181.- (485) ***Un cuerpo de masa m= 1 kg se lanza, en un medio viscoso, verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_o= = 10 m/s. La fuerza que el medio viscoso opone al cuerpo es directamente proporcional al valor de su velocidad, siendo la constante de proporcionalidad k =1.***

a) Determinar el tiempo que emplea el cuerpo en subir a su máxima altura y el valor de esta altura.

b) Calcular el tiempo que emplea el cuerpo en volver a su posición inicial y su velocidad en ese instante.

Se prescinde del empuje del fluido sobre el cuerpo

a) En su movimiento ascendente el cuerpo está sometido a dos aceleraciones, una la de la gravedad g en sentido vertical descendente y la aceleración debida a la fuerza que el medio viscoso opone al avance del cuerpo

$$F_R = m\,a_v = kv \quad \Rightarrow \quad a_v = \frac{k}{m}v$$

Esta aceleración tiene sentido vertical descendente

$$a = -g - a_v = -g - \frac{k}{m}v = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow -\int \frac{dv}{g+\frac{k}{m}v} = \int dt$$

Para resolver la primera integral hacemos el cambio de variable

$$g + \frac{k}{m}v = P \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{m}dv = dP \Rightarrow \quad dv = \frac{m}{k}dP \;\Rightarrow \quad \int \frac{\frac{m}{k}dP}{P} = \frac{m}{k}\ln P = \frac{m}{k}\ln\left(g + \frac{k}{m}v\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{m}{k}\ln\left(g+\frac{k}{m}v\right) = t + Cte$$

Cuando t es cero la velocidad v es la velocidad inicial v_o

$$-\frac{m}{k}\ln\left(g+\frac{k}{m}v_o\right) = Cte \quad \Rightarrow \quad -\frac{m}{k}\ln\left(g+\frac{k}{m}v\right) = t - \frac{m}{k}\ln\left(g+\frac{k}{m}v_o\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{m}{k}\ln\frac{g+\frac{k}{m}v_o}{g+\frac{k}{m}v} \quad (1)$$

Cuando transcurre el tiempo de subida la velocidad del cuerpo se ha anulado, por consiguiente

$$t_S = \frac{m}{k}\ln\frac{g+\frac{k}{m}v_o}{g} = \ln\frac{g+v_o}{g} = \ln\frac{9{,}8+10}{9{,}8} = 0{,}70 \text{ s}$$

Volviendo a la ecuación (1)

$$\frac{k\,t}{m} = \ln\frac{g+\frac{k}{m}v_o}{g+\frac{k}{m}v} \quad\Rightarrow\quad e^{\frac{k\,t}{m}} = \frac{g+\frac{k}{m}v_o}{g+\frac{k}{m}v} \quad\Rightarrow\quad g+\frac{k}{m}v = \frac{g+\frac{k}{m}v_o}{e^{\frac{k\,t}{m}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{m}{k}\left(g+\frac{k}{m}v_o\right)e^{-\frac{k\,t}{m}} - g\frac{m}{k} \;..\Rightarrow\quad \frac{dh}{dt} = \left(g+v_o\right)e^{-t} - g$$

$$\Rightarrow\quad \int dh = \left(g+v_o\right)\int e^{-t}dt - \int g\,dt \Rightarrow\quad h = (g+v_o)\left(-e^{-t}\right) - gt + Cte$$

Cuando t=0, h =0 ; $0 = (g+v_9)(-1) + Cte \;\Rightarrow\; Cte = \left(g+v_o\right)$

$$h = \left(g+v_o\right)\left(-e^{-t}\right) - g\,t + \left(g+v_o\right) = \left(g+v_o\right)\left(e^{-t}-1\right) - g\,t$$

Sustituimos el tiempo de subida y así calculamos la altura que alcanza el cuerpo

$$H = 19{,}8\left(e^{-0{,}70}-1\right) - 9{,}8\cdot 0{,}70 = 2{,}97\,m$$

En el movimiento de descenso desde la altura de 2,97 metros sobre el cuerpo actúan la fuerza de la gravedad vertical y hacia abajo y la fuerza que ejerce el medio viscoso que actúa en dirección vertical y hacia arriba. Consideramos como positiva la dirección vertical de arriba hacia abajo, por tanto, la aceleración del cuerpo es

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v \quad\Rightarrow\; \int\frac{dv}{g-\frac{k}{m}v} = \int dt$$

Esta integral se resuelve siguiendo el procedimiento anterior

$$P = g - \frac{k}{m}v \;\Rightarrow\; dP = -\frac{k}{m}dv \;\Rightarrow\; dv = -\frac{m}{k}dP \;\Rightarrow -\int\frac{m\,dP}{k\,P} = \int dt \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{m}{k}\ln P = t + Cte \;\Rightarrow -\frac{m}{k}\ln\left(g-\frac{k}{m}v\right) = t + Cte$$

Cuando t =0 , la velocidad es nula , por consiguiente, $Cte = -\frac{m}{k}\ln g$

$$-\ln\left(g-\frac{k}{m}v\right) = t - \ln g \;\Rightarrow\quad t = \ln\frac{g}{g-\frac{k}{m}v} = \ln\frac{g}{g-v} \;\Rightarrow \frac{g}{g-v} = e^{t} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g}{e^{t}} = g - v \;\Rightarrow\; v = g - \frac{g}{e^{t}} = \frac{dh}{dt} \;\Rightarrow\; \int g\,dt - \int\frac{g\,dt}{e^{t}} = \int dh \;\Rightarrow\; h = g\,t - g\left(-e^{-t}\right) + Cte$$

Cuando t=0, la velocidad es cero y su altura cero ya que el origen se ha tomado a la altura de 2,97 m del suelo.

$$0 = 0 + \frac{g}{e^{o}} + Cte \Rightarrow Cte = -g$$

$$h = g\left(t + e^{-t} - 1\right) \Rightarrow 2{,}97 = 9{,}8\left(t_B + e^{-t_B} - 1\right)$$

La ecuación anterior la resolvemos por tanteo

$$1{,}303 = t_B + e^{-t_B}$$

Para $t_B = 0{,}90$ $\quad 1{,}303<1{,}307$ $\quad$ Para $t_B = 0{,}88$ $\quad 1{,}303> 1{,}295$

Tomamos como solución $t_B = 0{,}89$ s

Para calcular la velocidad sustituimos t_B en la ecuación de la velocidad

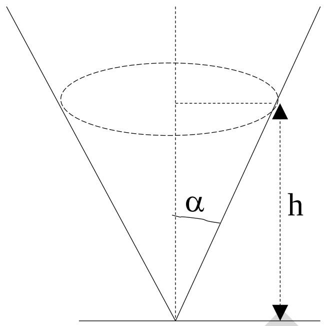
$$v = g - \frac{g}{e^{t_B}} = 9{,}8 - \frac{9{,}8}{e^{0{,}89}} = 5{,}8 \ \frac{m}{s}$$

Aparentemente parece que la ecuación anterior no es homogénea, esto no es así, porque existe un factor k/m de dimensiones s^{-1} que es igual a la unidad en este problema.

182.- (490) ***Una partícula de masa m describe una circunferencia a lo largo de la pared de un cono de ángulo α tal como se observa en la figura. El plano que contiene a la circunferencia es paralelo al suelo y está a una altura h sobre él. El momento angular de la partícula se designa por L.***

a) Encontrar el valor de h en función de L, m , g y α.

b) Calcular la energía mecánica de la partícula en función de h, Tomar como referente de energía potencial nula el suelo



a) Sobre la partícula de masa m actúan dos fuerzas: el peso mg perpendicular al suelo y N perpendicular a la pared del cono.(Fig.1).

