***1.- Una plataforma circular  de masa M = 360 kg y radio R puede girar libremente alrededor de un eje perpendicular que pasa por su centro. En el instante t=0, dos personas cada una de masa m = 60 kg se encuentran situadas en sendos  extremos de un diámetro de la plataforma. Ambas personas y la plataforma están en reposo en el instante t=0. Si ambas personas se desplazan en el mismo sentido que avanzan las agujas de un reloj con velocidad constante, cuando hayan recorrido una vuelta completa respecto de la plataforma, determinar el ángulo que han girado respecto de un observador inercial que está fuera de la plataforma***.

El sistema plataforma-personas constituye un sistema aislado, y ello conlleva que el momento angular se conserve. Si las personas se desplazan en el sentido de las agujas del reloj la plataforma debe girar en sentido contrario para que el momento angular total sea nulo, tal como lo era en el instante t=0.
Designamos con $\omega$ la velocidad angular de rotación de la plataforma respecto del sistema inercial exterior y v la velocidad lineal de las personas respecto del mismo sistema. La velocidad v de las personas es igual a

$$v = \omega_p R$$

Siendo $\omega_p$ la velocidad angular de las personas respecto del observador inercial.

La conservación del momento angular establece que

$$2m\,R\omega_p R = I\omega \quad \Rightarrow \quad 2mR^2 \frac{d\theta_p}{dt} = \frac{1}{2} MR^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Si el ángulo girado por la plataforma es $-\beta$, las personas deben haber girado una vuelta más beta, $\alpha=2\pi+\beta$

$$\int_0^{2\pi+\beta} d\theta_p = \int_0^{-\beta} \frac{M}{4m} d\theta_p \Rightarrow 2\pi+\beta = -\frac{M}{4m}\beta \Rightarrow 2\pi+\beta = -\frac{360}{4*60}\beta \Rightarrow 2\pi+\beta = -\frac{3}{2}\beta \Rightarrow$$

$$\beta = -\frac{4}{5}\pi = -\frac{4}{5}*180^{o} = -144^{o} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2\pi - \frac{4}{5}\pi = \frac{6}{5}\pi = 216^{o}$$

***2.- La densidad de un planeta, de radio R, depende de su distancia al centro del mismo según la ecuación***

$$\rho = \rho_o - kr$$

***Siendo r la distancia desde el centro del planeta al punto considerado. El valor en la superficie del planeta es ¼ del valor máximo de la densidad.¿A qué distancia del centro del planeta la intensidad del campo gravitatorio es máxima?***

La densidad máxima es $\rho_o$ y ocurre cuando r = 0,. Cuando r =R la densidad es un cuarto de $\rho_o$

$$\frac{1}{4}\rho_o = \rho_0 - kR \quad \Rightarrow \quad k = \frac{3}{4}\frac{\rho_o}{R} \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_o - \frac{3}{4}\frac{\rho_o}{R} r$$

La intensidad del campo gravitatorio a una distancia r del centro del planeta vale

$$g_r = \frac{GM}{r^2}$$

Siendo M la masa comprendida en una esfera de radio r. Consideramos una capa esférica de radio l y espesor dl, siendo r>l , la masa de esa capa esférica es

$$dM = dV * \rho_l = 4\pi\ l^2 dl * \left(\rho_o - \frac{3}{4}\frac{\rho_o}{R} l\right)$$

Para hallar la masa M hemos de integrar la anterior expresión entre cero y r

$$M = \int_o^r 4\pi\ l^2 \left(\rho_o - \frac{3}{4}\frac{\rho_o}{R} l\right) dl = 4\pi\ \rho_o \frac{r^3}{3} - 3\pi \frac{\rho_o}{R}\frac{r^4}{4}$$

El campo gravitatorio es:

$$g_r = \frac{G\frac{4\pi\ \rho_o r^3}{3} - \frac{3}{4}\pi\frac{\rho_o r^4}{R}}{r^2} = G\pi\ \rho_0 \left(\frac{4}{3} r - \frac{3r^2}{4R}\right)$$

Para hallar la distancia r a la cual el valor de la intensidad del campo gravitatorio es un máximo, derivamos la expresión anterior con respecto a r e igualamos a cero

$$\frac{dg_r}{dr} = G\pi\ \rho_o \left(\frac{4}{3} - \frac{3r}{2R}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3} = \frac{3r}{2R9} R \quad \Rightarrow \quad r = \frac{8}{9} R$$

