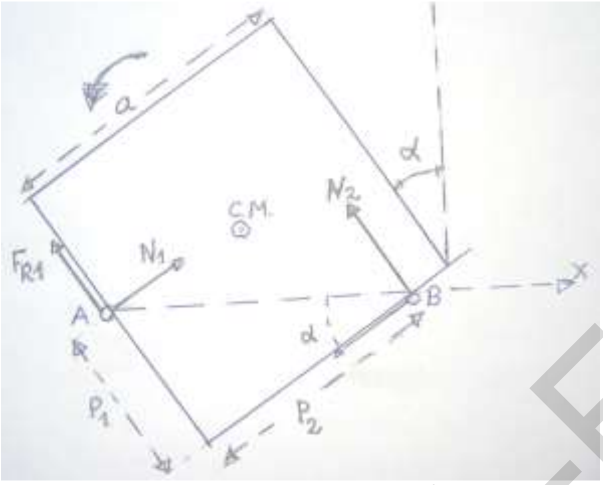
11.- Un cubo de arista a, se apoya sobre dos varillas Ay B dispuestas horizontalmente con una distancia entre ellas igual a la arista a del cubo. Si el coeficiente de rozamiento es 0,2, para qué valores del ángulo α el cubo puede mantenerse en equilibrio.



La posición de equilibrio más estable del cubo es cuando α = 45º. En la figura superior el cubo aparece desplazado y si no hubiese rozamiento tendería a girar en el sentido de la flecha, esto es, en sentido contrario a las agujas del reloj, hasta alcanzar la posición de 45º. En esa situación se han dibujado las fuerzas que actúan sobre el cubo.
Si desplazásemos el cubo hacia la derecha las fuerzas de rozamiento tendrían sentido contrario a las dibujadas en la figura y el cubo de no existir rozamiento se desplazaría en el sentido de las agujas del reloj.

Si el cubo está en equilibrio se cumple que la suma de las fuerzas sobre el eje X es nula y el momento de las fuerzas respecto del centro de masas, C.M., también es nulo.

$$-F_{R1}\operatorname{sen}\alpha + N_1\cos\alpha - N_2\operatorname{sen}\alpha - F_{R2}\cos\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad N_1\cos\alpha = F_{R1}\operatorname{sen}\alpha + N_2\operatorname{sen}\alpha + F_{R2}\cos\alpha \qquad (1)$$

Los momentos de las fuerzas dirigidos hacia dentro del papel se consideran positivos y hacia fuera negativos.

$$F_{R1}\frac{a}{2} - N_1\left(\frac{a}{2} - p_1\right) + F_{R2}\frac{a}{2} - N_2\left(p_2 - \frac{a}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F_{R1}\frac{a}{2} - N_1\left(\frac{a}{2} - a\ \operatorname{sen}\alpha\right) + F_{R2}\frac{a}{2} - N_2\left(p_2 - \frac{a}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F_{R1} + F_{R2} = N_1(1 - 2\ \operatorname{sen}\alpha) + N_2(2\cos\alpha - 1) \qquad (2)$$

Los valores de las fuerzas de rozamiento son: $F_{R1} \le \mu N_1$; $F_{R2} \le \mu N_2$ (3)

De la ecuación (1) se deduce:

$$N_1 = F_{R1}\text{tag}\alpha + N_2\text{tag}\alpha + F_{R2} \Rightarrow \quad F_{R1}\text{tag}\alpha + F_{R2} = N_1 - N_2\text{tag}\alpha \ \ (4)$$

A partir de las ecuaciones (3)

$$F_{R1}\text{tag}\alpha \le \mu N_1\text{tag}\alpha \quad ; \quad F_{R2} \le \mu N_2 \quad \Rightarrow \quad F_{R1}\text{tag}\alpha + F_{R2} \le \mu\left(N_1\text{tag}\alpha + N_2\right) \ (5)$$

De las ecuaciones (4) y (5)

$$\mu\left(N_1\text{tag}\alpha + N_2\right) \ge N_1 - N_2\text{tag}\alpha \quad \Rightarrow \quad \mu N_1\text{tag}\alpha \ge N_1 - N_2\text{tag}\alpha \text{ - } \mu N_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mu N_1\text{tag}\alpha - N_1 \ge -N_2\left(\text{tag}\alpha + \mu\right) \Rightarrow N_1\left(1-\mu\ \ \text{tag}\alpha\right) \le N_2\left(\text{tag}\alpha + \mu\right) \Rightarrow$$

$$1-\mu\ \ \text{tag}\alpha \le \frac{N_2}{N_1}\left(\text{tag}\alpha + \mu\right) \Rightarrow \frac{1-\mu\ \ \text{tag}\alpha}{\text{tag}\alpha + \mu} \le \frac{N_2}{N_1} \quad (6)$$

De las ecuaciones (3) : $F_{R1} + F_{R2} \le \mu\left(N_1 + N_2\right)$ (7)

