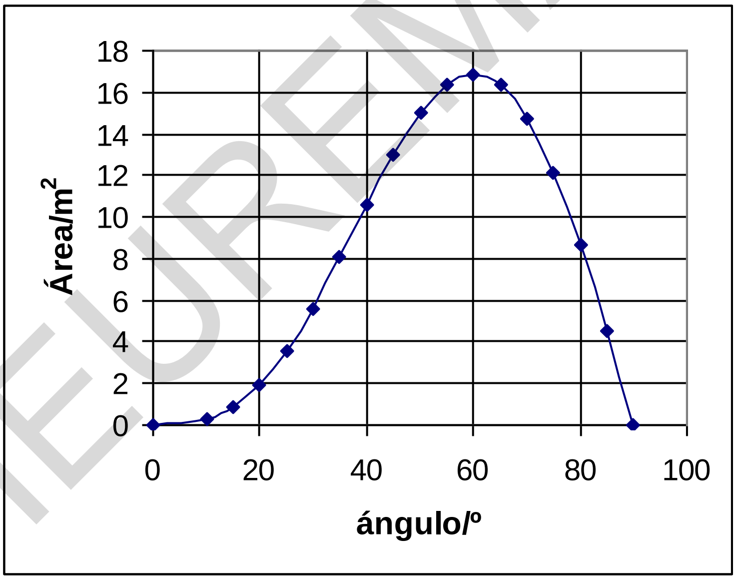
$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = -\cos 2\theta \quad \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}2\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \sqrt{-\cos 2\theta} = \sqrt{-2\left(2\cos^2\theta - 1\right)} = \sqrt{2 - 4\cos^2\theta} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos\theta = \sqrt{2 - 4\cos^2\theta} \quad \Rightarrow \quad 4\cos^2\theta = 2 - 4\cos^2\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = 60^{o}$$

b) Sustituyendo el valor de la velocidad y de g en la ecuación (1) obtenemos

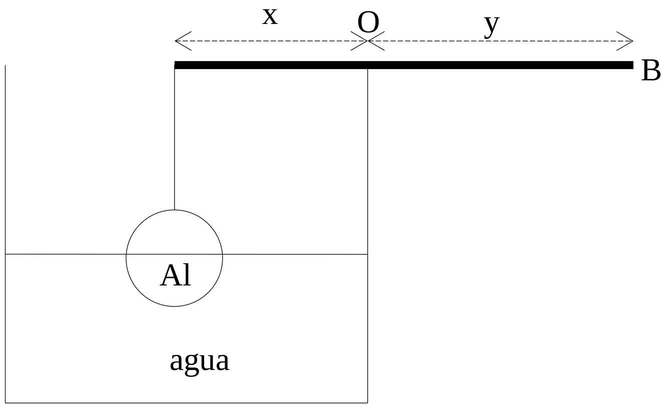
$$A = 26 \cdot \operatorname{sen}2\theta \cdot \operatorname{sen}^2\theta$$

La representación gráfica de la ecuación anterior es:



<

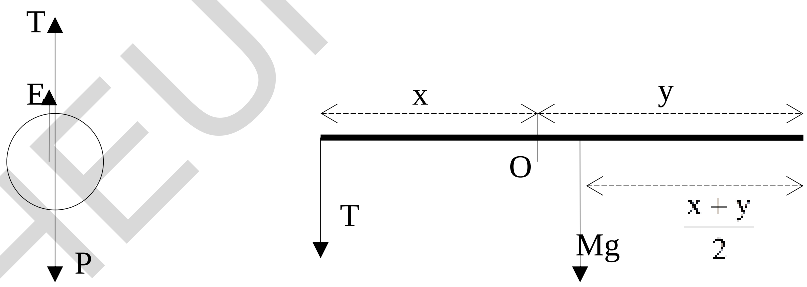
167. (460)***.- En la figura inferior el sistema está en equilibrio.***



Una bola de aluminio de r = 0,5 cm está sumergida la mitad en agua y cuelga de una cuerda sin masa. B es una barra homogénea de masa M = 4,4 gramos. Determinar la relación y/x.
Datos . Densidad del aluminio = $2,7.10^3$ kg/m^3 , densidad del agua $1,0.10^3$ kg /m^3

Olimpiadas de Moscú

Las fuerzas que actúan sobre la esfera de aluminio y la barra son las siguientes



Al estar en reposo la esfera de aluminio la suma de las fuerzas es nula.
T es la tensión de la cuerda, E el empuja del agua sobre la esfera y P el peso de la esfera. Se desprecia el empuje que ejerce el aire por ser su densidad muy pequeña respecto de la del agua.

$$\vec{T}+\vec{P}+\vec{E}=0 \Rightarrow \quad T = P - E = V\rho_{Al}g - \frac{V}{2}\rho_W g = \frac{4}{3}\pi r^3 g\left(\rho_{Al} - \frac{\rho_W}{2}\right)$$

