$$\frac{1}{2}m\left(v_o^2+u_1^2\right)=mgh_1+\frac{1}{2}mv_o^2 \quad\Rightarrow\quad u_1=\sqrt{2gh_1}=\varepsilon u_o=\varepsilon\sqrt{2gh_o} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2gh_1=\varepsilon^2\,2gh_o \quad\Rightarrow\qquad \varepsilon=\sqrt{\frac{h_1}{h_o}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=0{,}8$$

b) En el punto donde rebota la pelota consideramos un sistema de referencia. Las componentes de la velocidad en ese lugar son (v_o , u_1)
las ecuaciones del movimiento

$$x=v_o t \quad ; \quad y=u_1 t-\frac{1}{2}gt^2$$

Cuando la pelota llegue al suelo y=0 ; $t=\frac{2u_1}{g}$

$$u_1=\frac{1}{2}gt \quad\Rightarrow\quad d_1=v_o t=v_o\frac{2u_1}{g}=\frac{2v_o\varepsilon u_o}{g}=\frac{2v_o\,\varepsilon\sqrt{2gh_o}}{g} \quad (1)$$

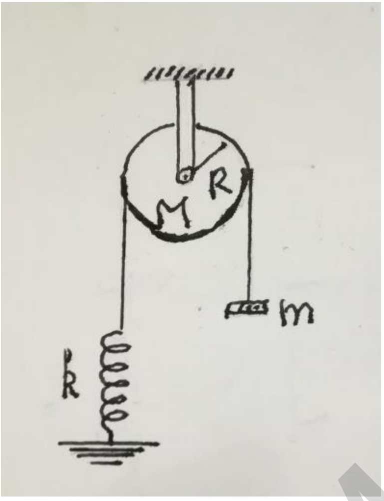
Para la primera caída de la pelota

$$d_o=v_o t \quad ; \quad h_o=\frac{1}{2}gt^2 \quad\Rightarrow\quad t=\sqrt{\frac{2h_o}{g}} \quad\Rightarrow\quad v_o=\frac{d_o}{\sqrt{\frac{2h_o}{g}}} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$d_1=\frac{2\frac{d_o}{\sqrt{\frac{2h_o}{g}}}\varepsilon\sqrt{2gh_o}}{g}=\frac{2d_o\varepsilon\, g}{g}=2d_o\varepsilon=2\cdot 5\cdot 0{,}8=8 \text{ in}$$

202.-(536).- En la figura M representa la masa de una polea de radio R. Sobre ella se apoya una cuerda en cuyo extremo está unido un muelle de constante elástica k y en el otro una masa m. Si la masa m se separa de la posición de equilibrio y se deja en libertad se produce una oscilación. Determinar el periodo de dicha oscilación teniendo en cuenta, que el muelle y la cuerda carecen de masa, que el movimiento del sistema es sin rozamiento y que la cuerda no resbala sobre la polea



En la figura 1 se representan tres situaciones. En 1 está el muelle sin que actúe fuerza sobre él ya que su peso es despreciable. En 2 se ha colocado en el extremo libre de la cuerda una masa m cuyo peso es mg. El muelle se ha estirado una longitud xi En la situación de equilibrio la tensión de la cuerda Ti es igual al peso mg y la tensión de la cuerda es igual a la fuerza elástica del muelle

$$T_i = mg = kx_i$$

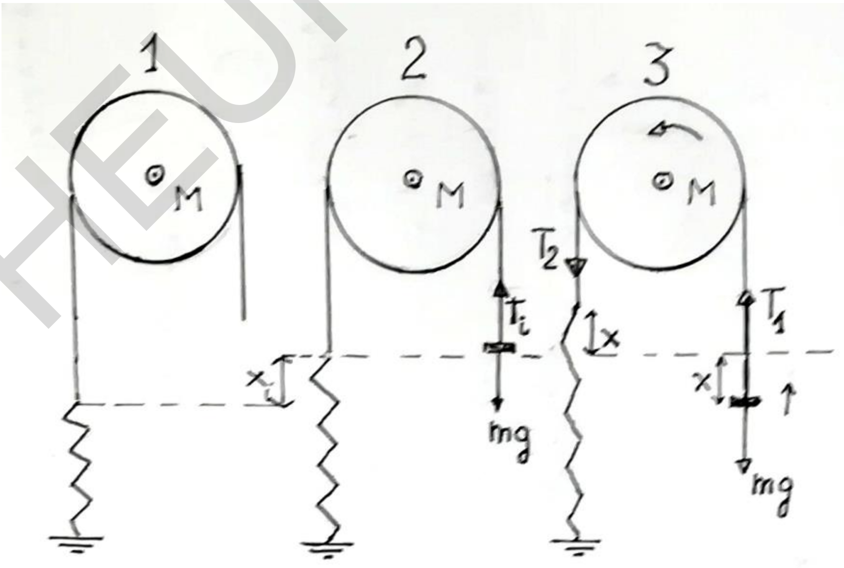


Fig 1

A partir de la situación de equilibrio 2, bajamos la masa m a una distancia A>x y la soltamos con velocidad inicial cero.. La masa m se desplaza hacia la posición de equilibrio siendo $T_1 > mg$ y x la distancia de la masa a la posición de equilibrio Sobre la polea actúan dos fuerzas una T_1 y la otra T_2 que obligan a la polea a rotar en el sentido indicado.. Las ecuaciones son

$$T_1 - mg = m\,a$$
$$(T_1 - T_2)\cdot R = I\,\alpha$$
$$a = \alpha\,R$$

El momento de inercia de la polea respecto del eje es $I = \frac{1}{2}MR^2$. Sustituyendo T_1 de la primera ecuación en la segunda y la aceleración angular, resulta:

$$(mg + ma)R - T_2 R = \frac{1}{2}MR^2\,\frac{a}{R} \quad ; \quad mg - T_2 = \frac{1}{2}Ma + ma$$

Una fuerza igual en módulo a la tensión T_2 actúa en sentido contrario sobre el extremo del muelle (no está representada en el dibujo) provocando su alargamiento que es de naturaleza elástica.

$$T_2 = k(x + x_i) = kx + kx_i = kx + mg$$

$$mg - k\,x - mg = a\left(\frac{1}{2}M + m\right) \Rightarrow a = -\frac{k}{\frac{1}{2}M + m}\,x = -\omega^2 x \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{\frac{1}{2}M + m}} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}M + m}{k}}$$

203.-(537).- Un cometa describe una órbita elíptica alrededor del Sol con un periodo T =75,7 años. La distancia entre el Sol y el cometa cuando éste se encuentra en el perihelio es 0,60 UA (unidad astronómica). Encontrar la relación entre las velocidades máxima y mínima del cometa.

La velocidad máxima v_M ocurre cuando el cometa pasa por el perihelio y la velocidad mínima v_m cuando pasa por el afelio.