De las ecuaciones (7) y (2)

$$\mu\left(N_1 + N_2\right) \ge N_1\left(1-2\ \ \text{sen}\alpha\right) + N_2\left(2\cos\alpha - 1\right) \Rightarrow$$

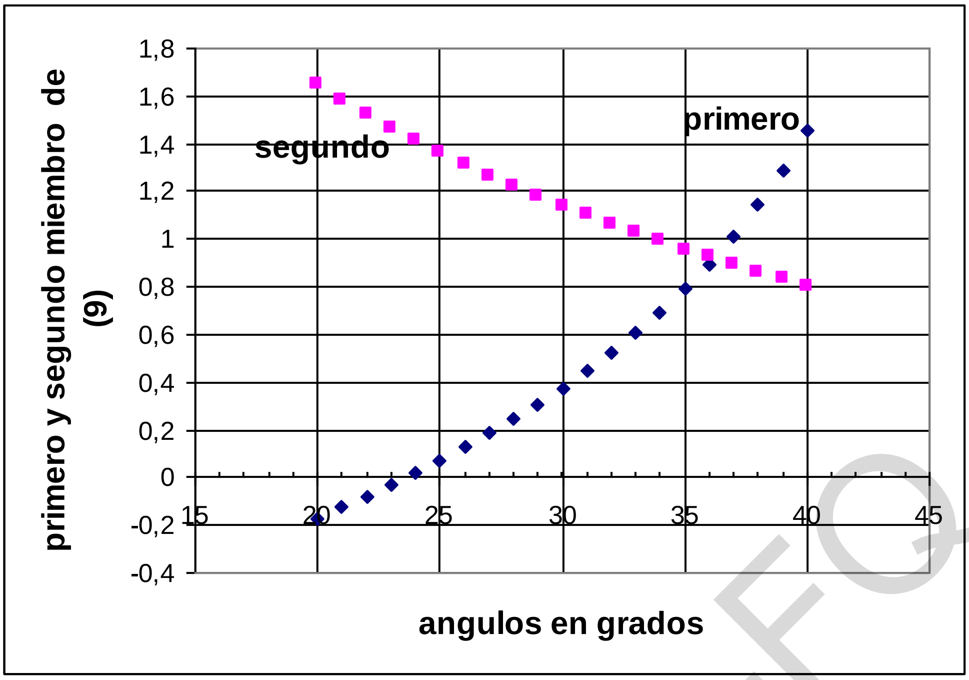
$$\Rightarrow \mu N_1 - N_1\left(1-2\ \ \text{sen}\alpha\right) \ge N_2\left(2\cos\alpha - 1\right) - \mu N_2 \Rightarrow \mu - 1 + 2\ \ \text{sen}\alpha \ge \frac{N_2}{N_1}\left(2\cos\alpha - 1 - \mu\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mu - 1 + 2\ \ \text{sen}\alpha}{2\cos\alpha - 1 - \mu} \ge \frac{N_2}{N_1} \qquad (8)$$

Comparando las ecuaciones (8) y (6), se deduce que

$$\frac{\mu - 1 + 2\ \ \text{sen}\alpha}{2\cos\alpha - 1 - \mu} \ge \frac{1-\mu\ \ \text{tag}\alpha}{\mu + \text{tag}\alpha} \ \ (9)$$

La inecuación (9) se resuelve mediante la hoja de cálculo en forma gráfica.

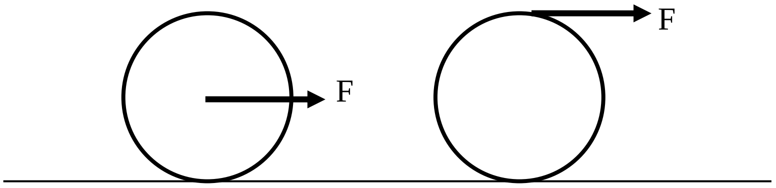


Aproximadamente a unos 36º se igualan los valores del primer miembro con el segundo y a partir de ahí el primero es mayor que el segundo tal como exige el problema. Si se precisa algo más el cálculo resulta que

ángulo	Primer miembro	Segundo miembro
36,1	0,9075	0,9198
36,2	0,9188	0,9166

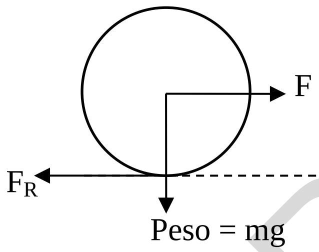
Entre 36,2º y 45º hay equilibrio, en el intervalo 45-36,2 = 8,8º y si el cubo se sitúa desplazado para que gire en sentido de las agujas del reloj hay equilibrio entre 45º y 53,8º. En total hay equilibrio desde 36,2 º a 53,8 º.

12.-Dos cilindros idénticos, de radio R, están en reposo sobre un suelo horizontal. A uno de ellos se le aplica una fuerza F en su centro y al otro en la periferia, tal como indica la figura inferior



El coeficiente de rozamiento de los cilindros con el plano es el mismo μ. Se pide calcular la fuerza máxima F que puede aplicarse a cada cilindro sin que se produzca deslizamiento y las aceleraciones de sus centros de masas.