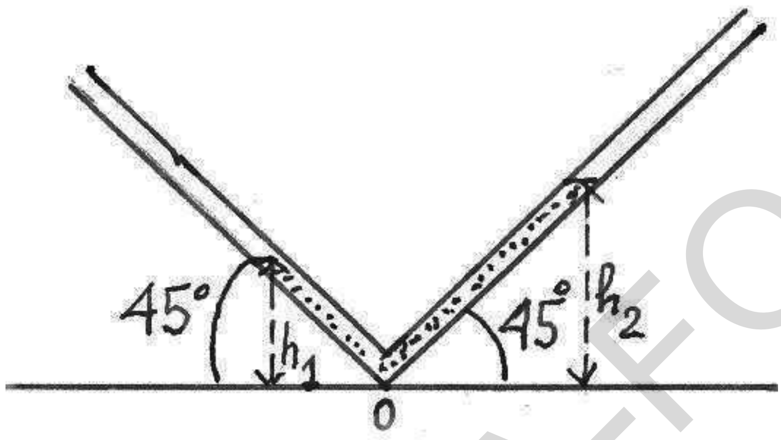
Si la barra está en equilibrio los momentos de las fuerzas han de ser iguales y su suma nula

El peso de la barra actúa en su centro de masas que está situado en mitad de la barra y a la derecha del apoyo O ya que los momentos de T y Mg han de tener signo contrario para que su suma sea nula.

$$\vec{M}_T = \vec{M}_{Mg} \quad \Rightarrow \; Tx = Mg\left(y - \frac{x+y}{2}\right) \;\Rightarrow\; \frac{T}{Mg} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{y}{x} \Rightarrow\; \frac{2T}{Mg} + 1 = \frac{y}{x} \;\Rightarrow$$

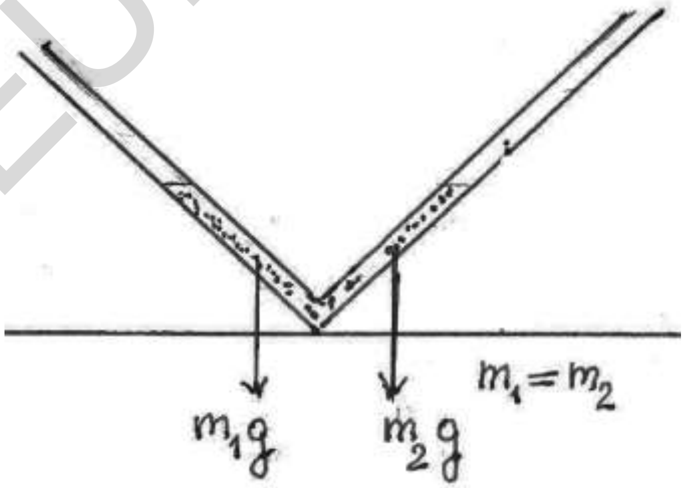
$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x} = \frac{2 \cdot \frac{4}{3}\pi\left(0{,}5.10^{-2}\right)^3\left(2{,}7.10^3 - \frac{1}{2}1{,}0.10^3\right)}{4{,}4.10^{-3}} = 1{,}52$$

168. (461)***.- Un acelerómetro sencillo puede hacerse con un tubo doblado tal como se observa en la figura inferior. Durante el movimiento acelerado el líquido adquiere dos niveles distintos en cada rama. Las alturas de dichos niveles respecto de la horizontal son h_1 y h_2 respectivamente. Calcular la aceleración a en función de g , h_1 y h_2.***

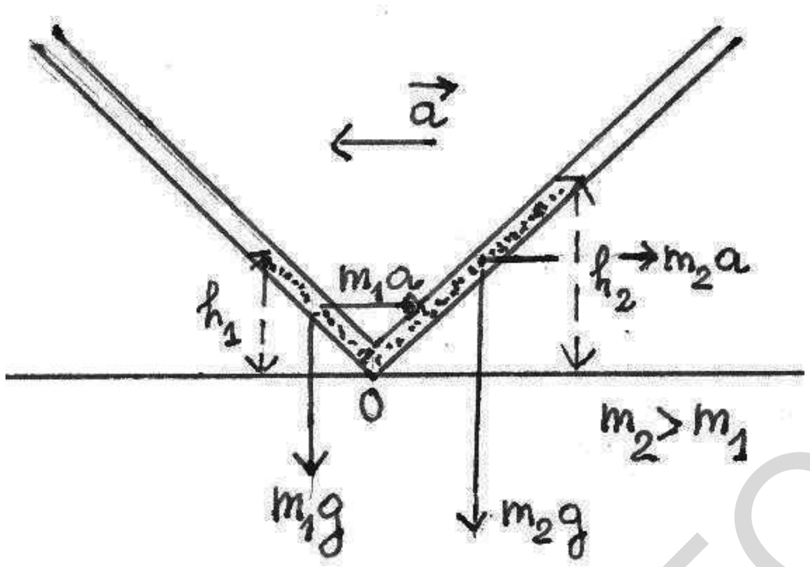


Olimpiadas de Moscú

Cuando el tubo está en reposo o con movimiento uniforme la altura de líquido en las dos ramas es la misma ($h_1=h_2$) .Consideramos el líquido dividido en dos partes una a la izquierda de O y otra a su derecha. La componente del peso del lado izquierdo se equilibra con la componente del peso del lado derecho.