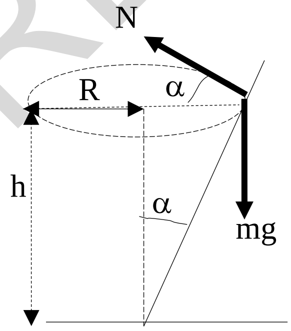


Fig.1

La componente horizontal de N es la fuerza centrípeta que la partícula necesita para describir la circunferencia y la componente vertical y dirigida hacia arriba es igual al peso de la partícula y por ello ésta se mantiene en el plano horizontal.

$$N\cos\alpha = \frac{m\,v^2}{R} \quad ; \quad N\,\text{sen}\alpha = mg \quad (1)$$

El módulo del momento angular L de la partícula es L= mvR, siendo v la velocidad de rotación..

Dividiendo entre sí las ecuaciones de (1)

$$\operatorname{tag}\alpha = \frac{g\,R}{v^2} \;\Rightarrow\; v = \frac{L}{mR} \;\Rightarrow\; \operatorname{tag}\alpha = \frac{g\,R\cdot m^2 R^2}{L^2} \;\Rightarrow\; R^3 = \frac{\operatorname{tag}\alpha\,L^2}{m^2\,g} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tag}\alpha = \frac{R}{h} \;\Rightarrow\; h^3\left(\operatorname{tag}\alpha\right)^3 = \frac{\operatorname{tag}\alpha\,L^2}{m^2\,g} \;\Rightarrow\; h = \sqrt[3]{\frac{L^2}{m^2 g\left(\operatorname{tag}\alpha\right)^2}}$$

b) $E_m = m\,g\,h + \frac{1}{2}m\,v^2 = m\,g\,h + \frac{1}{2}m\frac{g\,R}{\operatorname{tag}\alpha} = m\,g\,h + \frac{1}{2}m\frac{g}{\operatorname{tag}\alpha}h\operatorname{tag}\alpha = \frac{3}{2}m\,g\,h$

183.- (491) ***Un punto está obligado a moverse por la rama positiva de la cúbica $x=y^3/3$ y su movimiento vertical viene dado por $y=t^2/4$ donde x e y se miden en centímetros y t en segundos. Determinar la velocidad y aceleración del punto para t= 2 s.***

Propuesto en el libro Mecánica de J.L.Meriam

La coordenada y nos la dan en función del tiempo y la coordenada x se puede poner en función del tiempo

$$x = \frac{y^3}{3} = \frac{\left(\frac{t^2}{4}\right)^3}{3} = \frac{t^6}{192}$$

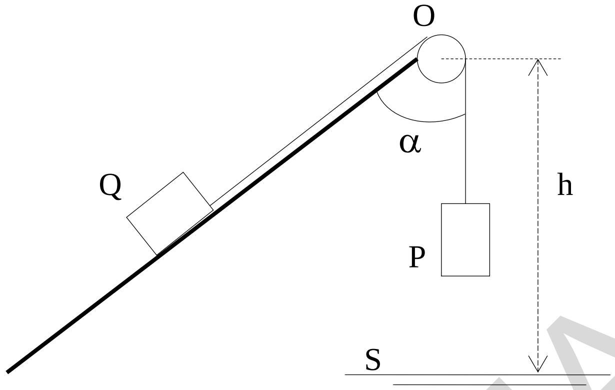
$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{4}\right) = \frac{t}{2} \quad ; \quad v_y = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^6}{192}\right) = \frac{6t^5}{192} = \frac{t^5}{32} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\frac{t^2}{4} + \frac{t^{10}}{1024}} \quad ; \quad v(2s) = \sqrt{\frac{4}{4} + \frac{2^{10}}{1024}} = \sqrt{2}\ \frac{cm}{s}$$

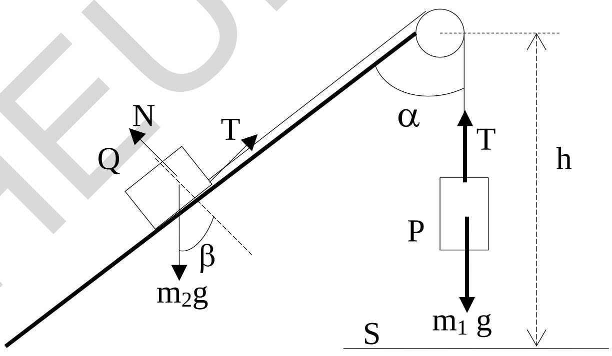
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad ; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^5}{32}\right) = \frac{5t^4}{32} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{1024}t^8} \quad ; \quad a(2s) = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25\cdot 2^8}{1024}} = \sqrt{6.5} = \frac{\sqrt{26}}{2}\ \frac{cm}{s^2}$$

184.- (492) ***En el dispositivo de la figura se supone que no hay rozamientos y la polea carece de masa. La masa de P es m_1; e inicialmente está en lo alto (punto O) sin velocidad inicial. La masa de Q es m_2 y la longitud de la cuerda es L y carece de masa. La masa P se deja en libertad y recorre la distancia h y ahí se detiene de forma prácticamente instantánea y a partir de ese instante la masa Q sigue desplazándose hacia arriba y al llegar a O su velocidad es nula. Se pide el valor de h, expresándolo en función de las masas, del ángulo α y la longitud de la cuerda.***



Cuando la masa P recorre la distancia h está ligada a la masa Q que se mueve hacia arriba del plano inclinado y ambas llevan ka misma velocidad durante ese trayecto. Pero al llegar P a S y pararse, la cuerda se afloja y la masa Q queda desligada de P y se desliza hacia arriba del plano hasta llegar a O sin velocidad inicial.
Analizamos el movimiento de las dos masas cuando aún están ligadas.



Las fuerzas que actúan sobre P son su peso m_1g y la tensión T de la cuerda y sobre Q su peso m_2g, la tensión de la cuerda y la fuerza N con que el plano empuja al cuerpo Aplicamos a cada masa la segunda ley de Newton

$$m_1g - T = m_1a \quad ; \quad T - m_2g\,\text{sen}\beta = m_2a \quad \Rightarrow \quad T - m_2g\cos\alpha = m_2a$$

A partir de las dos ecuaciones eliminamos T y tenemos en cuenta que los ángulos α y β son complementarios.

$$T = m_1 g - m_1 a \;\; ; \;\; T = m_2 a + m_2 g \;\cos\alpha \;\Rightarrow\; m_1 g - m_1 a = m_2 a + m_2 g \;\cos\alpha \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\; a\left(m_1 + m_2\right) = g\left(m_1 - m_2\cos\alpha\right) \;\Rightarrow\; a = g\,\frac{m_1 - m_2\cos\alpha}{m_1 + m_2} = g\,P$$

Por comodidad en el cálculo hemos hecho $P = \dfrac{m_1 - m_2\cos\alpha}{m_1 + m_2}$.Para que haya movimiento descendiente de P se debe cumplir que $m_1 > m_2\cos\alpha$

Las ecuaciones cinemáticas de la masa P son.

$$h = \frac{1}{2}a\,t^2 \qquad v = a\,t \;\Rightarrow\; v = a\sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{2ha} = \sqrt{2hgP}$$

Esta velocidad de P es la misma que tiene Q y dado que a partir de este instante la masa Q está desligada de P, seguirá un movimiento retardado ascendente por el plano con una aceleración constante $a_Q = -g\,\mathrm{sen}\beta = -g\cos\alpha$ y una velocidad inicial . $v_o = \sqrt{2hgP}$.
La longitud que recorre Q hasta llegar a lo alto del plano inclinado es L-h y las ecuaciones de su movimiento son.:

$$L - h = \sqrt{2hgP}\,t - \frac{1}{2}g\cos\alpha\,t^2 \;\; ; \;\; v_f = 0 = \sqrt{2hgP} - g\left(\cos\alpha\right)t$$