Sobre el primer cilindro actúan las fuerzas que se indican en la figura 1



F = Fuerza aplicada
F_R = fuerza de rozamiento
Peso del cilindro, P = mg

Fig.1

Las ecuaciones del movimiento del cilindro para la traslación y rotación son:

$$\left.\begin{aligned} F - F_R &= ma \\ F_R * R &= I\alpha \\ a_{CM} &= \alpha\ R \end{aligned}\right\}$$

La última ecuación se cumple siempre que el cilindro no deslice. Si se aumenta el valor de F la aceleración del centro de masas aumenta y también la aceleración angular por lo que F_R debe aumentar. Ahora bien esta fuerza de rozamiento no puede aumentar indefinidamente sino que alcanza un valor máximo $F_R = \mu$ mg que se corresponde con un valor máximo de $F = F_{max}$, y el cilindro rueda sin deslizar. Si F supera ese valor máximo entonces se produce rodadura y deslizamiento.

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores resulta:

$$F_{max} - \mu\ mg = ma$$

$$\mu\ mg * R = I\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \mu\ mg * R = \frac{1}{2} mR^2 * \frac{a_{CM}}{R} \qquad \Rightarrow \qquad a_{CM} = 2\mu\ g$$

$$a_{CM} = \alpha\ R$$

Sustituyendo la aceleración hallada en la primera ecuación

$$F_{max} = 2m\mu\ g + \mu\ mg = 3\mu\ mg$$

Para el segundo cilindro las fuerzas se indican en la figura 2.

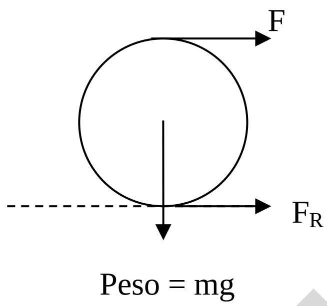


Fig. 2

Aquí la fuerza de rozamiento actúa en el sentido del movimiento del centro de masas. Veamos el porqué. F y F_R actúan creando una aceleración hacia la derecha de valor

$$F + F_R = ma$$

El momento de la fuerza F tiene sentido contrario al de la fuerza de rozamiento, El momento de F crea una aceleración angular para que el cilindro ruede hacia delante, mientras que el momento de F_R se opone a ello.

$$(F - F_R) * R = I\alpha$$

Si la fuerza F_R actuase en sentido contrario a como lo hace estaríamos ante una situación paradójica, los dos momentos de ambas fuerzas tienden a hacer rodar hacia delante el cilindro, pero la F_R se opone a las traslación del centro de masas.
Cuando la fuerza de rozamiento alcance su valor máximo $F_R = \mu$ mg , la fuerza aplicada F es la máxima.

$$F_{max} + \mu\ mg = ma$$

$$F_{max} - \mu\ mg = \frac{I\alpha}{R} = \frac{\frac{1}{2} mR^2 * \frac{a}{R}}{R} = \frac{1}{2} ma$$

Restando las ecuaciones anteriores

$$2\mu\, mg = \frac{1}{2} ma \quad \Rightarrow \quad a = 4\mu\, g$$

y

$$F_{max} = ma - \mu\, mg = 3\mu\, mg$$

Si la fuerza de rozamiento actuase como en le caso 1, las ecuaciones serían

$$F - F_R = ma$$
$$(F + F_R) * R = I\alpha$$
$$a_{CM} = \alpha\, R$$

Operando con estas tres ecuaciones

$$F_{max} - \mu\, mg = ma$$
$$F_{max} + \mu\, mg = \frac{\frac{1}{2} mR^2 * \frac{a}{R}}{R} = \frac{1}{2} ma$$

De ambas ecuaciones

$$2\mu\, mg = -\frac{1}{2} a \quad \Rightarrow \quad a = -4\mu\, g$$
$$F_{max} = -3\mu\, mg$$

Según la primera ecuación el cilindro rodaría en sentido contrario a la fuerza aplicada. Lo lógico es admitir que la fuerza de rozamiento actúa como hemos supuesto en la figura 2.

13.-Dos abalorios iguales de masa m y carga q pueden deslizar sin rozamiento por dos barras no conductoras. Ambas barras están en el mismo plano vertical formando un ángulo α con la horizontal. Determinar a qué altura por encima de la horizontal pueden elevarse ambos abalorios. Inicialmente se encuentran a una distancia L entre sí y a una distancia l de los extremos de las barras, tal como indica la figura 1.