***3.- En un contenedor se mantiene la altura del agua constante H. Por un orificio situado a una altura H/3 surge el agua, la cual alcanza una cierta distancia del contenedor. Se pide a que altura se debe practicar un orificio igual para que el agua alcance la misma distancia del contenedor.***

De acuerdo con el teorema de Torricelli la velocidad de salida del agua está dada por la ecuación

$$v = \sqrt{2gh}$$

Siendo h la altura desde el centro del orificio a la superficie libre del líquido. Si aplicamos esta ecuación al primer orificio tenemos

$$v = \sqrt{2g\left(H - \frac{1}{3}H\right)} = 2\sqrt{\frac{Hg}{3}}$$

Las ecuaciones del chorro de agua en el aire son:

$$x = vt = 2\sqrt{\frac{Hg}{3}}t \qquad ; \qquad y = \frac{1}{3}H - \frac{1}{2}gt^2$$

Cuando y=0, el alcance del chorro es:

$$0 = \frac{1}{3}H - \frac{1}{2}gt_a^2 \quad \Rightarrow \quad t_a = \sqrt{\frac{2H}{3g}} \quad \Rightarrow \quad x_a = 2\sqrt{\frac{Hg}{3}}\sqrt{\frac{2H}{3g}} = \frac{2\sqrt{2}H}{3}$$

Designamos con h la altura del otro agujero respecto del suelo y cómo ha de alcanzar la misma distancia, podemos escribir

$$\frac{2\sqrt{2}H}{3} = v' t'_a \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}H}{3} = \sqrt{2g(H-h)}\,t'_a \quad ; \quad y = 0 = h - \frac{1}{2}g\left(t'_a\right)^2$$

De ambas ecuaciones

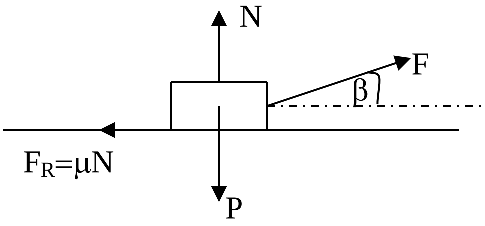
$$\frac{2\sqrt{2}H}{3} = \sqrt{2g(H-h)}\sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \frac{8H^2}{9} = 2(H-h)2h \quad \Rightarrow \quad \frac{2H^2}{9} = Hh - h^2$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$$h = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - \frac{8H^2}{9}}}{2} = \frac{H \pm \frac{H}{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2}{3}H \quad y \quad h = \frac{1}{3}H$$

***4.- Un bloque de peso P se encuentra en reposo sobre un suelo horizontal, siendo el coeficiente de rozamiento estático μ. Sobre el bloque se aplica una fuerza F que puede formar con la horizontal cualquier ángulo agudo β. Calcular la fuerza mínima que se precisa para iniciar el movimiento del bloque y el valor del ángulo.***

El diagrama de fuerzas que actúa sobre el bloque es el siguiente:




$$P = N + F\,\text{sen}\,\beta \longrightarrow N = P - F\,\text{sen}\,\beta$$

$$F\cos\beta = \mu N$$

$$F\cos\beta = \mu\,(P - F\,\text{sen}\,\beta)\;;$$

$$F(\cos\beta + \mu\,\text{sen}\,\beta) = \mu P$$

$$F = \frac{\mu P}{\cos\beta + \mu\ \text{sen}\beta} \qquad (1)$$

Para calcular el valor mínimo de F derivamos F con respecto a la variable β e igualamos a cero.

$$\frac{dF}{d\beta} = \mu P\left(\frac{-\text{sen}\beta + \mu\cos\beta}{(\cos\beta + \mu\,\text{sen}\beta)^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow -\text{sen}\beta + \mu\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \text{tag}\beta = \mu$$

$$\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{tag}^2\beta + 1 = \frac{1}{\cos^2\beta} \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tag}^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

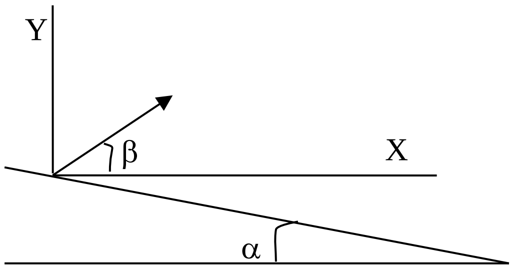
$$\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1 \quad \Rightarrow 1 + \frac{1}{\text{tag}^2\beta} = \frac{1}{\text{sen}^2\beta} \Rightarrow \quad \text{sen}\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\text{tag}^2\beta}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\mu^2}}} = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