Despejando t en la segunda ecuación y sustituyéndolo en la primera

$$L - h = \sqrt{2hgP}\cdot\frac{\sqrt{2hgP}}{g\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\cos\alpha\left(\frac{\sqrt{2hgP}}{g\cos\alpha}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{2hgP}{g\cos\alpha} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\; h = L - \frac{hgP}{g\cos\alpha} \;\Rightarrow\; hg\cos\alpha = Lg\cos\alpha - hgP \;\Rightarrow h\left(\cos\alpha + P\right) = L\cos\alpha \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{L\cos\alpha}{\cos\alpha + P} = \frac{L\cos\alpha}{\cos\alpha + \dfrac{m_1 - m_2\cos\alpha}{m_1 + m_2}} = \frac{L\cos\alpha\;\left(m_1 + m_2\right)}{m_1\left(1 + \cos\alpha\right)} = \frac{L\cos\alpha\left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right)}{1 + \cos\alpha}$$

185.*- (493).- *Una partícula de masa m se desplaza siguiendo una recta partiendo del reposo en t=0 bajo la acción de una fuerza

$$F_1 = \frac{F_o\, t}{t_o} \;;\; F_o \text{ y } t_o \text{ son constantes}$$

En t=to se anula bruscamente esa fuerza y empieza a actuar una nueva

$$F_2 = -F_o\left[\frac{(t-t_o)^2}{t_o^2}\right]$$

¿Dónde y cuándo la partícula empezará a volver al origen?

Propuesto en el libro: Introducción al estudio de la mecánica, materia y ondas. U. Ingard y W.L. Kraushaar. Editorial Reverté.

En la primera parte del problema calculamos la velocidad y desplazamiento de la masa m desde t=0 a t =t_o . Según la segunda ley de Newton

$$F_1 = \frac{F_o t}{t_o} = m\frac{dv}{dt} \quad ; \quad \int \frac{F_o t}{m\, t_o} = \int dv \quad \Rightarrow \quad \frac{F_o t^2}{2m\, t_o} = v + Cte$$

Cuando t=0 la velocidad es cero y por consiguiente, Cte =0

El desplazamiento de la masa m es:

$$\frac{F_o t^2}{2m\, t_o} = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{F_o t^2}{2m\, t_o} dt = \int dx \quad \Rightarrow \quad \frac{F_o t^3}{6m\, t_o} = x + Cte$$

Cuando t=0 la posición es cero y por consiguiente, Cte =0.

La velocidad y la posición de la partícula cuando t = t_o, esto es, cuando desaparece F_1 y aparece F_2

$$v(t_o) = \frac{F_o t_o^2}{2m\, t_o} = \frac{F_o t_o}{2m} \quad ; \quad x(t_o) = \frac{F_o\, t_o^3}{6m\, t_o} = \frac{F_o\, t_o^2}{6m}$$

En la segunda parte ha cesado F_1 y ha aparecido la fuerza F_2 . Aplicamos la segunda ley de Newton

$$F_2 = -\frac{F_o}{t_o^2}(t-t_o)^2 = m\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad -\frac{F_o}{m t_o^2}\int (t-t_o)^2 dt = \int dv \quad \Rightarrow \quad -\frac{F_o}{m t_o^2}\frac{(t-t_o)^3}{3} = v + Cte$$

Cuando t=t_o , la velocidad de la masa m es: $v(t_o) = \frac{F_o\, t_o}{2\, m}$ y por consiguiente la constante vale $\quad Cte = -\dfrac{F_o\, t_o}{2m}$

La velocidad de la masa m es:

$$v = \frac{F_o\, t_o}{2m} - \frac{F_o}{m\,t_o^2}\frac{(t-t_o)^3}{3}$$

El punto de vuelta ocurrirá cuando v=0, a partir de ahí la velocidad es negativa.

$$0 = \frac{F_o t_o}{2m} - \frac{F_o}{m\,t_o^2}\frac{\left(t-t_o\right)^3}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{t_o}{2} = \frac{\left(t-t_o\right)^3}{3t_o^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}t_o^3 = \left(t-t_o\right)^3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} t_o = t - t_o \quad \Rightarrow \qquad t = t_o\left[1+\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right] = t_o\left(1+k\right)$$

Calculamos la posición de m cuando su velocidad se ha anulado

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_o t_o}{2m} - \frac{F_o}{m\,t_o^2}\frac{\left(t-t_o\right)^3}{3} \quad \Rightarrow \int dx = \int\left[\frac{F_o t_o}{2m} - \frac{F_o}{m\,t_o^2}\frac{\left(t-t_o\right)^3}{3}\right]dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{F_o t_o}{2m}t - \frac{F_o}{m\,t_o^2}\frac{\left(t-t_o\right)^4}{12} + Cte$$

Cuando $t=t_o$, x vale $\; x(t_o) = \dfrac{F_o\, t_o^2}{6m}$, luego $\; Cte = \dfrac{F_o t_o^2}{6m} - \dfrac{F_o t_o^2}{2m} = -\dfrac{F_o t_o^2}{3m}$

$$x = \frac{F_o t_o}{2m}t - \frac{F_o}{t_o^2}\frac{\left(t-t_o\right)^4}{12m} - \frac{F_o t_o^2}{3m}$$

Sustituimos la variable t por el tiempo $\; t = t_o\left(1+k\right)$

$$x\left(t_o\right) = \frac{F_o t_o}{2m}\left[t_o\left(1+k\right)\right] - \frac{F_o}{t_o^2}\frac{\left(t_o + t_o k - t_o\right)^4}{12m} - \frac{F_o t_o^2}{3m} = \frac{F_o t_o^2}{2m} + \frac{F_o t_o^2}{2m}k - \frac{F_o t_o^2}{12\,m}k^4 - \frac{F_o t_o^2}{3m}$$

$$x\left(t_o\right) = \frac{F_o t_o^2}{6m} + \frac{F_o t_o^2}{2m}k\left(1 - \frac{k^3}{6}\right)$$

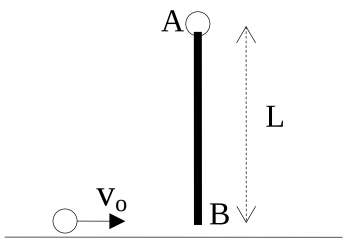
$$\text{como } \left(1-\frac{k^3}{6}\right)=\left[1-\frac{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^3}{6}\right]=1-\frac{3}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

Resulta

$$x(t_o)=\frac{F_o t_o^2}{6m}+\frac{F_o t_o^2}{2m}k\frac{3}{4}=\frac{F_o t_o^2}{6m}+\frac{F_o t_o^2}{2m}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{3}{4}=\frac{F_o t_o^2}{2m}\left[\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

186.- (498).-***Una esfera de m= 1,5 kg se desplaza con velocidad horizontal v_o=4 m/s y choca con el extremo inferior B de una barra AB delgada de L=1,8 m de longitud y masa M= 6 kg. La barra se encuentra suspendida por A y antes del choque se encuentra en reposo. El coeficiente de restitución entre la barra y la esfera es 0,7 . Determinar la velocidad angular de la barra y la velocidad lineal de la esfera inmediatamente después del choque.***

Momento de inercia de la barra respecto del CM: $I_{CM} = \frac{ML^2}{12}$



Consideramos a la barra y a la esfera como un único sistema. Durante el impacto aparecen en la articulación una fuerza de reacción y el peso de la barra.. Los momentos iniciales más los impulsos de las fuerzas respecto de A equivalen a los momentos lineales finales.