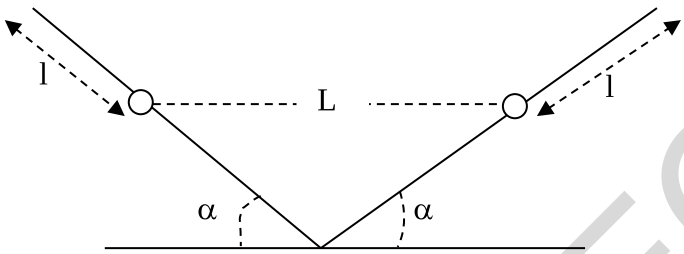


Fig.1

a) Suponemos que los abalorios se desplazan hacia arriba una distancia que es inferior a l , o en otras palabras , que no abandonan las barras.

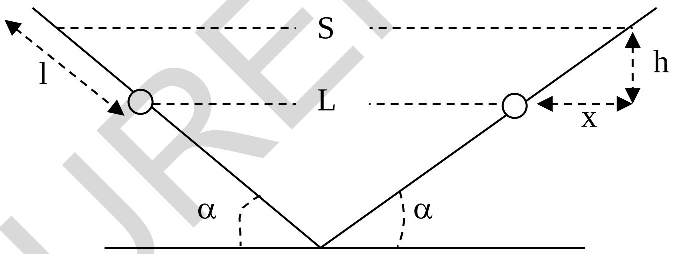


Fig.2

En el equilibrio reencuentran a una distancia S y se han elevado una altura h sobre la horizontal. Los abalorios han ganado energía potencial gravitatoria respecto de la posición inicial y esta ganancia es debida a la pérdida de energía potencial eléctrica de las cargas

$$2mgh = \frac{q^2}{4\pi\ \varepsilon_o}\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{S}\right)$$

De la figura 2 se deduce:

$$S = L + 2x = L + \frac{2h}{tag\ \alpha}$$

$$2mgh=\frac{q^2}{4\pi\ \varepsilon_o}\left(\frac{1}{L}-\frac{1}{L+\dfrac{2h}{tag\alpha}}\right)=\frac{q^2}{4\pi\ \varepsilon_o}\left(\frac{1}{L}-\frac{tag\alpha}{Ltag\alpha+2h}\right)=\frac{q^2}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{2h}{Ltag\alpha+2h}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ltag\alpha+2h=\frac{q^2}{4\pi\ mg\varepsilon_o}\quad\Rightarrow\quad h=\frac{q^2}{8\pi\ mg\varepsilon_o}-\frac{L}{2}tag\alpha\quad(1)$$

Veamos cuál es la condición para que los abalorios no se salgan de las barras. El límite viene determinado porque los abalorios recorran sobre la barra la longitud l. En este caso h es igual a $l\ sen\ \alpha$

$$l\ sen\alpha=\frac{q^2}{8\pi\ mg\varepsilon_o}-\frac{L}{2}tag\alpha\quad\Rightarrow\quad q\ \le\sqrt{8\pi\ mg\varepsilon_o\left(l\ sen\alpha+\frac{L}{2}tag\alpha\right)}$$

Si q es mayor que la raíz cuadrada de la expresión anterior los abalorios abandonan las barras con una velocidad v, y una vez fuera de las barras describirán un movimiento parabólico. Para que esto ocurra, la suma de las energías potenciales gravitatorias más las cinéticas de ambos abalorios deben ser iguales a la pérdida de energía potencial gravitatoria al llegar a los extremos de las barras

$$2*\frac{1}{2}mv^2+2mgl\ sen\alpha=\frac{q^2}{4\pi\ \varepsilon_o}\left(\frac{1}{L}-\frac{1}{L+\dfrac{2l\ sen\alpha}{tag\alpha}}\right)=\frac{q^2}{4\pi\ \varepsilon_o}\left(\frac{1}{L}-\frac{1}{L+2l\ cos\alpha}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2=\frac{q^2}{4\pi\, m\varepsilon_o}\left(\frac{2l cos\alpha}{L(L+2l\ cos\alpha)}\right)-2gl\ sen\alpha$$

La altura que alcanza un abalorio cuando abandona la barra viene dada por la expresión que determina la altura máxima en un movimiento parabólico

$$H=\frac{v^2 sen^2\alpha}{2g}=\frac{\left[\dfrac{q^2}{4\pi\ m\ \varepsilon_o}\left(\dfrac{2l cos\alpha}{L(L+2l cos\alpha)}\right)-2gl sen\alpha\right]*sen^2\alpha}{2g}\Rightarrow$$

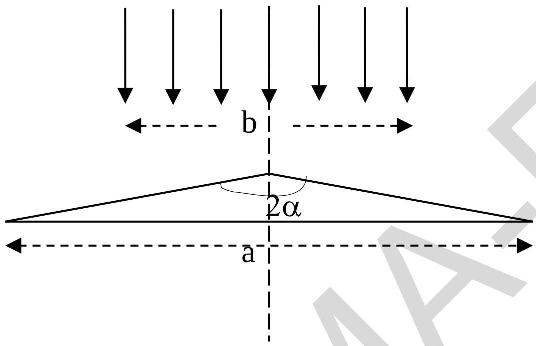
$$\Rightarrow H=\frac{q^2}{8mg\pi\ \varepsilon_o}\left(\frac{2l cos\alpha}{L(L+2l cos\alpha)}\right)*sen^2\alpha-l sen^3\alpha$$