Aplicamos la tercera ley de Kepler al cometa, siendo T el periodo y a el semieje mayor de su órbita

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{75{,}7^2}{a^3} = Cte$$

Aplicamos la misma ley a la Tierra en su órbita alrededor del Sol, considerando que la órbita de la Tierra tiene muy poca excentricidad (entre 0 y 0,06) puede aproximarse a una circunferencia, por ello se puede aproximar su semieje mayor de la órbita por la distancia media al Sol que es una unidad (1 UA) y el periodo de un año

$$\frac{1^2}{1^3} = Cte \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{75{,}7^2}{a^3} \quad \Rightarrow \quad a = 75{,}7^{\frac{2}{3}} = 17{,}9 \ \text{UA}$$

La distancia del Sol al afelio del cometa es r= 2a -0,6.

La conservación del momento angular aplicado entre el perihelio y el afelio y dado que los vectores posición son perpendiculares a las velocidades tanto en el perihelio como en el afelio, se puede escribir la ecuación escalar

$$m\,v_M\,a = m\,v_m\,(2a - 0{,}6) \quad \Rightarrow \quad \frac{v_M}{v_m} = \frac{2a - 0{,}6}{a} = \frac{2 \cdot 17{,}9 - 0{,}6}{0{,}6} = 58{,}7$$

204.-(539).-Desde un suelo horizontal (punto O) se lanza un cuerpo con velocidad inicial v_o=20 m/s, formando un ángulo de 30º con la línea horizontal. Al mismo tiempo desde el suelo, a una distancia +L respecto del punto O de lanzamiento, se lanza otro cuerpo de la misma masa que el anterior con una velocidad en dirección vertical ascendente de módulo v_i tal que se produce un choque entre los dos cuerpos. Los dos movimientos de los cuerpos ocurren en el mismo plano vertical.

a) Calcular el valor que debe tener la velocidad v_i.

b) Suponer que el choque de los dos cuerpos es totalmente inelástico. Calcular la ecuación de la trayectoria del conjunto de los dos cuerpos. Dibujar las gráficas cuando L= 5 m y L= 22 m.

a) Calculemos primero la condición que debe verificar la condición +L para que pueda producirse la colisión

Consideramos unos ejes coordenados cuyo origen es el punto O y el eje de abscisas está sobre el suelo horizontal. La ecuación del cuerpo lanzado desde O es:

$$x = v_o(\cos\alpha)t \quad ; \quad y = v_o(\operatorname{sen}\alpha)t - \frac{1}{2}g\,t^2 \quad (1)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_o\cos\alpha \quad : \quad v_y = \frac{dy}{dt} = v_0\operatorname{sen}\alpha - g\,t$$

Despejando t de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda

$$t = \frac{x}{v_o\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad y = v_o\operatorname{sen}\alpha\frac{x}{v_o\cos\alpha} - \frac{1}{2}\frac{g\,x^2}{v_o^2\cos^2\alpha} \quad \Rightarrow y = x\operatorname{tag}\alpha - \frac{1}{2}\frac{g\,x^2}{v_o^2\cos^2\alpha}$$

El alcance máximo ocurre cuando y=0

$$0 = v_o(\operatorname{sen}\alpha)t - \frac{1}{2}g\,t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2v_o\operatorname{sen}\alpha}{g} \quad \Rightarrow \quad x_{max} = v_o\cos\alpha\cdot\frac{2v_o\operatorname{sen}\alpha}{g} = \frac{v_o^2\operatorname{sen}2\alpha}{g}$$

La ecuación del cuerpo L lanzado desde L es

$$y_i = v_i t - \frac{1}{2}g\,t^2$$

En el momento del encuentro la ordenada de ambos cuerpos es la misma y lo mismo le sucede al tiempo ya que se lanzan simultáneamente

$$v_o(\operatorname{sen}\alpha)t - \frac{1}{2}g\,t^2 = v_i\,t - \frac{1}{2}g\,t^2 \quad \Rightarrow \quad v_i = v_0\operatorname{sen}\alpha$$

la velocidad es independiente de L, luego habrá choque siempre que L sea menor que el alcance máximo del primer cuerpo

$$L < \frac{v_o^2\operatorname{sen}2\alpha}{g}$$

b) En el choque inelástico hay conservación de la cantidad de movimiento, quedando juntos los cuerpos después del choque, pero no hay conservación de la energía cinética.. Habremos de determinar la velocidad del conjunto después del choque , aplicando el principio de conservación ya citado.

Eje X $m\,v_o \cos\alpha$

Eje Y $m\left[\left(v_o \mathrm{sen}\,\alpha - g\,t + v_i - gt\right)\right] = m\left(v_o \mathrm{sen}\,\alpha - g\,t + v_0 \mathrm{sen}\alpha - g\,t\right) \Rightarrow 2m\left(v_o \mathrm{sen}\,\alpha - g\,t\right)$

Las componentes de la cantidad de movimiento de los dos cuerpos unidos con masa 2m

$$2mV_x \;\; ; \;\; 2mV_y$$

Al conservase la cantidad de movimiento se mantiene componente a componente

$$m\,v_o \cos\alpha = 2m\,V_X \quad \Rightarrow \quad V_X = \frac{v_o \cos\alpha}{2} \;(2)$$

$$2m\left(v_o \mathrm{sen}\,\alpha - g\,t\right) = 2mV_Y \quad \Rightarrow \quad V_Y = v_o \mathrm{sen}\,\alpha - g\,t \quad (3)$$

El conjunto de los dos cuerpos de masa 2m describe una trayectoria parabólica. Comenzamos a contar de nuevo el tiempo, designándolo con T, justamente cuando salen los dos cuerpos a partir de una posición x=+L, y = +H

Para L= 5 m, calculamos el valor de H, teniendo en cuenta que ambos puntos pertenecen a la primera parábola del cuerpo de masa m lanzado con velocidad v_o y ángulo α

$$H = L\,\mathrm{tag}\,\alpha - \frac{1}{2}\frac{g\,L^2}{v_o^2 \cos^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad H = 5\cdot\mathrm{tag}30º - \frac{9{,}8\cdot 5^2}{2\cdot 20^2\cdot\cos^2 30} = 2{,}48\,\mathrm{m}$$

Designamos con t_L el tiempo que emplea el móvil de masa m hasta que su trayectoria alcanza los valores de abscisa 5 m y ordenada 2,48 m

$$x = v_o(\cos\alpha)\,t \;\; ,\text{para } t = t_L \Rightarrow \; t_L = \frac{L}{v_o \cos\alpha} \quad \Rightarrow \; V_Y = v_o \mathrm{sen}\,\alpha - g\,t_L \Rightarrow$$