Sustituyendo en la ecuación (1)

$$F_{min} = \frac{\mu P}{\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} + \frac{\mu^2}{\sqrt{1+\mu^2}}} = \frac{\mu P}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

***5.- Desde un terreno plano que forma con la dirección horizontal un ángulo $\alpha$, se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba formando la dirección de la velocidad inicial un ángulo $\beta$ con la horizontal. A) Calcular el valor de $\beta$ para que el cuerpo permanezca en el aire el mayor tiempo posible b) Lo mismo para que el alcance sea el mayor posible.***

a) Las ecuaciones del movimiento del cuerpo en el sistema de referencia que se indican




en la figura son:

$$x = v_o (\cos \beta)\, t$$

$$y = v_o (\operatorname{sen} \beta)\, t - \frac{1}{2} g\, t^2$$

Supongamos que cuando el tiempo t es el mayor posible el impacto del cuerpo con el suelo tiene de coordenadas $x_a$ e $-y_a$ , ambas coordenadas relacionadas por

$$-y_a = x_a \operatorname{tag} \alpha$$

$$x_a = v_o(\cos\beta)t \quad ; \quad y_a = -x_a \operatorname{tag}\alpha = v_o(\operatorname{sen}\beta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -v_o(\cos\beta)t \operatorname{tag}\alpha = v_o(\operatorname{sen}\beta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2v_o}{g}(\operatorname{sen}\beta + \operatorname{tag}\alpha \cos\beta)$$

El tiempo mayor posible ha de cumplir que su derivada con respecto a β sea cero

$$\frac{dt}{d\beta} = \frac{2v_o}{g}(\cos\beta - \operatorname{tag}\alpha \operatorname{sen}\beta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tag}\alpha * \operatorname{tag}\beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tag}\beta = \frac{1}{\operatorname{tag}\alpha}$$

Los ángulos complementarios tienen el seno de uno igual al coseno del otro y viceversa, por tanto, sus tangentes cumplen la relación anterior, lo que quiere decir

$$\beta + \alpha = 90^o$$

b) Para buscar la condición de alcance máximo la forma de operar es semejante a la anterior

$$-y_m = x_m \operatorname{tag} \alpha$$

$$x_m = v_o(\cos\beta)t \quad ; \quad y_m = -x_m \operatorname{tag}\alpha = v_o(\operatorname{sen}\beta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x_m \operatorname{tag}\alpha = v_o(\operatorname{sen}\beta)\frac{x_m}{v_o\cos\beta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x_m}{v_o\cos\beta}\right)^2 \quad \Rightarrow -\operatorname{tag}\alpha = \operatorname{tag}\beta - \frac{1}{2}g\frac{x_m}{v_o^2\cos^2\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x_m}{v_o^2\cos^2\beta} = \frac{2}{g}(\operatorname{tag}\alpha + \operatorname{tag}\beta) \quad \Rightarrow \quad x_m = \frac{2v_o^2}{g}\left(\operatorname{tag}\alpha\ \cos^2\beta + \operatorname{tag}\beta\ \cos^2\beta\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_m = \frac{2v_o^2}{g}\left(\operatorname{tag}\alpha\ \cos^2\beta + \operatorname{sen}\beta\ \cos\beta\right)$$

El alcance mayor posible ha de cumplir que su derivada con respecto a β sea cero

$$\frac{dx_m}{d\beta} = \frac{2v_o^2}{g}\left(-\operatorname{tag}\alpha * 2\cos\beta\ \operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = \operatorname{tag}\alpha * 2\cos\beta\ \operatorname{sen}\beta \quad \Rightarrow \quad -\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = \operatorname{tag}\alpha * \operatorname{sen}\ 2\beta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\operatorname{sen}^2\beta + \left(1 - \operatorname{sen}^2\beta\right) = \operatorname{tag}\alpha * \operatorname{sen}\ 2\beta \quad \Rightarrow \frac{1 - 2\operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}\ 2\beta} = \operatorname{tag}\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos\ 2\beta}{\operatorname{sen}\ 2\beta} = \operatorname{tag}\alpha$$

$$\operatorname{tag}\ 2\beta = \frac{1}{\operatorname{tag}\alpha} \quad \Rightarrow \quad 2\beta + \alpha = 90^o$$