La altura total respecto de la posición inicial es:

$$h_{total}=l sen\alpha+\frac{q^2}{8mg\pi\ \varepsilon_o}\left(\frac{2l cos\alpha}{L(L+2l cos\alpha)}\right)*sen^2\alpha\ \text{-}\ l\ sen^3\alpha\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_{total}=l sen\alpha\ cos^2\alpha+\frac{q^2}{4mg\pi\ \varepsilon_o}\left(\frac{l cos\alpha\ sen^2\alpha}{L(L+2l cos\alpha)}\right)$$

14.-Un prisma cuya sección principal es un triángulo isósceles de base a y ángulo 2 α = 160º (ver la figura) posee un índice de refracción n =1,5 . Un haz de luz, cuya anchura es $b=\frac{3}{4}a$, y potencia P =8000 W, la cual está distribuida uniformemente sobre el haz, incide sobre el prisma. Dibujar la gráfica de la fuerza F que actúa sobre el prisma en función de x , siendo x la distancia en horizontal que existe entre el vértice A del prisma y el centro B del haz luminoso. Calcular el valor máximo de F. Considerar que el haz luminoso penetra por entero en el prisma y por tanto se desprecian las posibles reflexiones.



Vamos a dividir el prisma en dos partes simétricas. Calculemos el ángulo con el que un rayo sale del prisma, tal como indica la figura inferior

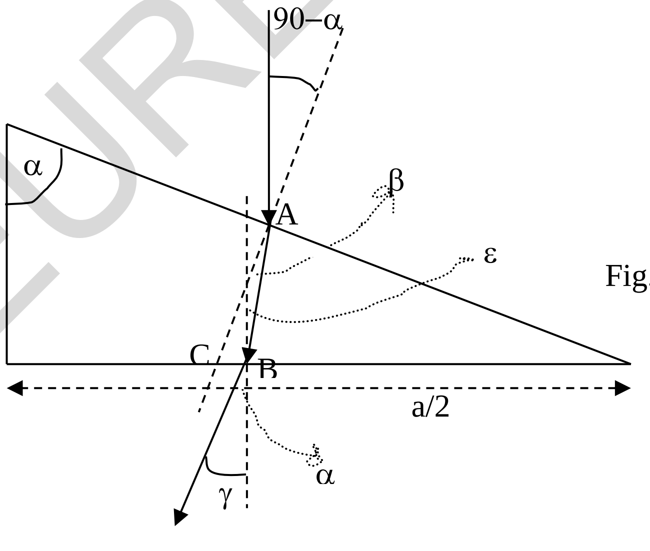


Fig.1

Por la ley de Snell $\quad 1*\text{sen}(90-\alpha)=1{,}5\ \text{sen}\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = 6{,}6478^{\circ}$

En el triángulo ABC $\quad \alpha+\beta+(90+\varepsilon)=180 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 90-\alpha-\beta$

Por la ley de Snell $\quad 1{,}5 * \operatorname{sen}(90-\alpha-\beta) = 1 * \operatorname{sen}\gamma \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\gamma = 0{,}0877$

Un fotón con energía E posee un momento lineal $\frac{E}{c}$ .De la figura 1 se deduce que un fotón que incida sobre la parte derecha del prisma cambia su dirección, teniendo una componente en dirección horizontal y dirigida hacia la izquierda $-\frac{E\ \operatorname{sen}\gamma}{c}$

Y otra en dirección vertical $\quad \frac{E\ \cos\gamma}{c}$

Sobre la parte izquierda del prisma un fotón en posición simétrica con el de la figura 1 tendría de componentes: $\quad +\frac{E\ \operatorname{sen}\gamma}{c}; \frac{E\ \cos\gamma}{c}$.

La fuerza horizontal que aparece sobre la mitad del prisma derecho y dirigida hacia la izquierda se anula con la fuerza horizontal que aparece en la mitad izquierda del prisma y dirigida hacia la derecha. La fuerza neta horizontal sobre el prisma es cero. Esto ocurre porque la mitad del prisma recibe la misma potencia luminosa que la otra mitad y se debe a la situación simétrica del prisma cuyo centro coincide exactamente con el centro del haz luminoso. La situación cambia si el centro del prisma no coincide con el centro del haz luminoso, ya que entonces una mitad del prisma recibe mayor potencia que la otra mitad.
En la figura 2 se representa el haz y la base a del prisma situada en distintas posiciones