Designamos con v_{CM} la velocidad del centro de masas de la barra y con ω la velocidad angular antes del choque. Ambas magnitudes son nulas puesto que la barra se encuentra en reposo. Con v´ la velocidad del centro de masas de la barra inmediatamente después del choque con ω´ la velocidad angular de la barra inmediatamente después del choque y con v'_e la velocidad de la esfera inmediatamente después del choque

Momentos iniciales (antes del choque) $m v_0 L + 0$

Momentos inmediatos después del choque $m v'_e L + M v' \frac{L}{2} + I_A \omega'$

I_A es el momento de inercia de la barra respecto de A y según el teorema de Steiner

$$I_A = I_{CM} + M \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} M L^2 + \frac{M L^2}{4} = \frac{M L^2}{3}$$

Como la barra está articulada en el extremo A **,** $v' = \omega' \frac{L}{2}$

$$m v_o L = m v_e' L + M\ \omega' \frac{L}{2}\cdot\frac{L}{2} + \frac{M L^2}{3}\omega' \Rightarrow m v_o = m v_e' + M\ \omega' \frac{L}{4}\cdot + \frac{M L}{3}\omega' \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}5 \cdot 4 = 1{,}5 v_e' + 6\cdot\omega'\cdot\frac{1{,}8}{4} + 6\cdot\frac{1{,}8}{3}\cdot\omega' \quad \Rightarrow \quad 6 = 1{,}5 v_e' + 6{,}3\omega' \quad (1)$$

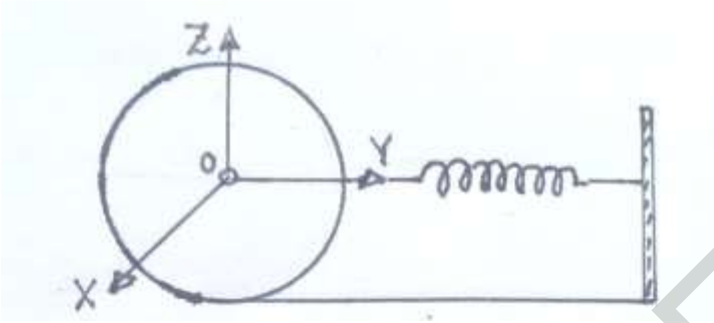
Aplicamos el coeficiente de restitución

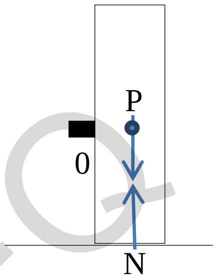
$$v_B' - v_e' = e(v_o - v_B) \Rightarrow v_B' - v_e' = 0{,}7\cdot 4 - 0{,}7\cdot 0$$

Además como la barra sigue articulada en A, $v_B' = \omega' L = 1{,}8\omega' \Rightarrow v_e'' = 1{,}8\omega' - 2{,}8$
Sustituyendo en (1)

$$6 = 1{,}5\ (1{,}8\omega' - 2{,}8) + 6{,}3\omega' \quad \Rightarrow \quad \omega' = 1{,}13\ \frac{rad}{s} \Rightarrow \quad v_e' = 1{,}8\cdot 1{,}13 - 2{,}8 = -0{,}77\frac{m}{s}$$

187.-(499).-***Un cilindro de masa m y radio R está unido a un muelle de constante elástica k y apoyado sobre un suelo horizontal, tal como se observa en la figura inferior. El muelle no está deformado, esto es, tiene su longitud natural, ni comprimido ni estirado. Si se comprime el muelle mediante el giro del cilindro, éste rueda sin deslizar sobre el suelo, determinar la frecuencia angular del movimiento.***





En la figura 1 se han representado unos ejes coordenados fijos, ligados a tierra. A la derecha una vista frontal del cilindro con su centro 0, donde se engancha el muelle.

En la figura 1 se han representado unos ejes coordenados ligados a tierra ,.

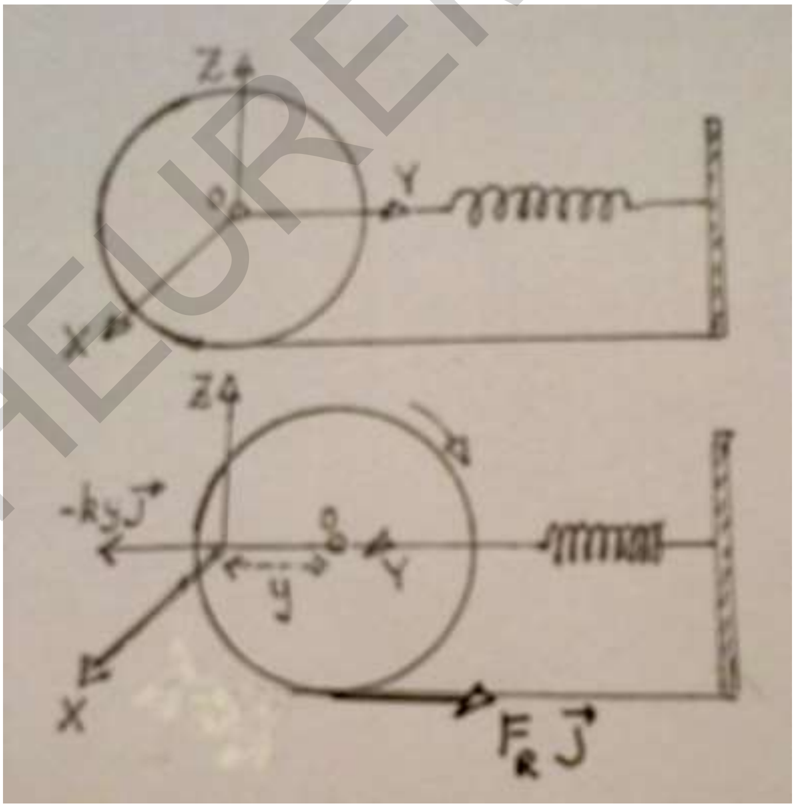


Fig.1

El cilindro efectúa un movimiento armónico siendo el origen de los desplazamientos la representación superior de la figura1. Un tiempo después el centro de masas del cilindro se dirige hacia la derecha, con la finalidad de comprimir al máximo el muelle. En la posición indicada en la representación inferior, el cilindro tiene energía cinética de traslación de rotación y potencial elástica. Al dirigirse hacia la derecha la energía cinética de traslación y la de rotación se van transformando en energía potencial elástica..
Sobre el cilindro aparece una fuerza aplicada en su centro de masas que hace disminuir la velocidad de traslación y una fuerza de rozamiento, la cual crea un momento, que hace disminuir la velocidad de rotación
.En dirección vertical existen dos fuerzas: el peso y la fuerza con que el suelo empuja al cilindro. Estas dos fuerzas suman cero ya que no hay desplazamiento en dirección vertical. y no están representadas en la figura.

Las ecuaciones vectoriales del movimiento del cilindro son:

$$ky(-\vec{j}) + Fr\,\vec{j} = m\vec{a}; \;\; ; \quad \vec{M} = R(-\vec{k}) \times Fr\,\vec{j} = -I\vec{\alpha} \quad ; \quad \vec{a} = \vec{\alpha} \times R(-\vec{k})$$

Despejamos $\vec{a}$ de la primera ecuación y $\vec{\alpha}$ de la segunda y sustituimos ambas en la tercera

$$\frac{-ky + F_r}{m}\vec{j} = -\frac{R(-\vec{k}) \times F_r\left(\vec{j}\right)}{I} \times R(-\vec{k})$$

El producto vectorial $(-\vec{k}) \times \vec{j} = \vec{i} \;\; \Rightarrow \quad \frac{-ky + F_r}{m}\vec{j} = -\frac{R\,F_r\;\vec{i}}{I} \times R(-\vec{k}) \Rightarrow$

El producto vectorial $\vec{i} \times (-\vec{k}) = \vec{j}$

El momento de inercia del cilindro es $I = \frac{1}{2} m R^2$

$$\frac{-ky + F_r}{m}\vec{j} = -\frac{F_r\;R^2}{\frac{1}{2}mR^2}\vec{j} \;\; \Rightarrow \quad -ky + F_r = -2F_r \quad \Rightarrow \quad F_r = \frac{k\,y}{3}$$

Según al ecuación de la aceleración

$$-k\,y + F_r = m\frac{d^2y}{dt^2} \;\; \Rightarrow \quad -ky + \frac{ky}{3} = m\frac{d^2y}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2k}{3m}y \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}} \;\; \frac{rad}{s}$$