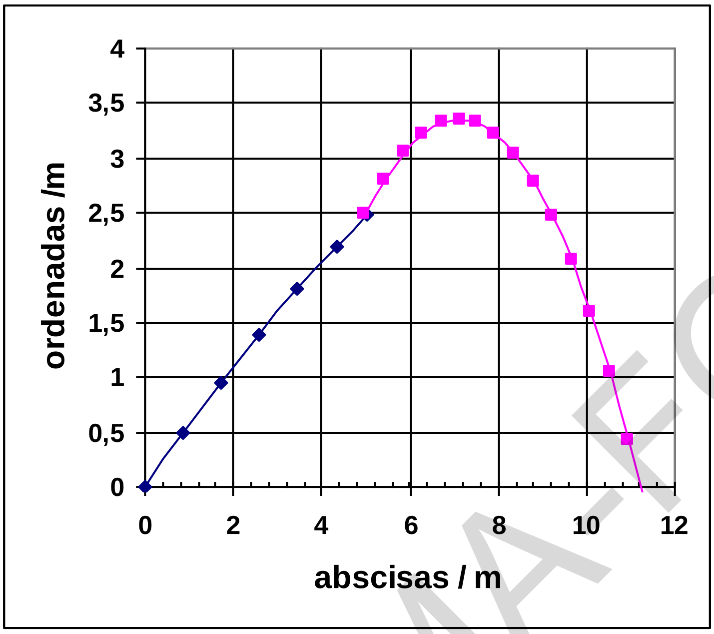
$$V_Y = v_o \mathrm{sen}\,\alpha - g\,\frac{L}{v_o \cos\alpha} \,(4)$$

Sustituyendo los valores numéricos en las componentes de la velocidad, ecuaciones (2) y (4)

$$\left(V_X\right)_{T=0} = \frac{20\cdot\cos 30º}{2} = 8{,}66\,\frac{m}{s} \quad \Rightarrow \; \left(V_Y\right)_{T=0} = 20\cdot\mathrm{sen}30º - \frac{9{,}8\cdot 5}{20\cdot\cos 30º} = 7{,}17\,\frac{m}{s}$$

$$X = 5 + 8{,}66\;T \quad ; \qquad Y = 2{,}48 + 7{,}17\;T - \frac{1}{2}g\;T^2 \quad (5)$$

Representamos en un mismo gráfico las ecuaciones (1) hasta x =L =5 m y las ecuaciones (5)



Para L= 22 m, calculamos el valor de H, teniendo en cuenta que ambos pertenecen a la parábola del cuerpo de masa m lanzado con velocidad v_o y ángulo α

$$H = L\,\mathrm{tag}\,\alpha - \frac{1}{2}\frac{g\,L^2}{v_o^2\cos^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad H = 22\cdot \mathrm{tag}30^o - \frac{9{,}8\cdot 22^2}{2\cdot 20^2\cdot \cos^2 30} = 4{,}8\,\mathrm{m}$$

Calculamos el tiempo que emplea el móvil de masa m hasta que su trayectoria alcanza los valores de abscisa 22 m y ordenada 4,8 m

$$x = v_o(\cos\alpha)\,t \ \ ,\mathrm{para}\ t = t_L \Rightarrow \ t_L = \frac{L}{v_o\cos\alpha} \quad \Rightarrow V_Y = v_o \mathrm{sen}\,\alpha - g\,t_L \Rightarrow$$

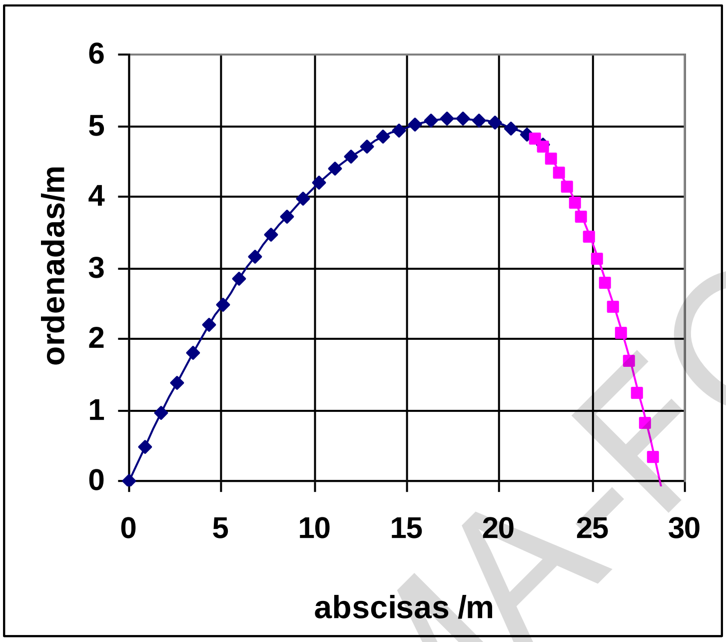
$$V_Y = v_o \mathrm{sen}\,\alpha - g\frac{L}{v_o\cos\alpha} \ (4)$$

Sustituyendo los valores numéricos en las componentes de la velocidad

$$(V_X)_{T=0} = \frac{20\cdot\cos 30^o}{2} = 8{,}66\,\frac{m}{s} \quad \Rightarrow \ (V_Y)_{T=0} = 20\cdot \mathrm{sen}30^o - \frac{9{,}8\cdot 22}{20\cdot\cos 30^o} = -2{,}45\,\frac{m}{s}$$

$$X = 22 + 8{,}66\ T \quad ; \qquad Y = 4{,}8 - 2{,}45\ T - \frac{1}{2}g\ T^2 \quad (6)$$

Representamos en un mismo gráfico las ecuaciones (1) hasta x =L =22 m y las ecuaciones (6)



205.-(540).-Una esfera de masa m se deja caer desde una altura h, la bola rebota y vuelve a caer repetidamente. En cada rebote con el suelo la bola pierde ¾ de su energía mecánica convirtiéndola en calor.
a) Calcular el tiempo para el que la bola queda en reposo sobre el suelo
b) El calor generado en el proceso. Datos. h = 5 m¸ m= 0,2 kg , g= 10 m/s²

a) Inicialmente la esfera tiene una energía potencial m g h, al primer rebote su energía es $mgh-\frac{3}{4}mgh=\frac{1}{4}m\,g\,h$, al segundo rebote su energía es $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}mgh=\frac{1}{16}mgh$, al tercer rebote su energía es $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}mgh=\frac{1}{64}mgh$, al cuarto rebote $\frac{1}{256}mgh$ y así sucesivamente

El tiempo desde la altura h hasta llegar al suelo es: $h=\frac{1}{2}g\,t_1^2 \Rightarrow t_1=\sqrt{\frac{2h}{g}}$

Con τ_2 designamos el tiempo que tarde en subir hasta la altura h/4 que es el mismo que emplea en bajar hasta el suelo y verificar el segundo rebote,

$$\frac{h}{4}=\frac{1}{2}g\,\tau_2^2 \Rightarrow \tau_2=\sqrt{\frac{2h}{4g}}$$

El tiempo de subir y bajar $t_2=2\sqrt{\frac{2h}{4g}}$

Si designamos con τ_3 que tarda en subir hasta la altura h/16, que es el mismo que en bajar

$$\frac{h}{16}=\frac{1}{2}g\,\tau_3^2 \Rightarrow \tau_3=\sqrt{\frac{2h}{16g}} \Rightarrow t_3=2\sqrt{\frac{2h}{16g}}$$