Al estar el sistema acelerado aparecen dos fuerzas de inercia de módulos m_1a y m_2a respectivamente. . El sistema se encuentra en equilibrio.



Las fuerzas a lo largo de los tubos son

Rama izquierda. $m_1 g \cos 45^o + m_1 a \cos 45^o$
Rana derecha $m_2 g \cos 45^o - m_2 a \cos 45^o$

Al estar en equilibrio

$$m_1 g \cos 45^o + m_1 a \cos 45^o = m_2 g \cos 45^o - m_2 a \cos 45^o \;\Rightarrow\; m_1 g + m_1 a = m_2 g - m_2 a \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a(m_1 + m_2) = g(m_2 - m_1) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$$

Designamos con S la sección del tubo, d a la densidad del líquido y L_1 y L_2 las longitudes de las ramas del tubo izquierda y derecha respectivamente

$$\cos 45^o = \frac{h_1}{L_1} \quad ; \quad \cos 45^o = \frac{h_2}{L_2}$$

$$m_1 = S\,L_1 d = S\frac{h_1}{\cos 45^o} d \; ; \; m_2 = S\,L_2\,d = S\frac{h_{2_1}}{\cos 45^o} d$$

Sustituyendo en la aceleración

$$a = \frac{g\left(S\frac{h_2}{\cos 45^o}d - S\frac{h_1}{\cos 45^o}d\right)}{S\frac{h_1}{\cos 45^o}d + S\frac{h_2}{\cos 45^o}d} = g\,\frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1}$$

169. (462) ***Un aeroplano vuela horizontalmente con una velocidad v_o. Comienza una maniobra de ascenso describiendo una semicircunferencia en un plano vertical. El módulo de su velocidad varía según la siguiente ecuación***

$$v^2 = v_o^2 - 2kh$$

Siendo h la altura en vertical respecto del inicio de la maniobra y k una constante. La velocidad del aeroplano en el punto más alto de su trayectoria es $\frac{v_o}{2}$

Calcular su aceleración cuando su vector velocidad apunte verticalmente hacia arriba.

Olimpiadas de Moscú

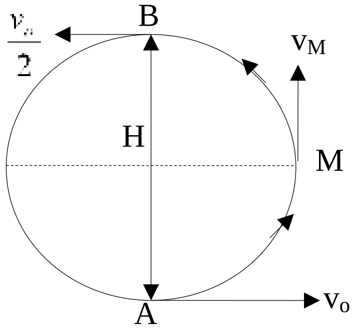
Añadido por nosotros. Si v_0 = 62,5 m/s y k =10 m/s², representar a) la velocidad frente a la altura, b) el tiempo de la maniobra frente a la altura y c) la aceleración centrípeta frente a la altura.

Calculamos la altura máxima del aeroplano respecto de su posición inicial.

$$\left(\frac{v_o}{2}\right)^2 = v_o^2 - 2kH \Rightarrow 2kH = v_o^2 - \frac{v_o^2}{4} \Rightarrow \quad H = \frac{\frac{3v_o^2}{4}}{2k} = \frac{3v_o^2}{8\,k}$$

El radio de la circunferencia descrita por el aeroplano es

$$R = \frac{H}{2} = \frac{3v_o^2}{16k}$$



AMB es la trayectoria seguida por el aeroplano. Su velocidad es tangente a la trayectoria y apunta verticalmente hacia arriba en la posición M, para la que la altura respecto de la posición inicial es: $h_M = \frac{H}{2} = R = \frac{3v_o^2}{16k}$.