***6.- La fotografía del espectro del Sol para la línea amarilla ( $\lambda = 5890.\ A^0$ ) se encuentra desplazada $0,08A^0$ según el borde del Sol del cual provenga la luz. Calcular la velocidad lineal de los puntos del ecuador del Sol debido a su movimiento de rotación***

Consideramos a la Tierra fija, donde se recibe la fotografía, y el Sol rotando. La luz de un borde del Ecuador se acerca a la Tierra y la del borde opuesto se aleja.
Según el efecto Doppler, las frecuencias registradas son respectivamente:

$$\nu' = \frac{\nu}{1 - \frac{v_F}{c}} \Rightarrow \frac{c}{\lambda'} = \frac{c\nu}{c - v_F} \qquad ; \qquad \nu'' = \frac{\nu}{1 + \frac{v_F}{c}} \Rightarrow \frac{c}{\lambda''} = \frac{c\nu}{c + v_F}$$

Restando los inversos de las ecuaciones anteriores

$$\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda''} = \nu\left(\frac{1}{c - v_F} - \frac{1}{c + v_F}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda'' - \lambda'}{\lambda''\lambda'} = \frac{c}{\lambda}\left(\frac{2v_F}{c^2 - v_F^2}\right)$$

Hacemos $\lambda''\ \lambda' = \lambda^2$ y $c^2 - v_F^2 \approx c^2$

$$v_F = \frac{c\ \Delta\lambda}{2\ \lambda} = \frac{3.10^8 * 0,08.10^{-10}}{2 * 5890.10^{-10}} = 2,0.10^3\ \frac{m}{s}$$

***7.- Un recipiente de volumen V se conecta a una bomba de pistón cuya cámara tiene un volumen V´. La presión inicial del recipiente es P. Se pide el número de emboladas que hay que efectuar para que la presión del recipiente se reduzca a $P_f$. La variación de temperatura se considera despreciable.***

Cuando la bomba aspira el volumen inicial V del recipiente aumenta a V+V´ y por consiguiente la presión disminuye a $p_1$. Después de la aspiración las válvulas funcionan para que el aire contenido en la cámara de la bomba salga al exterior.
La presión en el recipiente es:

$$p_1\,(V+V') = PV \quad \Rightarrow \quad p_1 = \frac{PV}{V+V'}$$

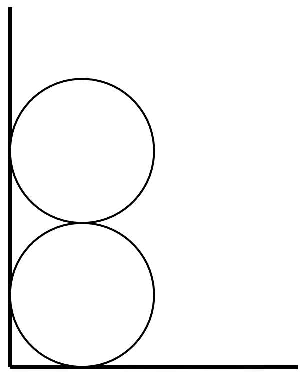
Si ahora se efectúa una segunda embolada, la presión disminuye a $p_2$.

$$p_2(V+V') = p_1 V \quad \Rightarrow \quad p_2 = \frac{p_1 V}{V+V'} = P\left(\frac{V}{V+V'}\right)^2$$

Al cabo de n emboladas

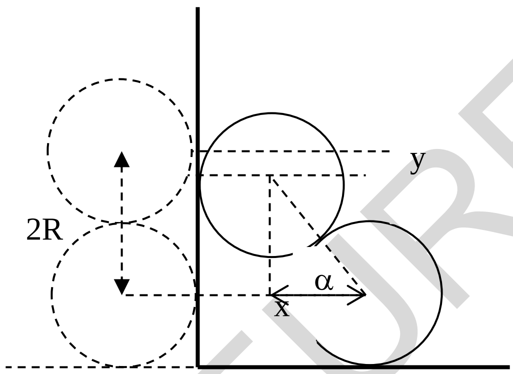
$$P_f = P\left(\frac{V}{V+V'}\right)^n \quad \Rightarrow \quad \log\frac{P_f}{P} = n\,\log\left(\frac{V}{V+V'}\right) \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\log\frac{P_f}{P}}{\log\left(\frac{V}{V+V'}\right)}$$

***8.-Dos cilindros se encuentran inicialmente situados como indica la figura.***



***De forma suave, se desplaza el cilindro inferior hacia la derecha y así comienza a deslizar por la acción del cilindro superior que actúa en contacto con el inferior y con la pared vertical. Se admite que no existe ningún rozamiento entre las superficies que estén en contacto. Se pide la velocidad final que alcanza el cilindro inferior***

A medida que desliza el cilindro inferior hacia la derecha, el superior, mientras esté en contacto con él, sigue empujándolo y haciendo que su velocidad aumente, por tanto, ésta adquirirá un valor máximo y a partir de ese momento los cilindros dejan de estar en contacto, ya que si siguiesen en contacto la velocidad aumentaría aún más y eso no es posible porque hemos llegado al máximo valor de ella.