También se pueden plantear a las ecuaciones de la siguiente manera

$$ky(-\vec{j}) + Fr\,\vec{j} = m\vec{a}_{CM} \quad ; \quad R(-\vec{k}) \times Fr\,\vec{j} = I\vec{\alpha} \quad ; \quad \vec{a}_T = \vec{\alpha} \times R(-\vec{k})$$

Por rodar $\vec{a}_T + \vec{a}_{CM} = 0$, para el punto de contacto con el suelo,

$$\vec{a}_{CM} = -\vec{a}_{T} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{CM} = -\vec{\alpha}\times R(-\vec{k}) = \vec{\alpha}\times R\,\vec{k}$$

Despejando $\vec{a}_{CM}$ de la primera ecuación y $\vec{\alpha}$ de la segunda resulta:

$$\frac{-ky+F_R}{m}\vec{j} = \frac{R(-\vec{k})\times F_R\,\vec{j}}{I}\times R\,\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{-ky+F_R}{m}\vec{j} = \frac{R\,F_R\,\vec{i}}{I}\times R\,\vec{k} = -\frac{R^2\,F_R}{I}\vec{j} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-ky+F_R}{m} = -\frac{R^2\,F_R}{\frac{1}{2}mR^2} \quad \Rightarrow \quad -ky+F_r = -2F_r \quad \Rightarrow \quad F_r = \frac{k\,y}{3}$$

Otra forma de resolver este problema es hacer uso de que el sistema es conservativo y por consiguiente la suma de las energías cinéticas más la potencial es constante

$$E_C\text{traslación} + E_C\text{rotación} + E_P\text{elástica} = Cte \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(E_C\text{traslación} + E_C\text{rotación} + E_P\text{elástica}\right) = 0$$

Para una elongación cualquiera del cilindro

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\,\omega^2 + \frac{1}{2}ky^2 = Cte. \quad \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\,\omega^2 + \frac{1}{2}ky^2 = Cte$$

Como el cilindro rueda sin deslizar $v = \omega R$

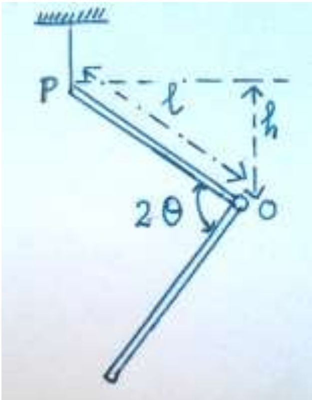
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 + \frac{1}{2}k\,y^2 = Cte \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4}m\,v^2 + \frac{1}{2}k\,y^2 = Cte \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{4}m\,v^2 + \frac{1}{2}k\,y^2\right) = \frac{d}{dt}Cte \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{4}m\,v\frac{dv}{dt} + ky\frac{dy}{dt} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}m\,v\frac{d^2y}{dt^2} + ky\,v = 0 \quad \Rightarrow v\left(\frac{3}{2}m\frac{d^2y}{dt^2} + k\,y\right) = 0 \quad \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2k}{3m}y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

188**.-(501)-**Dos varillas de la misma longitud y masa, están articuladas en O, de modo que el ángulo 2θ entre ellas se puede variar.



El dispositivo se cuelga del techo sujetándolo con una cuerda por el extremo P.
a) Determinar la ecuación matemática que relaciona la altura h y el ángulo θ
b) Construir la gráfica h –θ
c) Determinar analíticamente el mínimo de la curva anterior.

El dispositivo una vez colgado y alcanzado el equilibrio se tiene que cumplir que la suma de fuerzas sobre el sistema, incluyendo pesos y reacciones sea nula y además que no haya momento resultante, esto conlleva que el centro de masas del dispositivo, donde podemos considerar actuando todo el peso del sistema, tiene que estar alineado en vertical con el extremo P. En la figura 1 se ha hecho la representación cuando el dispositivo se encuentra en equilibrio. R y Q son los centros de las varillas

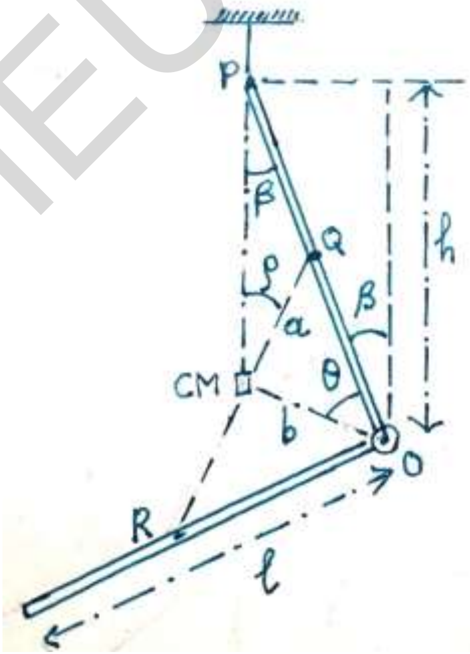


Fig 1

A partir de la figura 1 aplicamos el teorema de los senos en el triángulo P(CM)Q y en el triángulo P(CM)O.

$$\frac{\operatorname{sen}\rho}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{a} \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{2a\operatorname{sen}\rho}{\ell} \quad ; \quad \frac{\operatorname{sen}(90+\rho)}{\ell} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{b\operatorname{sen}(90+\rho)}{\ell} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2a\operatorname{sen}\rho}{\ell} = \frac{b\operatorname{sen}(90+\rho)}{\ell} \quad \Rightarrow \quad 2a\operatorname{sen}\rho = b(\operatorname{sen}90\cdot\cos\rho + \cos 90\cdot\operatorname{sen}\rho) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2a\operatorname{sen}\rho = b\cos\rho \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tag}\rho = \frac{b}{2a} \quad (1)$$

En el triángulo Q(CM)O

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{\frac{\ell}{2}} \Rightarrow \quad a = \frac{\ell\operatorname{sen}\theta}{2} \quad ; \quad \cos\theta = \frac{b}{\frac{\ell}{2}} \Rightarrow \quad b = \frac{\ell\cos\theta}{2}$$

Sustituimos a y b en la ecuación (1)

$$\operatorname{tag}\ \rho = \frac{\frac{\ell\cos\theta}{2}}{2\cdot\frac{\ell\operatorname{sen}\theta}{2}} = \frac{\cos\theta}{2\operatorname{sen}\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}\rho}{\cos\rho} = \frac{\cos\theta}{2\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow \quad \frac{\cos\rho}{\operatorname{sen}\rho} = 2\operatorname{tag}\theta \ \Rightarrow \frac{1-\operatorname{sen}^2\rho}{\operatorname{sen}^2\rho} = 4\operatorname{tag}^2\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\operatorname{sen}^2\rho} = 1 + 4\operatorname{tag}^2\theta \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}^2\rho = \frac{1}{1+4\operatorname{tag}^2\theta} \quad (2)$$