En M hay dos tipos de aceleración la centrípeta y la tangencial. Son dos vectores, el primero dirigido hacia el centro y el segundo tangente en M apuntando hacia abajo.
Por definición la aceleración centrípeta en M vale

$$(a_c)_M = \frac{v_M^2}{R} = \frac{v_o^2 - 2kh_M}{R} = \frac{v_o^2 - 2k\dfrac{3v_o^2}{16k}}{\dfrac{3v_o^2}{16k}} = \frac{1-\dfrac{6k}{16k}}{\dfrac{3}{16k}} = \frac{\dfrac{16k-6k}{16k}}{\dfrac{3}{16k}} = \frac{10k}{3}$$

La aceleración tangencial es por definición

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh}\cdot\frac{dh}{dt} \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dh} = \frac{d}{dh}\left(\sqrt{v_o^2 - 2kh}\right) = \frac{-2k}{2\sqrt{v_o^2-2kh}} = -\frac{k}{\sqrt{v_o^2-2kh}} \quad (2)$$

La velocidad es la derivada dh/dt

$$v = \sqrt{v_o^2 - 2kh} = \frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int dt = \int \frac{dh}{\sqrt{v_o^2-2kh}}$$

Para resolver la segunda integral hacemos el cambio de variable

$$v_o^2 - 2kh = x^2 \quad -2k\,dh = 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad dh = -\frac{x\,dx}{k}$$

$$\int dt = t = \int \frac{-\dfrac{x\ dx}{k}}{x} = -\frac{x}{k} + Cte = -\frac{\sqrt{v_o^2-2kh}}{k} + Cte$$

Cuando h =0 , el tiempo t=0

$$0 = -\frac{v_o}{k} + Cte \;\Rightarrow\; Cte = \frac{v_o}{k} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t = -\frac{\sqrt{v_o^2 - 2kh}}{k} + \frac{v_o}{k} \;\Rightarrow\; t = \frac{1}{k}\left(v_o - \sqrt{v_o^2 - 2kh}\right) \;\Rightarrow\; v_o - kt = \sqrt{v_o^2 - 2kh} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0^2 + k^2t^2 - 2v_o kt = v_o^2 - 2kh \Rightarrow h = \frac{2v_o kt - k^2t^2}{2k} = vt - \frac{kt^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = v_o - kt \quad (3)$$

$$a_t = -\frac{k}{\sqrt{v_o^2 - 2kh}} \cdot (v_o - kt) = -\frac{k}{\sqrt{v_o^2 - 2kh}} \cdot \left[v_o - k\frac{1}{k}\left(v_o - \sqrt{v_o^2 - 2kh}\right)\right] \Rightarrow$$

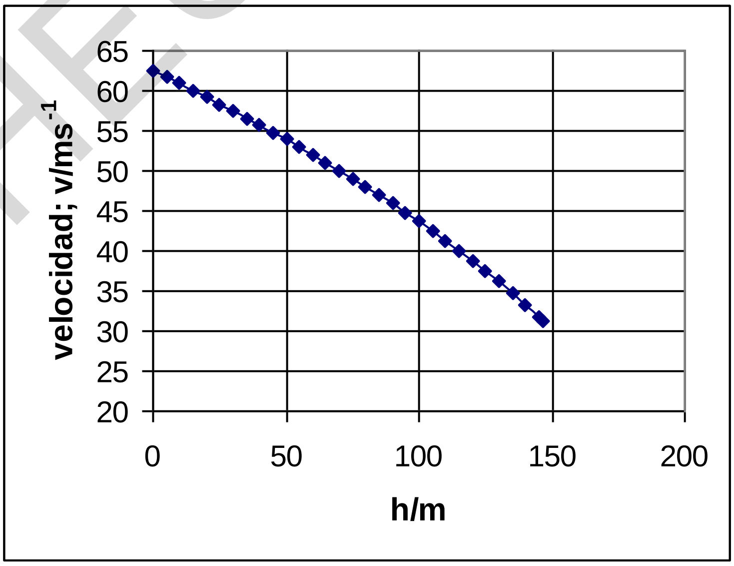
$$\Rightarrow a_t = -\frac{k}{\sqrt{v_o^2 - 2kh}} \cdot \sqrt{v_o^2 - 2kh} = -k$$

El módulo de la aceleración en el punto M vale

$$a_T = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{10k}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{109}}{3}k$$

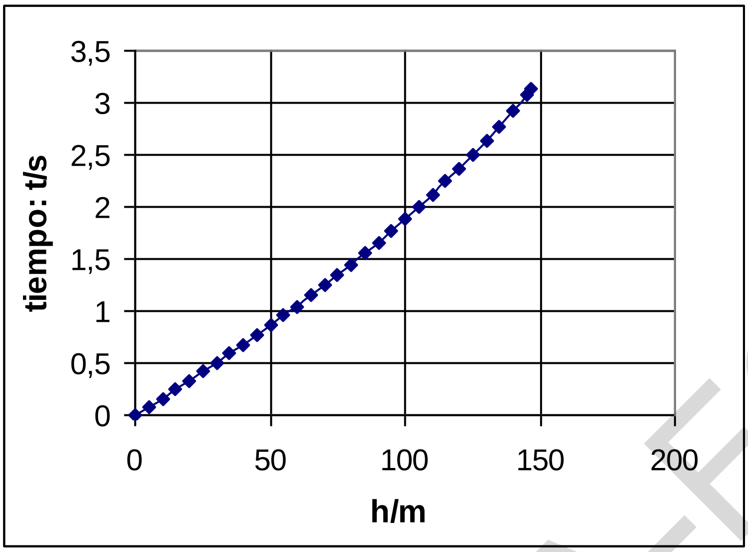
Velocidad frente a altura.