En la figura de la izquierda se representan los cilindros en la situación inicial y cuando ha transcurrido un cierto tiempo. R representa el radio de cada cilindro, inicialmente la distancia entre sus centros de masa es 2R. Al cabo de un cierto tiempo, el cilindro superior ha descendido una altura y mientras que el inferior ha sufrido un desplazamiento horizontal x. Se ha dibujado un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es 2R, el cateto contiguo x y el opuesto 2R-y

En este momento el cilindro superior posee una velocidad $v_y$ dirigida hacia abajo y el cilindro inferior una velocidad $v_x$ dirigida hacia la derecha. Dado que no existen rozamientos, la energía cinética que han adquirido los cilindros proviene de la pérdida de energía potencial del cilindro superior.

$$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 = mgy \quad \Rightarrow \quad v_x^2 + v_y^2 = 2gy \ \ (1)$$

Volviendo al triángulo de la figura:

$$\text{sen}\alpha = \frac{2R - y}{2R} \quad \Rightarrow \quad y = 2R(1 - \text{sen}\alpha) \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{x}{2R} \quad \Rightarrow \quad x = 2R\cos\alpha$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\alpha} * \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d(2R\cos\alpha)}{d\alpha} * \frac{d\alpha}{dt} = -2R\operatorname{sen}\alpha * \frac{d\alpha}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\alpha} * \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d(2R[1-\operatorname{sen}\alpha])}{d\alpha} * \frac{d\alpha}{dt} = 2R\cos\alpha * \frac{d\alpha}{dt}$$

Dividiendo miembro a miembro ambas ecuaciones resulta:

$$v_x\cos\alpha = -v_y\operatorname{sen}\alpha$$

Sustituyendo en la ecuación (1)

$$v_x^2 + v_x^2\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = 2gy \Rightarrow v_x = \sqrt{\frac{2gy}{1+\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}}} = \sqrt{2gy}\ \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \quad v_x = \sqrt{2g(2R[1-\operatorname{sen}\alpha])}\operatorname{sen}\alpha$$

Para calcular el valor máximo de $v_x$ respecto del ángulo $\alpha$, derivamos e igualamos a cero

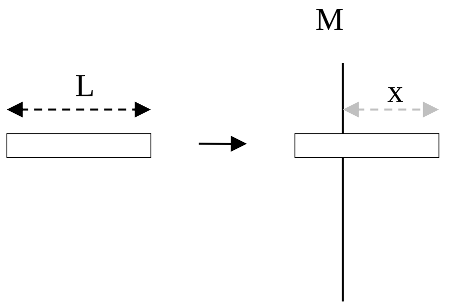
$$\frac{dv_x}{d\alpha} = \sqrt{4gR(1-\operatorname{sen}\alpha)} * \cos\alpha + \operatorname{sen}\ \alpha\frac{-4gR\ \cos\ \alpha}{2\sqrt{4gR(1-\operatorname{sen}\ \alpha)}} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8gR(1-\operatorname{sen}\ \alpha) * \cos\alpha - 4gR\ \operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha}{2\sqrt{4gR(1-\operatorname{sen}\ \alpha)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(1-\operatorname{sen}\ \alpha)\cos\alpha = \operatorname{sen}\ \alpha\ \cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cos\ \alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad 2\ \cos\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha \quad \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3}$$

$$v_x = \sqrt{4gR\left(1-\frac{2}{3}\right)} * \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{4gR}{3}}$$

***9.- Una varilla uniforme de longitud L desliza con velocidad v por un suelo horizontal sin rozamiento. La varilla encuentra que a partir de una línea M el suelo presenta un coeficiente de rozamiento $\mu$ constante.***
***La varilla penetra en ese suelo y se detiene al cabo de un cierto tiempo, quedando una parte de ella en el suelo sin rozamiento, tal como indica la figura inferior.***




***Determinar el tiempo que emplea la varilla desde que llega a la línea M hasta que se para.***

Cuando la varilla desliza por el suelo sin rozamiento, las fuerzas que actúan son el peso en dirección vertical al suelo y hacia abajo y la fuerza normal con que el suelo empuja a la varilla, vertical y hacia arriba, la suma de ambas fuerzas es nula y la varilla mantiene su velocidad constante.
Cuando penetra en el suelo con rozamiento aparece una fuerza horizontal de rozamiento en sentido contrario a la velocidad. Esta fuerza de rozamiento vale.