Siguiendo el mismo argumento $t_4=2\sqrt{\frac{2h}{64g}}$ ¸ $t_5=2\sqrt{\frac{2h}{256g}}$

El tiempo total

$$T_T=\sqrt{\frac{2h}{g}}+2\sqrt{\frac{2h}{4g}}+2\sqrt{\frac{2h}{16g}}+2\sqrt{\frac{2h}{64g}}+2\sqrt{\frac{2h}{256g}}+........\Rightarrow$$

$$T_T=\sqrt{\frac{2h}{g}}\left[1+2\left(\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{16}}+\frac{1}{\sqrt{64}}+\frac{1}{\sqrt{256}}+.......\right)\right] \Rightarrow$$

$$T_T=\sqrt{\frac{2h}{g}}\left[1+2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+......\right)\right]$$

La términos que están dentro del paréntesis redondo son una progresión geométrica de razón r= ½, cuya suma es, siendo a el primer término a

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 \quad \Rightarrow \; T_T = \sqrt{\frac{2h}{g}}(1+2\cdot 1) = 3\sqrt{\frac{2\cdot 5}{10}} = 3s$$

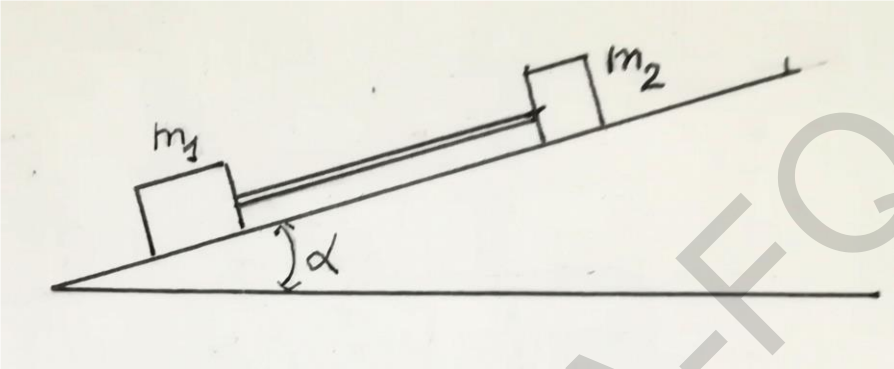
b) Cuando la esfera se detenga su energía inicial que es la potencial se ha convertido en calor

$$E = mgh = 0,2\cdot 10\cdot 5 = 10 \text{ J}$$

206.-** (542).-**En el sistema de la figura las dos masas están enlazadas por una cuerda cuya masa es despreciable. La masa m_1 es tres veces mayor que la masa m_2 . Los coeficientes de rozamiento con el plano son μ_1 y μ_2 respectivamente.

a) Determinar el valor máximo del ángulo del plano inclinado para que los cuerpos no deslicen

b) La tensión de la cuerda en este caso



En la figura 1 se ha hecho un esquema de las fuerzas que actúan sobre cada masa

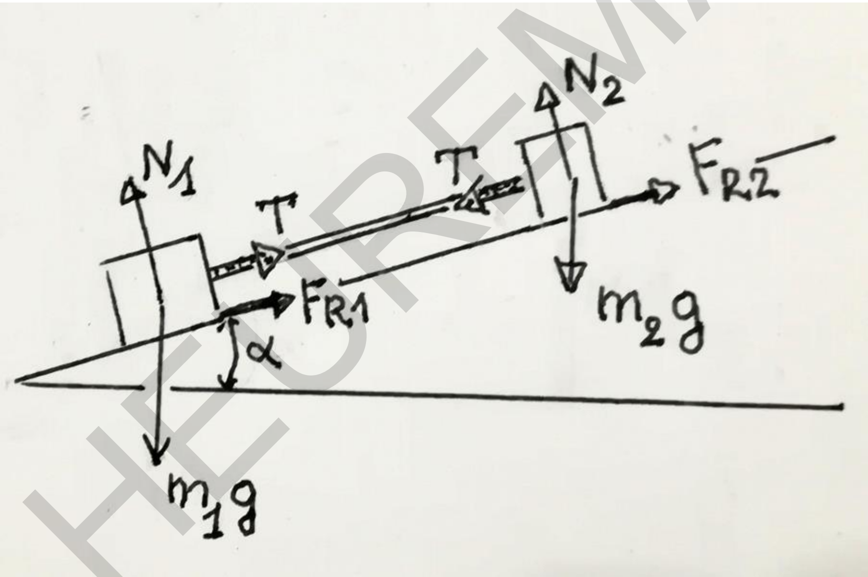


Fig. 1

a) Las fuerzas de rozamiento impiden el deslizamiento de las masas y dado que nos piden el valor máximo del ángulo, las fuerzas de rozamiento tienen el máximo valor que es el producto del coeficiente de rozamiento por la fuerza normal. Para que no haya deslizamiento la suma de las fuerzas sobre cada masa es nula. Consideramos como positivo el sentido hacia abajo del plano

$$m_1 g \operatorname{sen}\alpha - T - \mu_1 m_1 g \cos\alpha = 0 \quad (1)$$

$$m_2 g \operatorname{sen}\alpha + T - \mu_2 m_2 g \cos\alpha = 0 \quad (2)$$

Sumamos las ecuaciones (1) y (2)

$$g\,\text{sen}\,\alpha\left(m_1 + m_2\right) - g\cos\alpha\left(\mu_1\, m_1 + \mu_2\, m_2\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g\,\text{sen}\,\alpha\left(m_1 + \frac{m_1}{3}\right) - g\cos\alpha\left(\mu_1\, m_1 + \mu_2\,\frac{m_1}{3}\right) = 0 \;\;\Rightarrow\quad 4\,\text{sen}\,\alpha - \cos\alpha\left(3\mu_1 + \mu_2\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 4\ \text{tag}\,\alpha = 3\mu_1 + \mu_2 \quad \Rightarrow \quad \text{tag}\,\alpha = \frac{3\mu_1 + \mu_2}{4}$$

b) Cambiamos de signo la ecuación (1) y la sumamos a la (2)

$$2T + g\,\text{sen}\,\alpha\left(m_2 - m_1\right) + g\cos\alpha\left(\mu_1\, m_1 - \mu_2\, m_2\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2T + g\,\text{sen}\,\alpha\left(\frac{m_1}{3} - m_1\right) + g\cos\alpha\left(\mu_1\, m_1 - \mu_2\,\frac{m_1}{3}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2T = \frac{2}{3}\, m_1\, g\,\text{sen}\,\alpha - g\cos\alpha\left(\frac{3\mu_1\, m_1 - \mu_2 m_1}{3}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{m_1 g}{6}\left[2\,\text{sen}\,\alpha - \cos\alpha\left(3\mu_1 - \mu_2\right)\right]$$

207.-(544).-Un embudo tiene forma de tronco de cono invertido siendo el radio mayor R = 3 cm y el menor r = 1 mm, La altura entre ambas bases es H = 10 cm, Tapando la base inferior se llena de agua. A continuación se deja libre la base inferior para que el agua fluya al exterior del embudo. Calcular el tiempo que tarda en vaciarse. Se supone que el agua es un fluido ideal.