$$v = \sqrt{62{,}5^2 - 2 \cdot 10 \cdot h}$$



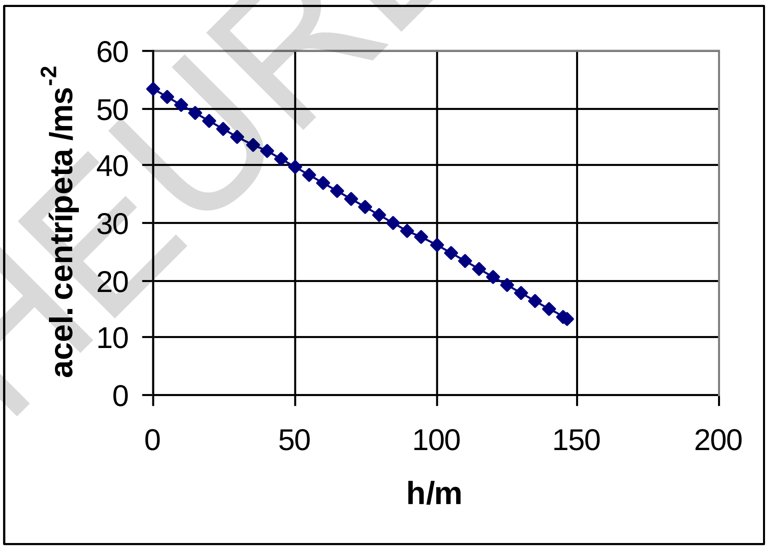
Tiempo frente a la altura

$$t = \frac{1}{10}\left[62{,}5 - \sqrt{62{,}5^2 - 2\cdot 10\cdot\cdot h}\right]$$

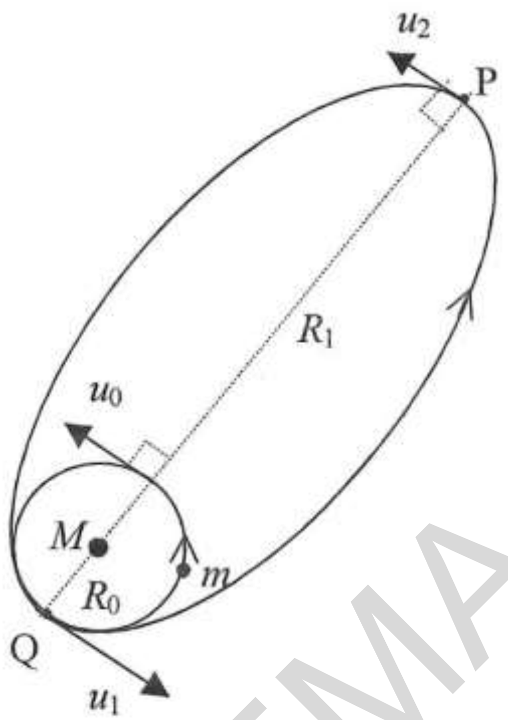


Aceleración centrípeta frente a la altura

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{v_o^2 - 2kh}{\frac{3v_o^2}{16k}} = \frac{160\cdot\left(62{,}5^2 - 2\cdot 10\cdot h\right)}{3\cdot 62{,}5^2}$$



170.-** (463) **En un futuro cercano nosotros mismos podríamos tomar pare en el lanzamiento de un satélite, el cual, desde el punto de vista físico, requiere solamente la utilización de una mecánica sencilla.



Propuesto en las Olimpiadas Asiáticas de Física

a) Un satélite de masa m describe una orbita circular de radio R_o alrededor de la Tierra, cuya masa designamos con M. Determinar la velocidad (u_o) del satélite en función de M, R_o y la constante de gravitación universal G.

La fuerza de atracción gravitatoria entre la Tierra y el satélite proporciona la fuerza centrípeta para que describa la órbita circular

$$m\frac{u_o^2}{R_o} = G\frac{Mm}{R_o^2} \Rightarrow u_o = \sqrt{\frac{GM}{R_o}} \quad (1)$$

b) Colocaremos el satélite en una trayectoria tal que alcance el punto P a una distancia R_1 del centro de la Tierra, para ello aumentaremos la velocidad del satélite de u_o a u_1 de forma casi instantánea en el punto Q de su trayectoria. Determinar el valor de u_1 en función de u_o, R_o y R_1.