$$F_R = \mu N$$

Siendo $\mu$ el coeficiente de rozamiento y N la fuerza de reacción del suelo con rozamiento sobre la varilla. N aumenta a medida que la varilla penetra en el suelo con rozamiento. Si la varilla ha penetrado una distancia x en el suelo con rozamiento

$$N = \frac{mg}{L}x \quad \Rightarrow \quad F_R = \frac{\mu mg}{L}x \quad \Rightarrow \quad F_R = kx$$

En consecuencia, la fuerza que frena a la varilla es directamente proporcional a la longitud de varilla que ha penetrado en el suelo con rozamiento. Esta situación es la misma que cuando un móvil efectúa un movimiento armónico y se desplaza desde la posición de equilibrio hacia la máxima elongación y cuando alcanza ésta, su velocidad se anula. Aquí la varilla al llegar a la línea M lleva una velocidad v, al penetrar aparece la fuerza de rozamiento y se para hasta frenarse, por tanto, equivale a un tiempo de un cuarto de periodo en el m0vimiento vibratorio armónico.

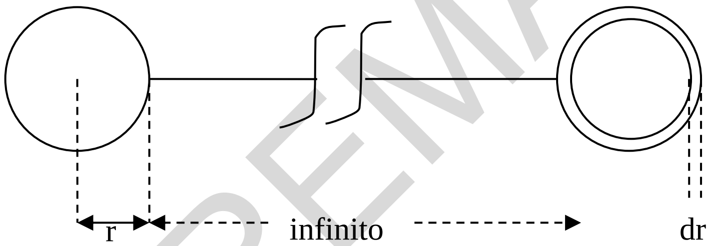
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{\mu mg}{L}}} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{\mu g}}$$

***10.- De acuerdo con la teoría de la relatividad un cuerpo formado por la adición de masas, $m_1$ , $m_2$ $_n$ , su masa es inferior respecto a la suma en una cantidad***

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$$

***donde ΔE es la energía de enlace (energía que se ha de suministrar al cuerpo para separar las masas individuales que lo componen) y c es la velocidad de la luz.***
***Calcular Δm para la Tierra, admitiendo que ΔE solamente corresponde a la energía gravitacional. Admitir que la Tierra es una esfera de densidad constante.***

Para realizar el calculo vamos a suponer que desde el infinito traemos capas esféricas de espesor dr, las cuales las vamos apilando, hasta formar una esfera cuyo radio final es el de la Tierra. En un determinado momento la esfera que ya hemos formado tiene un radio r y sobre ella y desde el infinito traemos una capa esférica de radio r y espesor dr.




La energía necesaria para realizar el proceso de sumar la capa esférica a la esfera r , esta dada por

dE = dm*( Potencial gravitatorio de partida menos potencial gravitatorio de llegada)

siendo, dm la masa transportada , esto es , la masa de la capa esférica.

El potencial gravitatorio en el infinito es cero y en la superficie de la esfera de radio r

$$V = -\frac{Gm}{r}$$

Siendo m la masa de la esfera de radio r

$$dm = 4\pi\ r^2\rho\ dr \quad ; \quad m = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$$

$$dE = 4\pi\ r^2\rho\ dr\left(0 + \frac{G\frac{4}{3}\pi r^3\rho}{r}\right) = G\frac{(4\pi\ \rho)^2 r^4}{3}dr$$

Para construir la esfera de radio igual al de la Tierra, hemos de sumar los trabajos anteriores desde que el radio inicial es cero hasta que alcanza el valor R

$$E = \int_0^R G\frac{(4\pi\ \rho)^2 r^4}{3} dr = G\frac{(4\pi\ \rho)^2 R^5}{15} \quad (1)$$

La energía anterior sería la que necesitásemos para destruir la esfera terrestre llevando capas de espesor dr al infinito.

$$g = G\frac{M}{R^2} = G\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho}{R^2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{3g}{4\pi\pi G}$$

Sustituyendo en (1)

$$E = \frac{(4\pi)^2 G * \left(\frac{3g}{4\pi\ GR}\right)^2 R^5}{15} = \frac{3g^2R^3}{5\ G} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta m = \frac{3g^2R^3}{5Gc^2} = \frac{3*9{,}8^2 *(6370.10^3)^3}{5*6{,}67.10^{-11}*(3.10^8)^2} = 2{,}5.10^{15}\,kg$$