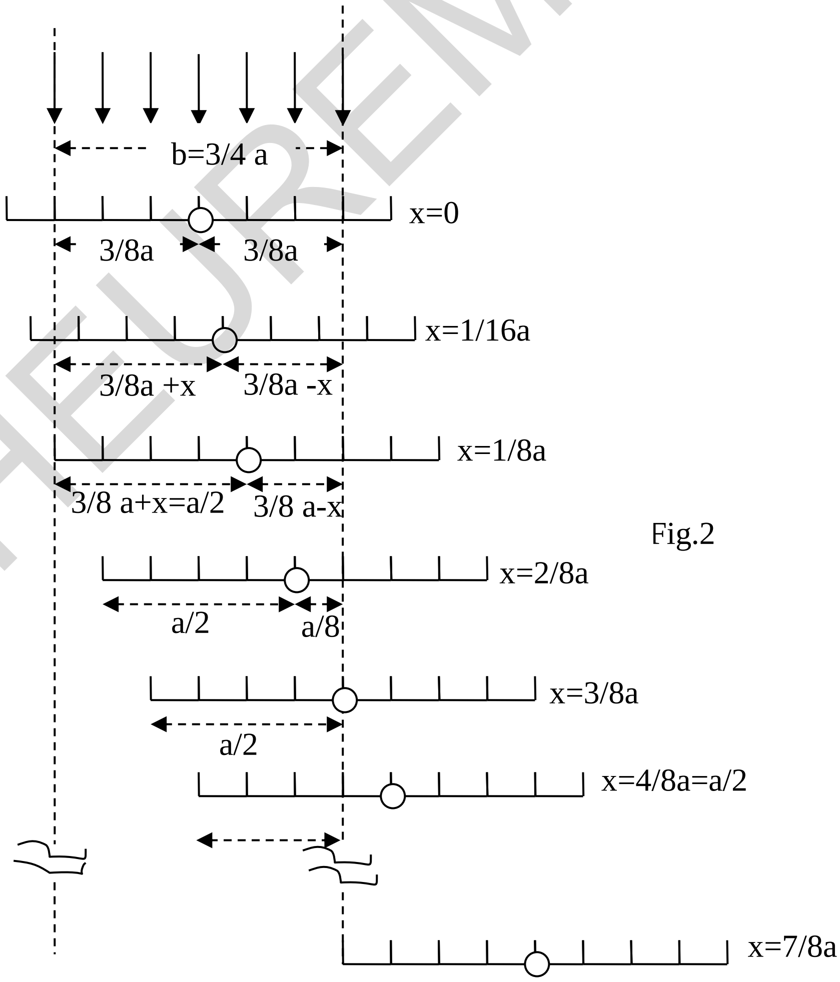


Fig.2

Cuando x =0 la potencia recibida por la parte izquierda del prisma es igual que la que recibe la parte derecha , por tanto , las fuerzas horizontales son iguales y de sentido contrario y su suma es nula , lo que indica F =0

Cuando x = 1/16a, la potencia recibida por la mitad izquierda del prisma es mayor que por la parte derecha. La fuerza es proporcional a la superficie recibida

$$F_1 = k\left(\frac{3}{8}a + x\right) = k\left(\frac{3}{8}a + \frac{1}{16}a\right); F_2 = k\left(\frac{3}{8}a - x\right) = k\left(\frac{3}{8}a - \frac{1}{16}a\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = F_1 - F_2 = k\frac{1}{8}a$$

Cuando x = 1/8a,

$$F_1 = k\left(\frac{3}{8}a + x\right) = k\left(\frac{3}{8}a + \frac{1}{8}a\right); F_2 = k\left(\frac{3}{8}a - x\right) = k\left(\frac{3}{8}a - \frac{1}{8}a\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = F_1 - F_2 = k\frac{1}{4}a$$

Cuando x = 2/8a,

$$F_1 = k\frac{a}{2} \ ; \ F_2 = k\left(\frac{3}{8}a - x\right) = k\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = F_1 - F_2 = k\frac{3}{8}a$$

Cuando x = 3/8a,

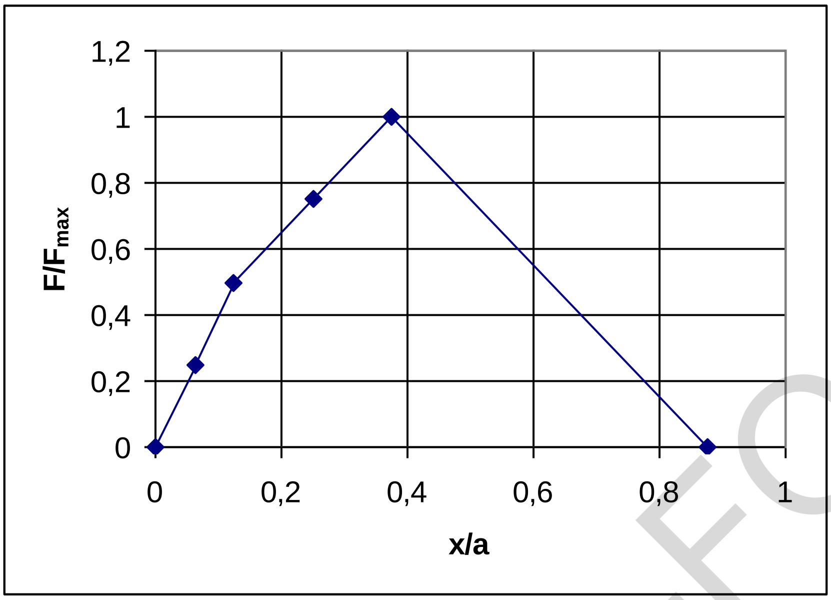
$$F_1 = k\frac{1}{2}a \quad ; \quad F_2 = k\left(\frac{3}{8}a - x\right) = k\left(\frac{3}{8}a - \frac{3}{8}a\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = F_1 - F_2 = k\frac{1}{2}a$$