Conservación del momento angular $m u_1 R_0 = m u_2 R_1 \quad \Rightarrow u_2 = \dfrac{u_1 R_o}{R_1}$

Conservación de la energía mecánica

$$\frac{1}{2} m u_1^2 - G\frac{M m}{R_o} = \frac{1}{2} m u_2^2 - G\frac{M m}{R_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}u_1^2 - G\frac{M}{R_o} = \frac{1}{2}u_2^2 - G\frac{M}{R_1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}u_2^2 = \frac{1}{2}u_1^2 - G\frac{M}{R_o} + G\frac{M}{R_1} \quad \Rightarrow \quad u_2^2 = u_1^2 - 2GM\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_o}\right)$$

Sustituimos u_2 y GM de la ecuación (1) en la última ecuación

$$u_1^2\left(\frac{R_0}{R_1}\right)^2 = u_1^2 - 2u_o^2 R_o \frac{R_1 - R_o}{R_1 R_o} \quad \Rightarrow \quad u_1^2\left[1 - \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^2\right] = 2u_o^2 \frac{R_1 - R_o}{R_1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad u_1^2 = \frac{2u_o^2 \dfrac{R_1 - R_o}{R_1}}{\dfrac{R_1^2 - R_o^2}{R_1^2}} = \frac{2u_o^2 R_1 \left(R_1 - R_o\right)}{\left(R_1 + R_o\right)\left(R_1 - R_o\right)} \quad \Rightarrow \quad u_1 = u_o\sqrt{\frac{2R_1}{R_1 + R_o}} \quad (2)$$

c) Deducir el valor mínimo de u_1 que permita al satélite alejarse de la influencia de la Tierra.

El satélite no estará influido por al Tierra cuando se encuentre a una distancia infinita. A esa distancia la energía potencial es cero y la cinética que posee el satélite también es cero porque u_1 es mínima

$$\frac{1}{2} m u_{1,m} - \frac{GMm}{R_o} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{1,m} = \sqrt{\frac{2GM}{R_o}}$$

Sustituyendo la ecuación (1)

$$u_{1,m} = \sqrt{2}\, u_o$$

d) Expresar la velocidad del satélite en P (u_2) en función de u_o, R_o y R_1.

En el apartado b) hemos deducido la siguiente ecuación: $u_2^2 = u_1^2 - 2GM\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_o}\right)$.

Sustituyendo la ecuación (2) y de la ecuación (1) resulta.

$$u_2^2 = u_1^2 - 2GM\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_o}\right) = u_o^2\,\frac{2R_1}{R_o + R_1} - 2u_o^2\,R_o\,\frac{R_o - R_1}{R_o R_1} \;\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_2^2 = 2u_o^2\left[\frac{R_1}{R_o + R_1} + \frac{R_1 - R_o}{2R_1}\right] = 2u_2^2\left[\frac{R_1^2 + (R_o + R_1)\cdot(R_1 - R_o)}{R_1(R_o + R_1)}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad u_2^2 = 2u_0^2\left[\frac{R_1^2 + \left(R_o^2 - R_1^2\right)}{R_1(R_o + R_1)}\right] \;\Rightarrow\; \quad u_2 = \frac{\sqrt{2}\;u_o\,R_o}{\sqrt{R_1(R_o + R_1)}} \;\;(3)$$

e) Ahora queremos cambiar la órbita del satélite desde el punto P a una órbita circular de radio R_1 aumentando su velocidad, de forma prácticamente instantánea, desde u_2 a u_3. Expresar u_3 en función de u_2, R_o y R_1.

Aplicamos la ecuación (1) a la órbita circular de radio R_1.

$$u_3 = \sqrt{\frac{GM}{R_1}} \quad (4)$$

Entre las ecuaciones (1) , (3) y (4) resulta.

$$u_2 = \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\dfrac{GM}{R_o}}\,R_o}{\sqrt{R_1(R_o + R_1)}} = \frac{\sqrt{2}\;u_3\sqrt{R_1 R_o}}{\sqrt{R_1(R_o + R_1)}} \Rightarrow \quad u_3 = u_2\sqrt{\frac{(R_o + R_1)}{2R_o}}$$

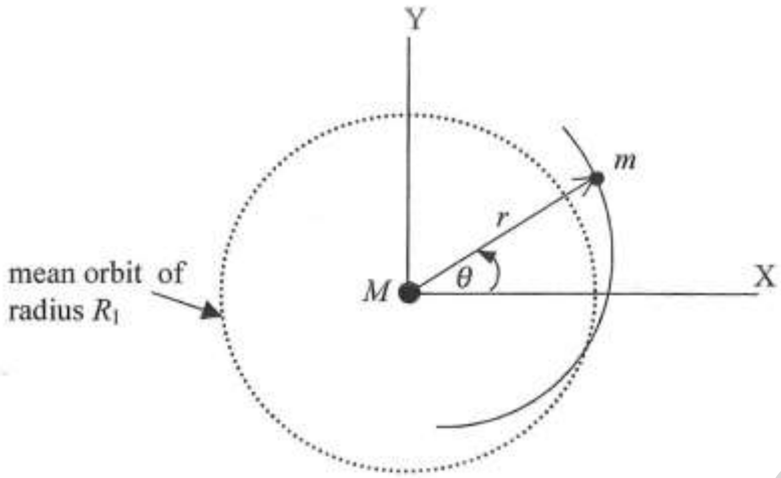
f) Si el satélite se le perturba en dirección radial de forma instantánea y ligera se desvía de su órbita circular de radio R_1 a una orbita perturbada. Calcular el periodo de las pequeñas oscilaciones radiales del planeta.