En la figura 1 se supone que el agua del embudo tiene una altura h y dado que el fluido es ideal la velocidad de salida del agua es $v = \sqrt{2gh}$

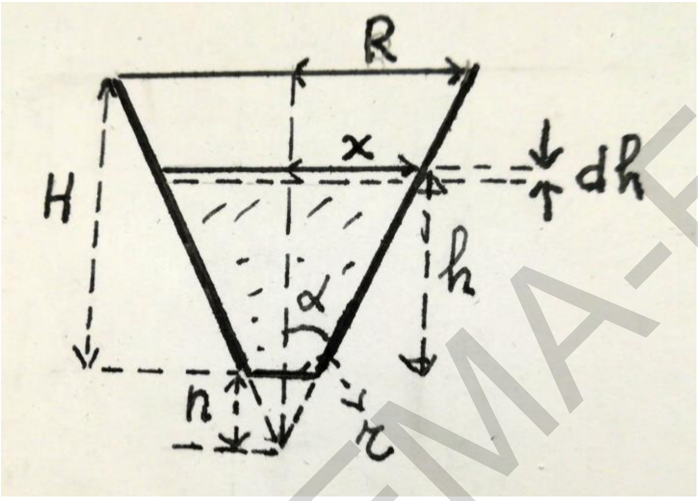


Fig. 1

El producto de la velocidad de salida del agua por la sección de salida ($S = \pi r^2$) nos da el valor del volumen de agua que se evacuan en la unidad de tiempo llamado gasto, G.

$$G = \frac{V}{t} = v \cdot S$$

Si consideramos un tiempo dt, teniendo en cuenta que aquí, la velocidad de salida v es variable porque va disminuyendo la altura h de la columna líquida con el tiempo, resulta que para una altura genérica h a medida que sale el fluido

$$dV = v \cdot S \cdot dt = \sqrt{2gh}\,\pi r^2\,dt$$

el producto $\sqrt{2gh}\,\pi r^2\,dt$ representa el volumen de agua evacuada en ese tiempo dt.

Este volumen hace disminuir la altura del agua en el embudo, luego: ese volumen también es igual a $\pi x^2 dh$

$$\sqrt{2gh} \cdot \pi r^2\,dt = \pi x^2 dh \quad (1)$$

Relacionamos las variables x y h

$$\operatorname{tag}\alpha = \frac{R}{H+n} = \frac{x}{h+n} \quad \Rightarrow \quad x = R\,\frac{h+n}{H+n}$$

Calculamos el valor de n

$$\operatorname{tag}\alpha = \frac{R}{H+n} = \frac{r}{n} \quad \Rightarrow \; R\,n = rH + r\,n \quad \Rightarrow n = \frac{rH}{R-r} = \frac{0{,}1 \cdot 10}{3-0{,}1} = 0{,}34\,\text{cm}$$

Sustituyendo x en la ecuación (1)

$$\sqrt{2gh}\cdot r^2\,dt = \frac{R^2}{(H+n)^2}(h+n)^2\,dh \;\Rightarrow\; dt = \frac{R^2}{r^2\cdot(H+n)^2}\cdot\frac{h^2+n^2+2hn}{\sqrt{2gh}}\,dh$$

Integrando la ecuación anterior

$$t = \frac{R^2}{r^2(H+n)^2}\int\frac{h^2+n^2+2hn}{\sqrt{2gh}}\,dh$$

Para resolver la integral anterior hacemos el siguiente cambio de variable

$$2gh = p^2 \;\Rightarrow\; g\,dh = p\,dp \;\Rightarrow dh = \frac{p\,dp}{g} \quad ; \quad h^2 = \frac{p^4}{4g^2}$$

Sustituyendo en la integral

$$\int_0^H \frac{p^4}{4g^2}\cdot\frac{1}{p}\cdot p\frac{dp}{g} + \frac{n^2}{p}\cdot p\frac{dp}{g} + \frac{2n}{p}\cdot\frac{p^2}{2g}p\frac{dp}{g} = \frac{p^5}{20g^3} + \frac{n^2p}{g} + \frac{np^3}{3g^2}$$

Sustituimos por h

$$\frac{p^5}{20g^3} = \frac{(2gh)^{\frac{5}{2}}}{20g^3} = \frac{2^{\frac{5}{2}}\cdot h^{\frac{5}{2}}}{20\sqrt{g}} = 0,283\,\frac{h^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{g}} \quad ; \quad \frac{n^2p}{g} = \frac{n^2\sqrt{2gh}}{g} = \frac{n^2\sqrt{2h}}{\sqrt{g}}$$

$$\frac{np^3}{3g^2} = \frac{n(2gh)^{\frac{3}{2}}}{3g^2} = \frac{n\cdot 2^{\frac{3}{2}}\cdot h^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{g}} = \frac{0,94n\;h^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{g}}$$

$$t = \frac{R^2}{r^2(H+n)^2}\left[0,283\,\frac{h^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{g}} + \frac{n^2\sqrt{2h}}{\sqrt{g}} + \frac{0,94n\,h^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{g}}\right]_0^H \;\Rightarrow$$

$$t = \frac{\left(\frac{R}{r}\right)^2}{(H+n)^2\sqrt{g}}\left[0,283\;H^{\frac{5}{2}} + n^2\sqrt{2H} + 0,94n\,H^{\frac{3}{2}}\right] \;\Rightarrow$$

$$t = \frac{\left(\frac{3}{0,1}\right)^2}{(10,34.10^{-2})^2\sqrt{9,8}}\left[0,283\,(10.10^{-2})^{\frac{5}{2}} + \left|0,34.10^{-2}\right|^2\sqrt{2(10.10^{-2})} + (0,32,10^{-2})(10..10^{-2})^{\frac{3}{2}}\right] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; t = 26890\left(8,95.10^{-4} + 5,17.10^{-6} + 1,01.10^{-4}\right) = 27\,s$$

208.-(545).-Una fuente que genera un sonido armónico de frecuencia constante f_o cae verticalmente en el campo gravitatorio terrestre y en un instante t_o pasa ante un micrófono estacionario con una velocidad v_o. El reloj situado en el micrófono detecta que t = 5 s antes de t_o el micrófono ha registrado una señal armónica de frecuencia f_1 = 1200 Hz. Transcurridos otros t=5s después de t_o el micrófono registra una señal de frecuencia f_2 = 800 Hz. La velocidad del sonido es v_S = 340 m/s. Calcular f_o y v_o,