A partir de 3/8ª, la fuerza disminuye ya que disminuye la luz que le llega a la parte izquierda del prisma. Cuando x = 7/8a resulta que ya no le llega luz al prisma y por consiguiente la fuerza es cero.

Representamos en el eje de abscisas x/a frente a la fuerza relativa al valor máximo

x/a	0	1/16=0,5/8	1/8	2/8	3/8	7/8
F/F_{max}	0	1/4	1/2	3/4	1	0



La fuerza máxima se produce cuando la mitad izquierda del prisma recibe luz y la mitad derecha no la recibe.

La energía que recibe el prisma por unidad de longitud es $\dfrac{P}{\frac{3}{4}a}$ y la que recibe la mitad izquierda del prisma $\dfrac{4P}{3a} * \dfrac{a}{2} = \dfrac{2}{3}P$.

La fuerza esta determinada por la variación del momento lineal con respecto al tiempo

$$F = \frac{\frac{E_t \operatorname{sen}\gamma}{c}}{\Delta t} = \frac{\frac{2}{3}P \operatorname{sen}\gamma}{c} = \frac{2*8000*0{,}0877}{3*3.10^{8}} = 1{,}56.10^{-6}\ \mathrm{N}$$

15.- Una membrana horizontal oscila armónicamente a lo largo de un eje vertical con una frecuencia f= 100 Hz. Calcular la amplitud de las oscilaciones si unos granos de arena que están sobre la membrana saltan hasta una altura de de H= 2 cm respecto de la posición central de la membrana.

Cuando la membrana está en su posición inicial de equilibrio, en la que la aceleración es cero, un grano de arena de masa m está sometido a dos fuerzas su peso y el empuje de la membrana.
En una posición en que la membrana está separada de su posición de equilibrio, resulta que existe una aceleración vertical dirigida hacia la posición de equilibrio. Si analizamos las fuerzas desde un sistema ligado a la membrana, que es un sistema no inercial, las fuerzas que actúan están representadas en la posición 2 de la figura1.

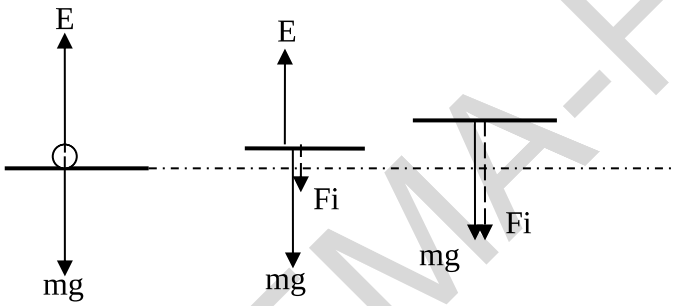


Fig.1

En la segunda posición sobre el grano actúan las fuerzas indicadas, siendo E menor que en la primera posición. En al tercera el empuje se ha anulado y mg = Fi =ma; al cesar E el grano puede abandonar la membrana, y esto ocurre cuando la aceleración de la membrana es igual a g. Si para la posición de equilibrio la ecuación del movimiento armónico es $y = A\ \text{sen}\ \omega\ t$, la ecuación de la velocidad es $v = A\omega\ \cos\omega\ t$ y la de la aceleración $a = -A\omega^2 \text{sen}\ \omega\ t$.
Cuando el valor absoluto de la aceleración sea igual a g, es cuando el grano puede abandonar la membrana

$$A\omega^2 \text{sen}\ \omega\ t = g \quad (1)$$

En ese instante la velocidad vertical del grano es: $v = A\omega\ \cos\omega\ t$

Debido a esa velocidad alcanza una altura respecto de la posición de la membrana cuando la abandona igual a:

$$h = \frac{A^2\omega^2\cos^2\omega\ t}{2g}$$

Respecto a la posición inicial de la membrana

$$H = A\ \text{sen}\omega\ t + \frac{A^2\omega^2\cos^2\omega\ t}{2g} \quad (2)$$

A partir de las ecuaciones (1) y (2)

$$H = A\frac{g}{A\omega^2} + \frac{A^2\omega^2\left(1-\frac{g^2}{A^2\omega^4}\right)}{2g} = \frac{g}{\omega^2} + \frac{A^2\omega^2}{2g} - \frac{g}{2\omega^2} \quad \Rightarrow \frac{A^2\omega^2}{2g} = H - \frac{g}{2\omega^2} \quad \Rightarrow$$