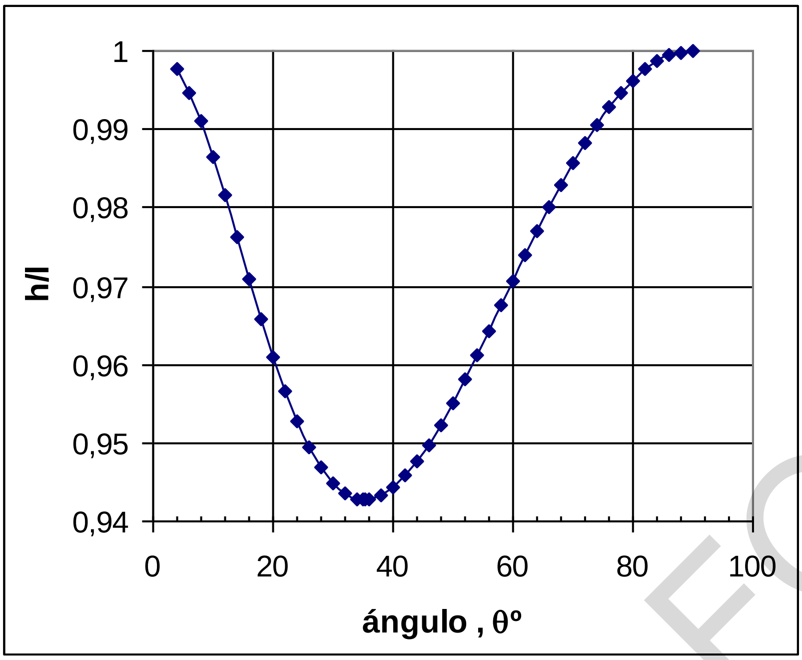
De nuevo en la figura 1 deducimos que

$$h = \ell\ \cos\beta = \ell\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\beta} = \ell\sqrt{1-\frac{4a^2\operatorname{sen}^2\rho}{\ell^2}} = \sqrt{\ell^2 - 4a^2\operatorname{sen}^2\rho}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior el valor de a y (2), resulta:

$$h = \sqrt{\ell^2 - 4\frac{\ell^2\operatorname{sen}^2\theta}{4}\cdot\frac{1}{1+4\operatorname{tag}^2\theta}} = \ell\sqrt{1-\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{1+4\operatorname{tag}^2\theta}} \quad (3)$$

b)



La gráfica tiene un mínimo comprendido entre θ = 35º y 36º

c) Para hallar el mínimo analíticamente debemos derivar la (3) respecto de θ e igualar a cero. .Dado que h es un mínimo, también lo será h^2 y será esta función la que derivamos pues es más simple de hacer que con h, al no tener raíz cuadrada.

$$\frac{dh^2}{d\theta} = \ell^2 \left[- \left(\frac{(1+4\,\mathrm{tag}^2\theta)\cdot 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta - \mathrm{sen}^2\theta\cdot 8\,\mathrm{tag}\theta\,\frac{1}{\cos^2\theta}}{(1+4\,\mathrm{tag}^2\theta)^2} \right) \right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (1+4\,\mathrm{tag}^2\theta)\cdot\cos\theta = 4\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot\mathrm{tag}\theta\,\frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow \cos\theta + 4\,\mathrm{tag}^2\theta\cos\theta = \frac{4\,\mathrm{tag}^2\theta}{\cos\theta} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2\theta + 4\,\mathrm{sen}^2\theta = 4\,\mathrm{tag}^2\theta$$

La ecuación anterior se resuelve por tanteo con valores intermedios entre θ =35º y 36º
El valor que iguala muy aproximadamente los dos miembros de la ecuación es θ = 35,26º

189.-*(503).-* ***Un cono de ángulo plano 120º rota alrededor de un eje perpendicular al vértice de modo que cualquier punto situado sobre la pared del cono describe una circunferencia, esto es , el cono gira como si fuese una peonza pero sin movimiento de precesión, la velocidad angular constante es de dos rotaciones por cada segundo. ¿En qué lugar de la pared del cono hay que colocar un pequeño objeto para que permanezca en equilibrio? Analizar el problema suponiendo a) que no hay rozamiento b) que existe rozamiento, con coeficiente μ =0,2.***

a) En la figura 1 se han indicado las dos fuerzas que actúan sobre el objeto. Una es su peso y otra la fuerza con que la pared del cono empuja al objeto

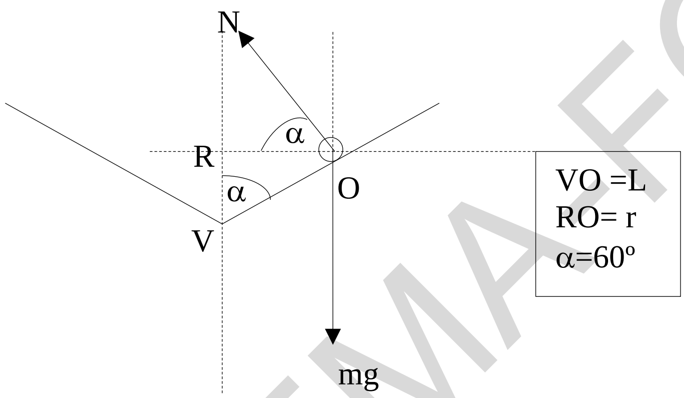


Fig.1

Sea ω la velocidad angular del cono, en nuestro caso ω= 4π rad/s, En el punto O las fuerzas dan lugar a una situación de equilibrio si se cumplen las dos condiciones

$$N \operatorname{sen}\alpha = mg \qquad ; \qquad N\cos\alpha = m\omega^2 r = m\omega^2 L \operatorname{sen}\alpha$$

Dividiendo la primera ecuación por la segunda resulta

$$\operatorname{tag}\alpha = \frac{g}{\omega^2 L \operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow \quad L = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{9{,}8\cdot\cos 60º}{(4\pi)^2\cdot\operatorname{sen}^2 60} = 0{,}041\,\mathrm{m} = 4{,}1\,\mathrm{cm}$$

El lugar donde hay que colocar el objeto para que haya equilibrio es a 4,1 cm del vértice V. Al ser un solo lugar el equilibrio es inestable.

b) Cuando hay rozamiento aparece una tercera fuerza que tiene la dirección de la generatriz del cono pero que puede tener dos sentidos, hacia arriba o hacia abajo. Esta fuerza de rozamiento tendrá un valor máximo de μN y como veremos nos limitará los extremos en que puede haber equilibrio, Imaginemos que el objeto se desplaza en forma ascendente por la generatriz la fuerza de rozamiento se opondrá a ese movimiento y mantendrá en equilibrio al objeto pero dentro del límite que no se puede sobrepasar ya que dicha fuerza tiene un valor máximo.

Las ecuaciones del equilibrio son las siguientes.

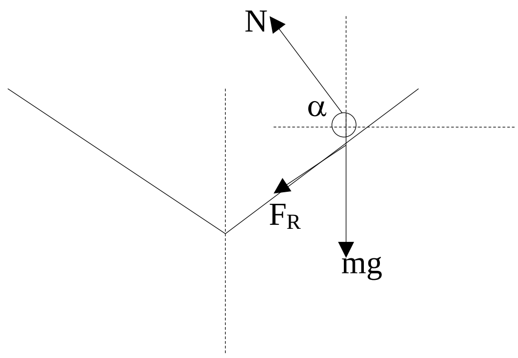


Fig 2

$$N\,\text{sen}\,\alpha = mg + \mu N\cos\alpha \quad ; \quad N\cos\alpha + \mu\,N\,\text{sen}\,\alpha = m\omega^2 r \quad (1)$$

Despejamos m de la primera ecuación y sustituimos en la segunda

$$m = \frac{N(\text{sen}\alpha - \mu\cos\alpha)}{g} \quad ; \quad N\cos\alpha + \mu\,N\,\text{sen}\alpha = \frac{N(\text{sen}\alpha - \mu\cos\alpha)}{g}\omega^2 r \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{g(\cos\alpha + \mu\,\text{sen}\alpha)}{\omega^2(\text{sen}\alpha - \mu\cos\alpha)} \;\Rightarrow L\,\text{sen}\alpha = \frac{g(\cos\alpha + \mu\,\text{sen}\alpha)}{\omega^2(\text{sen}\alpha - \mu\cos\alpha)} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad L_M = \frac{g(\cos\alpha + \mu\,\text{sen}\alpha)}{\omega^2(\text{sen}^2\alpha - \mu\cos\alpha\;\text{sen}\alpha)} = \frac{9{,}8}{16\pi^2}\,\frac{0{,}5 + 0{,}87\cdot 0{,}2}{0{,}75 - 0{,}43\cdot 0{,}2} = 0{,}063\text{m} = 6{,}3\text{cm}$$