Consideramos que la fuente se encuentra a una altura h_1 respecto del micrófono y su velocidad es v_1 vertical y hacia abajo. Es a esa altura cuando la fuente emite una onda de frecuencia f_o. Designamos con t_1 el tiempo que emplea la fuente en llegar al micrófono, esto es, el tiempo que tarda en recorrer la distancia h_1, con aceleración g = 9,8 m/s^2 .La onda debe recorrer la misma distancia h_1 desde que sale de la fuente hasta el micrófono, pero llega t= 5 antes que la fuente

Ecuaciones para la fuente que lleva un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado tomando el sentido positivo vertical y hacia el suelo..Asignamos con v_1 la velocidad de la fuente 5 s antes de que la onda alcance al micrófono, con h_1 la distancia y con t_i el tiempo que tarda en recorrerla y que es distinto a los 5s porque la fuente se mueve con movimiento uniformemente acelerado y la onda con movimiento uniforme.

$$h_1 = v_1 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2 \quad ; \quad v_o = v_1 + g t_1 \quad \Rightarrow \quad h_1 = (v_o - g t_1) t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad h_1 = v_o t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$$

Ecuación para la onda

$$h_1 = v_S (t_1 - t)$$

Igualamos las dos ecuaciones

$$v_o t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = v_S (t_1 - t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} g t_1^2 - (v_o - v_S) t_1 - v_S t = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = \frac{(v_o - v_S) \pm \sqrt{(v_o - v_S)^2 + 2 g v_S t}}{g}$$

En el segundo caso, designamos con h_2 la altura a la que se encuentra la fuente por debajo del micrófono y con t_B el tiempo empleado por la fuente en ese recorrido; su velocidad vertical y hacia bajo es v_2. En ese instante se emite la onda que viaja hacia el micrófono. La onda recorre la distancia h_2 y emplea un tiempo tc
Se cumple que $t_B + t_C = t = 5$segundos

Ecuaciones para la fuente

$$h_2 = v_o t_B + \frac{1}{2} g t_B^2 \quad ; \quad v_2 = v_o + g t_B$$

Ecuación para la onda

$$h_2 = v_S\, t_C = v_S \left(t - t_B\right)$$

Igualamos las dos ecuaciones

$$v_o t_B + \frac{1}{2} g\, t_B^2 = v_S t - v_S\, t_B \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} g\, t_B^2 + t_B (v_o + v_S) - v_S t = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ t_B = \frac{-\left[v_o + v_S\right] \pm \sqrt{\left(v_o + v_S\right)^2 + 2 g\, v_S t}}{g}$$

En ambos casos, el observador se encuentra en reposo, esto es, el micrófono, en el primer caso la fuente se acerca al observador y la ecuación del efecto Doppler es.

$$f_1 = \frac{f_o}{1 - \frac{v_1}{v_S}} = \frac{f_o\, v_S}{v_S - v_1}$$

En el segundo caso la fuente se aleja del observador y la expresión es:

$$f_2 = \frac{f_o}{1 + \frac{v_2}{v_S}} = \frac{f_o\, v_S}{v_S + v_2}$$

Dividiendo estas ecuaciones resulta.

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{v_S + v_2}{v_S - v_1} = \frac{v_S + v_o + g\, t_B}{v_S - \left(v_o - g\, t_1\right)} = \frac{1200}{800} \quad \Rightarrow \quad 1{,}5 = \frac{340 + v_o + 9{,}8\, t_B}{340 - v_o + 9{,}8\, t_1} \qquad (1)$$

Los tiempos t_B y t_1 dependen de v_o

$$t_B = \frac{-\left(v_o + 340\right) + \sqrt{\left(v_o + 340\right)^2 + 2 \cdot 9{,}8 \cdot 340 \cdot 5}}{9{,}8} = \frac{-\left(v_o + 340\right) + \sqrt{\left(v_o + 340\right)^2 + 33320}}{9{,}8} \qquad (2)$$

$$t_1 = \frac{\left(v_o - 340\right) \pm \sqrt{\left(v_o - 340\right)^2 - 2 g\, v_S\, t}}{g} = \frac{\left(v_o - 340\right) \pm \sqrt{\left(v_o - 340\right)^2 + 33320}}{9{,}8} \qquad (3)$$

Para calcular v_o procederemos por tanteo, damos un valor a la velocidad v_o , calculamos t_B y t_1 mediante las ecuaciones (2) y (3) , los valores obtenidos los llevamos al segundo miembro de la ecuación (1) . La solución será el valor de v_o que el segundo miembro de (1) valga 1,5.

$v_o/m.s^{-1}$	v_o -340	$(v_o -340)^2$	$(C+33320)^{0,5}$	(B+D)/9,8	$(v_o +340)\cdot(-1)$	F^2
20	-320	102400	368,4019544	4,93897494	-360	129600
40	-300	90000	351,1694748	5,22137498	-380	144400
60	-280	78400	334,2454188	5,53524682	-400	160000
70	-270	72900	325,9140991	5,70552032	-410	168100
79	-261	68121	318,4980377	5,8671467	-419	175561
80	-260	67600	317,6790834	5,88562075	-420	176400
85	-255	65025	313,6000638	5,97959834	-425	180625
88	-252	63504	311,1655508	6,0373011	-428	183184
88,5	-251,5	63252,25	310,7607601	6,04701633	-428,5	183612,25
88,7	**-251,3**	**63151,69**	**310,5989214**	**6,05091035**	**-428,7**	**183783,69**
90	-250	62500	309,5480577	6,07633241	-430	184900
91	-249	62001	308,7409918	6,09601957	-431	185761

	t_B	Numerador	Denominador	f1/F2
$(G+33320)^{0,5}$	(H+F)/9,8	$340+v_o+9{,}8\cdot t_b$	$340-v_o+9{,}8\cdot t1$	
403,6334971	4,45239767	403,6334971	368,4019544	1,095633431
421,5684998	4,24168365	421,5684998	351,1694748	1,200470229
439,6817031	4,04915337	439,6817031	334,2454188	1,315445712
448,7983957	3,95901997	448,7983957	325,9140991	1,377045046
457,0350096	3,88112343	457,0350096	318,4980377	1,434969625
457,9519625	3,87264924	457,9519625	317,6790834	1,441555288
462,54189	3,8308051	462,54189	313,6000638	1,474941951
465,2999033	3,80611258	465,2999033	311,1655508	1,495345169
465,759863	3,80202684	465,759863	310,7607601	1,498773085
465,94387	**3,8003949**	**465,94387**	**310,5989214**	**1,500146452**
467,1402359	3,78981999	467,1402359	309,5480577	1,509104077
468,0608935	3,78172382	468,0608935	308,7409918	1,516030932

La velocidad es v_o= 88,7 m/s

$$f_1 == \frac{f_o\, v_S}{v_S - v_1} \Rightarrow f_o = f_1 \frac{v_S - v_1}{v_S} = f_1 \frac{v_S - \left(v_o - g\, t_1\right)}{v_S} = 1200 \frac{340 - \left(88{,}7 - 9{,}8\cdot 6{,}051\right)}{340} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_o = 1096 \text{ Hz}$$