Ayuda. ***Los estudiantes si lo necesitan pueden hacer uso de la ecuación del movimiento del satélite en su órbita***

$$m\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 r\right] = -\frac{G\,M\,m}{r^2}$$

y de la conservación del momento angular

$$m\,r^2\,\frac{d\theta}{dt} = Cte$$



Cuando el satélite describe una orbita circular de radio R_1 su distancia a la Tierra, a M en la figura superior, es siempre la misma. Cuando se le perturba de forma radial y ligera se le separa de esa órbita circular con lo que el satélite varía de forma armónica su distancia a M, esto significa que en un punto de la orbita se separa de M una distancia $R_1+\delta$.($\delta<<R_1$) y en otro opuesto se acerca a una distancia $R_1-\delta$ y existen otros dos puntos opuestos en que su distancia es R_1. La órbita es una elipse de excentricidad muy pequeña que se puede asimilar a una circunferencia con M ligeramente desplazado de su posición cuando la órbita es circular. Dado que la órbita perturbada es cerrada el impulso inicial es ligero para que energía total del sistema siga siendo negativa.

Recordemos que en el movimiento vibratorio armónico es conservativo

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = E \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\,x^2 = E\,(1)$$

Cuando tratamos de una fuerza central la conservación de la energía es:

$$\frac{1}{2}m\left(v_r^2 + v_\theta^2\right) + U(r) = E$$

La conservación del momento angular: $m\,r\,v_\theta = l$

Combinando estas dos ecuaciones

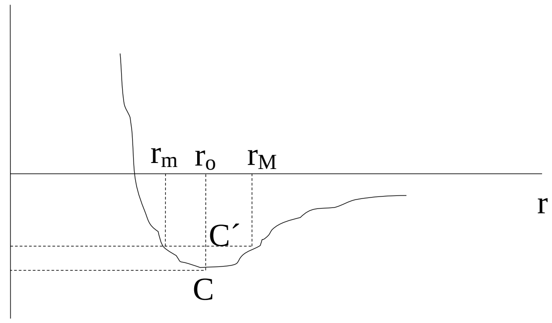
$$\frac{1}{2}m\,v_r^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{l}{m\,r}\right)^2 + U(r) = E \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}m\,v_r^2 + \frac{l^2}{2\,m\,r^2} + U(r) = E \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{2}m\,v_r^2 + U'(r) = E \quad (2), \quad \text{siendo} \;\; U'(r) = \frac{l^2}{2\,m\,r^2} + U(r)$$

La energía potencial en (2) se denomina energía potencial equivalente. Si la fuerza central varía con el inverso del cuadrado de la distancia, la energía potencial equivalente es:

$$U´(r)=\frac{l^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r}$$

La representación de U´(r) frente a r para un valor determinado de l es una curva semejante a la siguiente



En el problema que nos ocupa $r_o = R_1$ la orbita es circular. El satélite está en la posición C. Cuando al satélite se le da un impuso radial instantáneo pasamos a C´ donde la energía es algo mayor que en C y hay dos distancias a la masa M una mayor y otra menor.. El satélite se mueve en una órbita perturbada y su distancia varía a M de forma armónica.

En un movimiento armónico simple podemos calcular k a partir de la energía potencial

$$U=\frac{1}{2}kr^2 \Rightarrow \frac{dU}{dr}=kr \Rightarrow \frac{d^2U}{dr^2}=k$$

Para hallar la constante armónica del movimiento del satélite derivamos la energía potencial efectiva

$$\frac{dU´}{dr}=\frac{l^2}{2m}\frac{-2r}{r^4}-GMm\frac{-1}{r^2}=-\frac{l^2}{mr^3}+\frac{GMm}{r^2} \quad \Rightarrow$$

$$k=\frac{d^2U´}{dr^2}=\frac{l^2 3r^2}{mr^6}-\frac{GMm\cdot 2r}{r^4}=\frac{3l^2}{mr^4}-\frac{2GMm}{r^3}$$

Si r = ro

$$k=\frac{3l^2}{mr_o^4}-\frac{2GMm}{r_o^3} \quad (5)$$

En la órbita circular, a la que corresponde el punto C, de la figura la energía es un mínimo y por ello

$$\left(\frac{dU´}{dr}\right)_{r=r_o}=0=-\frac{l^2}{mr_o^3}+\frac{GMm}{r_o^2} \quad \Rightarrow \quad l^2=GMm^2r_o$$