Si la fuerza de rozamiento está dirigida hacia arriba, las ecuaciones son:

$$N\,\text{sen}\alpha + \mu N\cos\alpha = mg \quad ; \quad N\cos\alpha - \mu\,N\;\text{sen}\alpha = m\omega^2 r \quad (2)$$

Se observa que los signos están cambiados respecto a (1), el resultado tendrá los signos cambiados

$$Lm = \frac{g(\cos\alpha - \mu\,\text{sen}\alpha)}{\omega^2(\text{sen}^2\alpha + \mu\cos\alpha\,\text{sen}\alpha)} = \frac{9{,}8}{16\pi^2}\,\frac{0{,}5 - 0{,}87\cdot 0{,}2}{0{,}75 + 0{,}43\cdot 0{,}2} = 0{,}024\text{m} = 2{,}4\text{cm}$$

Entre las distancias medidas sobre la generatriz de 6,3 cm y 2,4 cm existe equilibrio. Si no hubiese rozamiento las ecuaciones obtenidas nos conducen a la ecuación vista en la primera parte cuyo valor de equilibrio es 4,1 cm.

a) El problema se ha tratado considerando un sistema de referencia inercial, al mismo resultado se llega si consideramos un sistema no inercial ligado al pequeño objeto.

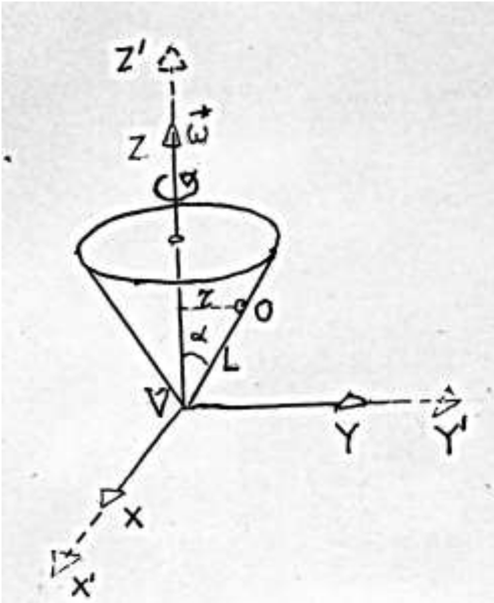


Fig.3

Tomamos un sistema inercial V(X,Y,Z) fijo en V (fig.3) y otro sistema no inercial V(X´,Y¨, Z¨) y que gira alrededor del eje Z con velocidad angular ω. En este sistema de ejes el objeto debe permanecer fijo y por tratarse de un sistema no inercial debe aparecer una fuerza de inercia que en nuestro caso es la fuerza centrífuga de inercia. Las fuerzas que actúan sobre el objeto son: $\vec{N}$, $\vec{P}$, , $\vec{F}_C$ (fig.4), se cumple que $\sum \vec{F} = 0$, por estar el objeto en equilibrio en los ejes móviles de la figura 3.

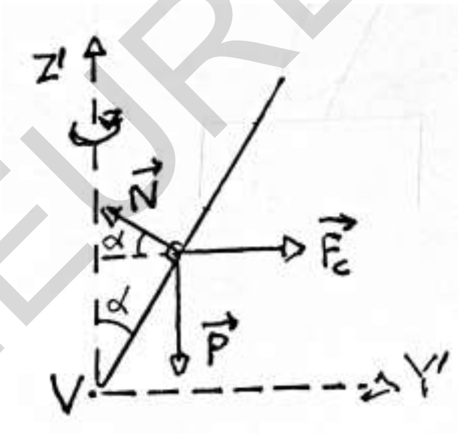


Fig.4

$$-N\cos\alpha = -m\omega^2 r = -m\omega^2 L\,\mathrm{sen}\,\alpha \quad \Rightarrow \quad N = \frac{m\omega^2 L\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow$$

$$N\,\mathrm{sen}\,\alpha - P = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{m\omega^2 L\,\mathrm{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} - mg = 0 \quad \Rightarrow L = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\,\mathrm{sen}^2\alpha}$$

El mismo resultado que se ha deducido antes.

b) ***Suponemos que la F_R actúa hacia V (fig.5)***

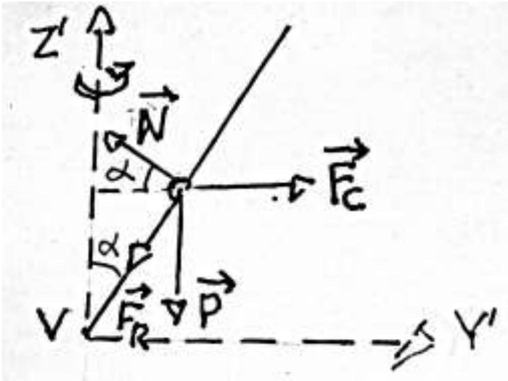


Fig. 5

Las ecuaciones son.

$$F_C - N\cos\alpha - F_R \operatorname{sen}\alpha = 0 \quad ; \quad N \operatorname{sen}\alpha - P - F_R \cos\alpha = 0 \quad ; \; F_R = \mu N$$

De la primera ecuación

$$m\omega^2 L \operatorname{sen}\alpha - N\cos\alpha - \mu N \operatorname{sen}\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{m\omega^2 L \operatorname{sen}\alpha}{\mu \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}$$

De la segunda ecuación

$$\frac{m\omega^2 L \operatorname{sen}^2\alpha}{\mu \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha} - mg - \frac{\mu m\omega^2 L \operatorname{sen}\alpha}{\mu \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega^2 L(\operatorname{sen}^2\alpha - \mu \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)}{\mu \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha} = g \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{g(\mu \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)}{\omega^2 (\operatorname{sen}^2\alpha - \mu \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)}$$

Si la fuerza de rozamiento se aleja de V(fig.6)

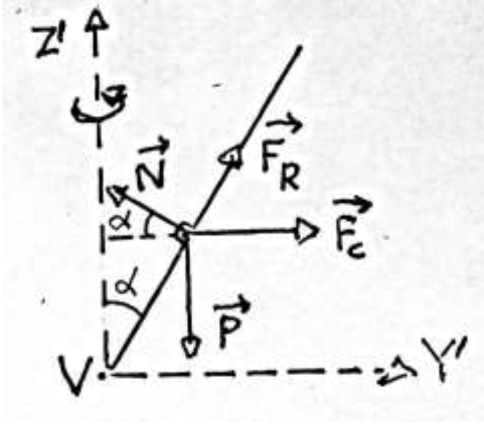


Fig.6

$$F_C - N\cos\alpha + F_R \operatorname{sen}\alpha = 0 \quad ; \quad N\operatorname{sen}\alpha - P + F_R\cos\alpha = 0 \quad ; \quad F_R = \mu N$$