209.-**(546)**.-Sobre un suelo horizontal están dispuestos un muelle de constante k y unido a él una masa M. El muelle en la situación inicial no tiene tensión El coeficiente de rozamiento entre la masa y el suelo es μ (se admite que los dos coeficientes, estático y dinámico, son iguales) En el instante t=0 a la masa M se le comunica una velocidad horizontal v_o.
a) Determinar la longitud x máxima a la que puede llegar la masa M respecto del punto de partida. b) Determinar qué condición debe cumplir la velocidad de la masa M para que alcanzada la máxima distancia pueda retroceder hacia la posición inicial.
c) Representar la distancia x (eje Y) para los distintos valores de μ (eje X) comprendidos entre 0,1 y 0,9 si M= 1 kg , k = 1 N/m, v_o= 10 m/s.
d) Analizar el movimiento de retroceso calculando para qué coeficientes de rozamiento la masa llega o no a la posición inicial

a) El sistema en el instante t=0 , tiene energía cinética , la cual va disminuyendo debido a que aumenta la energía potencial elástica del muelle y se disipa parte de la energía debido al rozamiento de la masa con el suelo.

La fuerza de rozamiento es $\mu N = \mu P = \mu M g$

$$\frac{1}{2} M v_o^2 = \frac{1}{2} k x^2 + \mu M g x \;.\Rightarrow M v_o^2 = k x^2 + 2\mu M g x \quad \Rightarrow k x^2 + 2\mu M g x - M v_0^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$$x = \frac{-2\mu M g \pm \sqrt{4\mu^2 M^2 g^2 + 4 k M v_0^2}}{2k}$$

La solución válida es

$$x = \frac{-\mu M g + \sqrt{\mu^2 M^2 g^2 + k M v_0^2}}{k} \quad (1)$$

b) Cuando la masa alcance la máxima distancia x, su velocidad es nula en ese instante y puede ocurrir que ahí quede parada o que pueda retroceder.

Podrá retroceder si la fuerza elástica kx que tira hacia la posición central es superior a la fuerza de rozamiento máxima que apunta en sentido contrario

$$kx > \mu M g \quad \Rightarrow \; x > \frac{\mu M g}{k} \quad \Rightarrow \frac{-\mu M g + \sqrt{\mu^2 M^2 g^2 + k M v_0^2}}{k} > \frac{\mu M g}{k} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\mu M g + \sqrt{\mu^2 M^2 g^2 + k M v_0^2} > \mu M g \quad \Rightarrow \sqrt{\mu^2 M^2 g^2 + k M v_0^2} > 2\mu M g \;\Rightarrow$$

$$\mu^2 M^2 g^2 + k M v_0^2 > 4\mu^2 M^2 g^2 \quad \Rightarrow \; k M v_0^2 > 3\mu^2 M^2 g^2 \quad \Rightarrow v_o^2 > \frac{3\mu^2 M^2 g^2}{k M} \Rightarrow$$

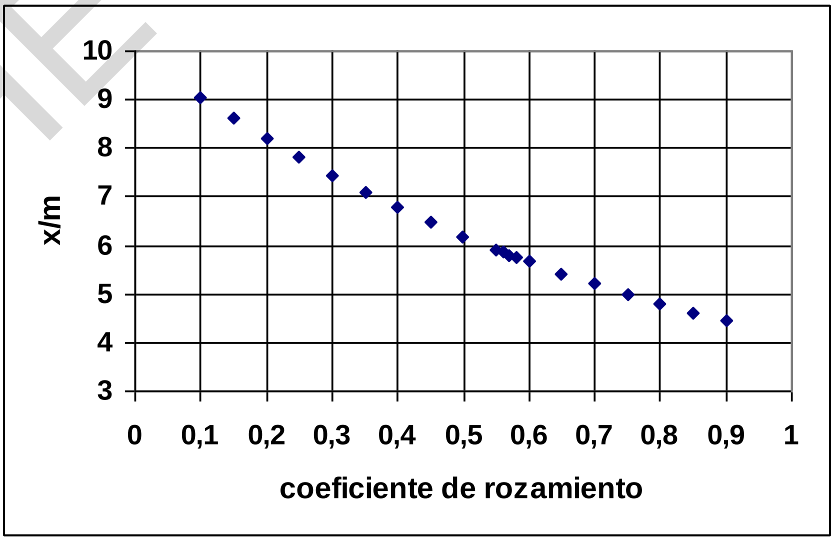
$$\Rightarrow \quad v_o > \sqrt{\frac{3M}{k}}\, \mu g \;(2)$$

c) Damos valores a la ecuación (1)

$$x = -10\,\mu + \sqrt{100\,\mu^2 + 10^2} \quad \Rightarrow x = -10\,\mu + 10\,\sqrt{1 + u^2} \Rightarrow \qquad x = 10\ (\sqrt{1+\mu^2} - \mu)$$

	M= 1 kg	k= 1 N/m
μ	$(1+\mu^2)^{0,5}$	x
0,1	1,00498756	9,04987562
0,15	1,01118742	8,61187421
0,2	1,0198039	8,19803903
0,25	1,03077641	7,80776406
0,3	1,04403065	7,44030651
0,35	1,05948101	7,09481005
0,4	1,07703296	6,77032961
0,45	1,09658561	6,4658561
0,5	1,11803399	6,18033989
0,55	1,14127122	5,91271221
0,56	1,1461239	5,86123903
0,57	1,15104301	5,81043005
0,58	1,15602768	5,76027681
0,6	1,16619038	5,66190379
0,65	1,19268604	5,42686044
0,7	1,22065556	5,20655562
0,75	1,25	5
0,8	1,28062485	4,80624847
0,85	1,31244047	4,62440475
0,9	1,3453624	4,45362405

La representación de x frente a μ es



:

D) La ecuación (2) nos permite deducir el valor límite de μ para que no haya retroceso

$$10 > \sqrt{3}\mu 10 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{3}} > \mu \;\Rightarrow\; 0{,}577 > \mu$$

Si μ supera el valor de 0,577 no hay retroceso y sí lo hay con coeficientes menores.. Cumplida la anterior ecuación, calculamos la longitud del retroceso respecto del punto de parada instantáneo

En el momento de la parada la energía del sistema es la almacenada en el muelle, como energía potencial elástica, al retroceder la masa M y llegar a pararse, toda la energía elástica del muelle se ha empleado en hacer trabajo, contra el trabajo efectuado por la fuerza de rozamiento, que por tratarse de una fuerza disipativas la evacua del sistema en forma de calor.