Sustituyendo en la ecuación (5)

$$k=\frac{3GMm^2r_o}{mr_o^4}-\frac{2GMm}{r_o^3}=\frac{GMm}{r_o^3}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{GMm}{r_o^3}}}=2\pi\sqrt{\frac{r_o^3}{GM}}\quad T=2\pi\sqrt{\frac{R_1^3}{GM}}$$

Calculamos el periodo del satélite cuando describe una órbita circular de radio $R_{1.}$

$$\frac{mv^2}{R_1}=\frac{GMm}{R_1^2}\Rightarrow\quad v=\sqrt{\frac{GM}{R_1}}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ T'=\frac{2\pi R_1}{v}=\frac{2\pi R_1}{\sqrt{\frac{GM}{R_1}}}=2\pi\sqrt{\frac{R_1^3}{GM}}$$

Resulta que T = T´.

Otra forma de resolver esta cuestión es hacer uso de la ecuación proporcionada en la ayuda

$$F_r=m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2r\right]=-\frac{GMm}{r^2}\Rightarrow\quad\frac{d^2r}{dt^2}-\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2r=-\frac{GM}{r^2}\qquad(6)$$

Se sustituye la ecuación del momento angular $mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)=Cte$

Elegimos para la constante cuando el satélite se encuentra a una distancia R_1 de la masa M

$$mR_1v=Cte\ \Rightarrow\ \frac{mv^2}{R_1}=\frac{GMm}{R_1^2}\Rightarrow\quad v=\sqrt{\frac{GM}{R_1}}\Rightarrow\quad Cte=mR_1\sqrt{\frac{GM}{R_1}}=m\sqrt{GMR_1}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)=m\sqrt{GMR_1}\quad\Rightarrow\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{GMR_1}{r^4}$$

Sustituyendo en (6)

$$\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{GMR_1}{r^4}r=-\frac{GM}{r^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{d^2r}{dt^2}=GM\left(\frac{R_1}{r^3}-\frac{1}{r^2}\right)=GM\left(\frac{R_1-r}{r^3}\right)$$

Cuando el satélite sufre el empuje radial su distancia a M es

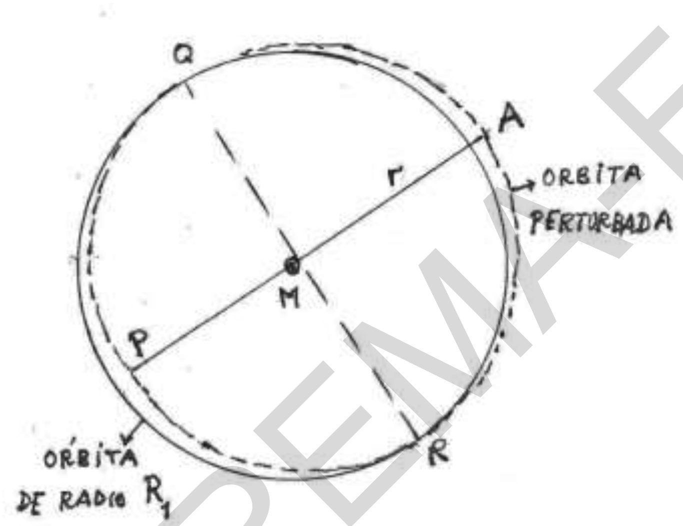
$$r=R_1+\varepsilon\quad\text{siendo}\quad r<<R_1\quad\Rightarrow\qquad dr=d\varepsilon$$

Sustituyendo en la ecuación anterior

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = GM\left[\frac{R_1-(R_1+\varepsilon)}{(R_1+\varepsilon)^3}\right] \approx -\frac{GM}{R_1^3}\varepsilon \Rightarrow m\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -\frac{GMm}{R_1^3}\varepsilon = -k\varepsilon$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{GMm}{R_1^3}}} \Rightarrow \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{R_1^3}{GM}}$$

g) Haga un boceto de la órbita perturbada junto con la no perturbada, esto es, con la circular.



Si consideramos que el tiempo t=0 , corresponde al `punto A (apogeo), punto más lejano del satélite de la Tierra., cuando transcurre un cuarto de T el satélite está en Q a una distancia R_1 de la Tierra, cuando t=T/2 el satélite esta en P, punto más cercano (perigeo) a la Tierra y cuando t= ¾ T en R, otra vez a una distancia R_1 de la Tierra y cuando t=T el satélite vuelve a A. Esto es así indefinidamente puesto que el periodo de vibración de r es el mismo que el de traslación en la órbita y ello se debe a que el impulso comunicado al satélite es pequeño y la curva en C se puede asimilar a una parábola..

Si el impulso recibido fuese mayor pudiera dar lugar a órbitas cerradas notablemente achatadas en donde la distancia MA es bastante mayor que la MP.