De la primera ecuación0

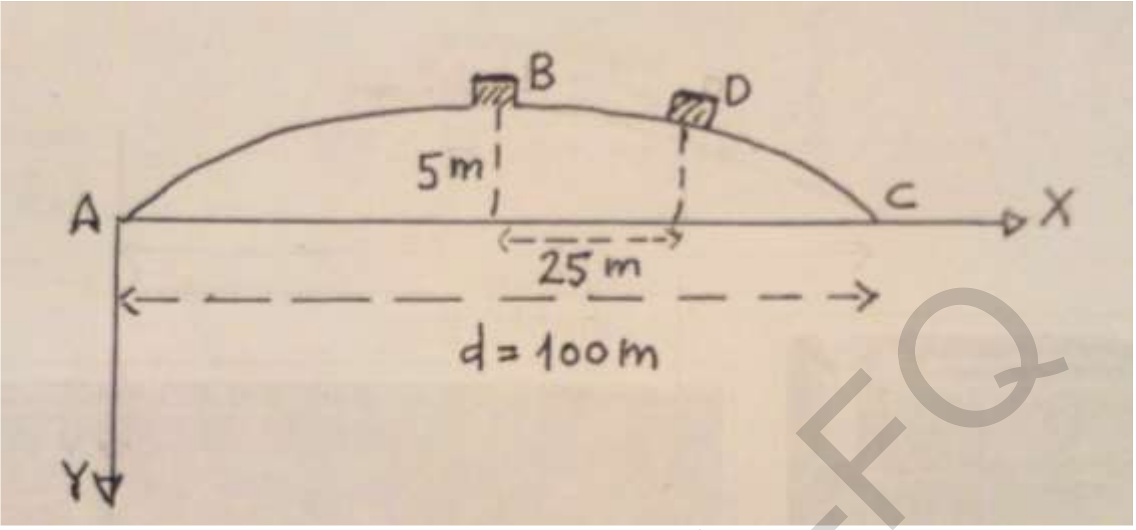
$$m\omega^2 L\operatorname{sen}\alpha - N\cos\alpha + \mu N\operatorname{sen}\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{m\omega^2 L\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha - \mu\operatorname{sen}\alpha}$$

De la segunda ecuación

$$\frac{m\omega^2 L\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha - \mu\operatorname{sen}\alpha} - mg + \frac{\mu m\omega^2 L\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha - \mu\operatorname{sen}\alpha}\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega^2 L(\operatorname{sen}^2\alpha + \mu\ \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu\operatorname{sen}\alpha} = g \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{g(\cos\alpha - \mu\operatorname{sen}\alpha)}{\omega^2(\operatorname{sen}^2\alpha + \mu\ \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)}$$

190.-** (504).- **Un puente sobre un río de ancho d=100 m posee un perfil parabólico. La altura máxima en su centro respecto del agua es 5 m. Por él circula un coche de masa m=1000 kg a una velocidad constante de v= 20 m/s.



Calcular la fuerza ejercida por el puente sobre el coche a) en el punto más alto b) en el punto cuya distancia es 25 m a la derecha respecto a la posición más alta

Ayuda: El radio de curvatura para una curva de ecuación y=f(X) está dado por la ecuación

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2f}{dx^2}\right|}$$

Cuando el coche se encuentra en lo más alto del puente sus coordenadas respecto a los ejes son (50 , 5) metros . Las fuerzas que actúan sobre él son: El peso mg y la componente normal N, fuerza con que el puente empuja al coche, ahora bien, como el vehículo toma una curva, la resultante entre estas dos fuerzas de interacción debe proporcionarle la fuerza centrípeta necesaria para cambiar la dirección de su vector velocidad en cada punto. Aunque el vehículo mantiene constante el módulo de su velocidad, la dirección de la fuerza centrípeta habrá de ir dirigida hacia el centro de cada elemento infinitesimal de trayectoria

$$mg - N = \frac{mv^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad N = mg - \frac{mv^2}{\rho} \ (1)$$

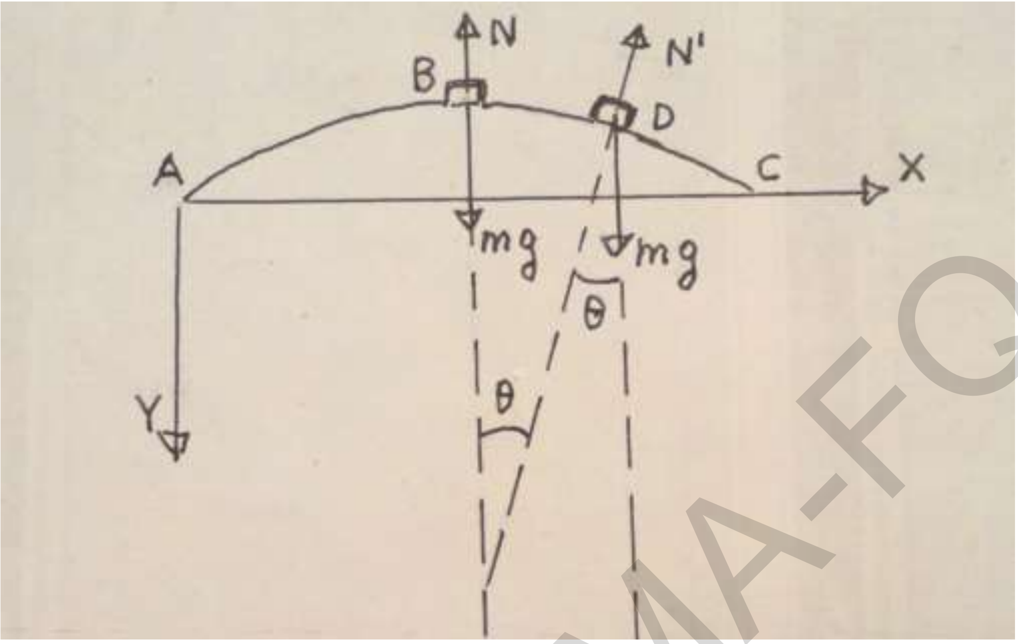


Fig. 1

Para calcular N debemos determinar el radio de curvatura y para ello necesitamos establecer la ecuación de la parábola, que en su forma general es:

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

Según la figura 1 conocemos las coordenadas de tres puntos de esa parábola.(A, B y C) Para el A(0,0) sustituido en la ecuación resulta que C=0. Para B (50, 5)

$$5 = 2500A + 50x$$

Para C(100,0)

$$0 = 10000A + 100B \quad \Rightarrow \quad B = -100A \quad \Rightarrow$$

$$5 = 2500A + 50(-100A) \quad \Rightarrow A = -\frac{5}{2500} = -\frac{1}{500} \quad \Rightarrow \ B = -100\cdot\left(-\frac{1}{500}\right) = \frac{1}{5}$$

La ecuación de la parábola es

$$y = -\frac{1}{500}x^2 + \frac{1}{5}x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{500} + \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{500}$$

Sustituyendo en la ecuación del radio de curvatura

$$\rho(x=50)=\frac{\left[1+\left(-\frac{2\cdot 50}{500}+\frac{1}{5}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{500}}=250\,\mathrm{m}$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (1)

$$N=1000\cdot 9{,}8-\frac{1000\cdot 20^2}{250}=8200\ \mathrm{N}$$

b) En la posición D las fuerzas que actúan son el peso y la fuerza N´. Ahora ambos vectores no están en la misma dirección, por consiguiente.

$$N'=m\,g\cos\theta-\frac{m\,v^2}{\rho'}\quad (2)$$

Calculamos el radio de curvatura en la posición D.

$$\rho'(x=75)=\frac{\left[1+\left(-\frac{2\cdot 75}{500}+\frac{1}{5}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{500}}=254\,\mathrm{m}$$

De la figura 1 se deduce que el seno de θ es aproximadamente igual a

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{25}{254}\quad\Rightarrow\quad\theta=5{,}6^{\circ}$$

Sustituyendo en la ecuación (2)

$$N'=1000\cdot 9{,}8\cdot\cos 5{,}6^{\circ}-\frac{1000\cdot 20^2}{254}=8178\,\mathrm{N}=8{,}18\ \mathrm{kN}$$

Si de nuevo observamos la figura 1 resulta que hay una componente del peso mg sen 5,6º que aceleraría el coche pero se nos dice que la velocidad es constante, por tanto, la suma de las fuerzas debe ser nula y tendrá que haber otra fuerza de interacción, es la fuerza de rozamiento de valor igual y opuesta al de esa componente tangencial

$$f_R=m\,g\operatorname{sen}5{,}6^{\circ}=956\,\mathrm{N}$$

La fuerza N´ y fr forman ángulo recto, la resultante es:

$$F_T=\sqrt{8178^2+956^2}=8234\,\mathrm{N}=8{,}24\ \mathrm{kN}$$