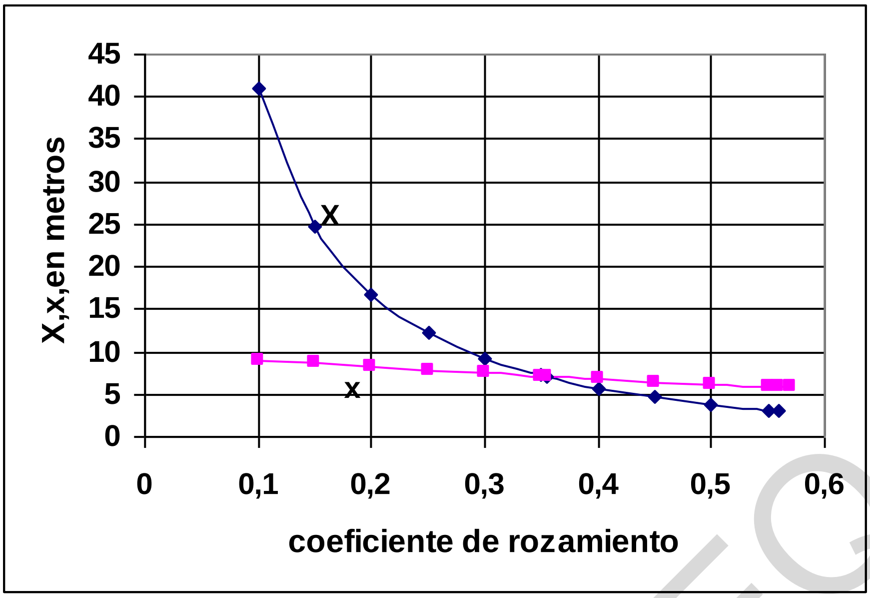
$$\frac{1}{2}k x^2 = \mu M g X \;\Rightarrow\; X = \frac{x^2}{2\mu M g}$$

Para nuestros valores numéricos $X = \dfrac{x^2}{20\mu}$ (3)

Ahora pueden ocurrir tres casos que dependerán del valor del coeficiente de rozamiento. a) Que en el retroceso la masa M se pare y el muelle quede estirado b) Que el cuerpo se pare y quede justamente con el muelle sin tensión, esto es, que esté en la posición inicial c) Que la masa M comprima al muelle, esto ocurrirá si su velocidad al llegar a la posición inicial es mayor que cero.

Para analizarlo los tres casos posibles representamos los valores de x y X (los de X obtenidos con la ecuación 3) en una gráfica frente al coeficiente de rozamiento.

μ	$(1+\mu^2)^{0,5}$	x	X
0,1	1,00498756	9,04987562	40,9501244
0,15	1,01118742	8,61187421	24,7214591
0,2	1,0198039	8,19803903	16,801961
0,25	1,03077641	7,80776406	12,1922359
0,3	1,04403065	7,44030651	9,22636016
0,35	1,05948101	7,09481005	7,19090424
0,354	1,06080913	7,06809125	7,05620253
0,4	1,07703296	6,77032961	5,72967039
0,45	1,09658561	6,4658561	4,64525501
0,5	1,11803399	6,18033989	3,81966011
0,55	1,14127122	5,91271221	3,17819688
0,56	1,1461239	5,86123903	3,0673324



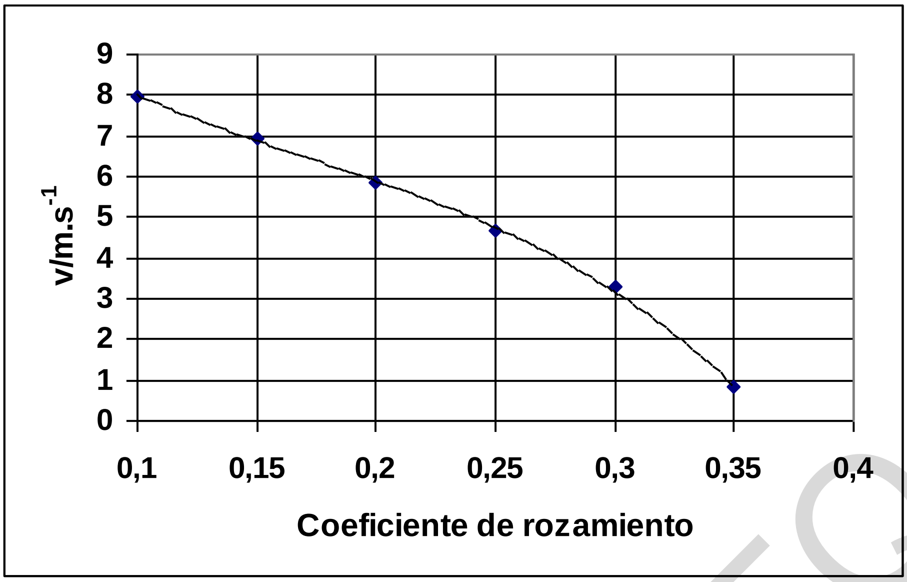
Las dos curvas se cortan con $\mu = 0{,}354$, como la ecuación (3) se ha hecho en el supuesto de que la velocidad en el retroceso es cero, ese μ corresponde a que la masa M se detiene en la posición inicial, los valores X por encima de ese punto llegan a la posición inicial con cierta velocidad y los que están por debajo se paran antes de esa posición.

Para los valores que llegan a la posición inicial con velocidad la ecuación no es la (3) sino la siguiente que resulta de aplicar de nuevo el principio de conservación de la energía

$$\frac{1}{2}kx^2 = \mu Mg\,x + \frac{1}{2}M\,v^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{k\,x^2 - 2\,\mu\,g\,x}{M} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{x^2 - 20\,\mu\,x}$$

Damos valores a μ en la ecuación y representamos el coeficiente de rozamiento en el eje de abscisas frente a la velocidad en el de ordenadas.

		x^2-20·µ·x	v = $(x^2$-20·µ·x$)^{0.5}$
µ	x		
0,1	9,04987562	63,8004975	7,98752136
0,15	8,61187421	48,3287548	6,95188857
0,2	8,19803903	34,4156878	5,86648854
0,25	7,80776406	21,9223594	4,68213192
0,3	7,44030651	10,7163219	3,27357937
0,35	7,09481005	0,6726593	0,82015809



Resumen. Con M = 1 kg , k = 1 N/m , g =10 m/s^2 , v_o = 10 m/s la masa M se desplaza condicionada por el coeficiente de rozamiento

Si el coeficiente de rozamiento es mayor que 0,57 la masa se desplaza hacia la derecha hasta que su velocidad se anula y queda en esa posición.

Si el coeficiente de rozamiento es menor que 0,57 se desplaza hacia la derecha hasta que su velocidad se anula y a continuación se desplaza hacia la izquierda y pueden suceder dos casos a) si el coeficiente de rozamiento es mayor que 0,354 la masa M se para antes de llegar a la posición inicial y el muelle queda con tensión. Si el coeficiente de rozamiento es menor que 0,354 la masa M llega a la posición inicial con velocidad y comprime al muelle.

Si el coeficiente de rozamiento es 0,354 la masa M regresa a la posición inicial y allí su velocidad es nula, por tanto, el muelle queda sin tensión.