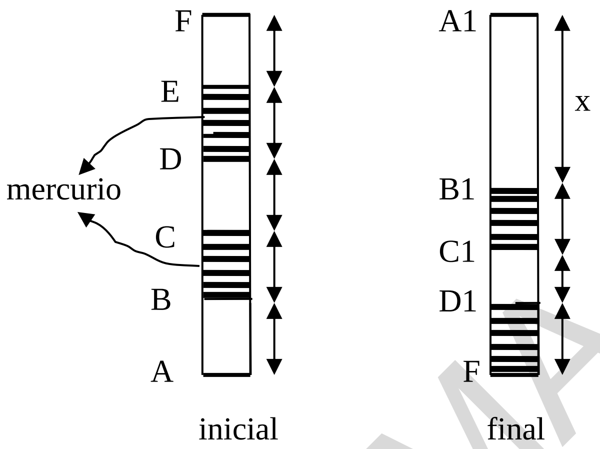
$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{\left(H-\frac{g}{2\omega^2}\right)2g}{\omega^2}} \quad \Rightarrow A = \frac{\sqrt{\frac{4\omega^2 gH - 2g^2}{2\omega^2}}}{\omega} \Rightarrow \quad A = \frac{\sqrt{2\omega^2 gH - g^2}}{\omega^2}$$

Sustituyendo valores

$$A = \frac{\sqrt{2*4\pi^2*100^2*9{,}8*2.10^{-2} - 9{,}8^2}}{4\pi^2*100^2} = 9{,}96.10^{-4}\,\mathrm{m} \approx 1\ \mathrm{mm}$$

$$\alpha = \beta^2$$

16.- Los compartimentos AB y CD de un tubo vertical están llenos de aire. Los extremos del tubo están cerrados. Las partes BC y DE son de mercurio y en la parte superior EF se ha hecho el vacío. Las longitudes de cada una de las partes son iguales a h. La presión en el punto A es p. El tubo se gira cuidadosamente y adopta la posición de las distintas partes indicadas en la figura. Calcular la presión en el punto inferior F en función de p. Se supone que al darle la vuelta al tubo la temperatura no



varía. Cuando el tubo se gira el compartimiento de aire AB pasa a ser A_1B_1 y el CD a C_1D_1.

Designamos con S la sección del tubo .Los volúmenes de cada uno de los compartimientos de aire en el estado inicial son Sh..
Las presiones son $P_E = 0$; $P_D = P_{DC}=\rho gh$; $P_B=P_{DC}+ \rho gh=P_A=p=2\rho gh$
Siendo ρ la densidad del mercurio

Las presiones en las cámaras de aire son p en AB y p/2 en CD

El aire contenido en la cámara AB ocupa en la posición final la cámara A_1B_1.La presión ahora en esta cámara es p_x Teniendo en cuenta que la temperatura no ha variado se cumple, de acuerdo con la ley de Boyle-Mariotte

$$pSh = p_x Sx \quad \Rightarrow \quad ph = p_x x \;\; (1)$$

La cámara de aire CD tiene una presión p/2 y al volcar el tubo pasa a ser C_1D_1. Puesto que el tubo no ha variado de tamaño y tampoco las alturas del mercurio se deduce que la altura H de esa cámara es:

$$5h= 2h +x +H \longrightarrow H = 3h-x$$

Aplicando la ley de Boyle.Mariotte, y designando con p_2 a la presión en C_1D_1 en el estado final

$$\frac{p}{2}Sh = p_2 S(3h - x) \quad \Rightarrow \quad p_2 = \frac{ph}{2(3h - x)} \quad (2)$$

De acuerdo con la figura se deduce que.

$$p_2 = p_x + \rho gh \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_x + \frac{p}{2} \quad (3)$$

De las ecuaciones (2) y (3) se deduce que.

$$\frac{ph}{2(3h - x)} = p_x + \frac{p}{2} \quad \Rightarrow \quad p_x = \frac{ph}{2(3h - x)} - \frac{p}{2} \quad (4)$$

Llevando la ecuación (4) a la (1)

$$ph = \left[\frac{ph}{2(3h - x)} - \frac{p}{2}\right]x \Rightarrow 2h = \frac{hx}{3h - x} - x \Rightarrow 6h^2 - 2hx = hx - 3hx + x^2 \Rightarrow 6h^2 = x^2$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{6}h$$

La presión en F en el estado final es:

$$p_F = p_2 + \rho gh = \frac{ph}{2(3h - x)} + \frac{p}{2} = \frac{p}{2}\left(\frac{h}{3h - \sqrt{6}h} + 1\right) = p\left(\frac{1}{6 - 2\sqrt{6}} + \frac{1}{2}\right)$$

$$p_F = p\left(\frac{6 + 2\sqrt{6}}{36 - 24} + \frac{1}{2}\right) = p\left(\frac{6 + 2\sqrt{6} + 6}{12}\right) = p\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

17.- Se lanza un proyectil, con velocidad inicial v_o, desde un suelo horizontal formando un cierto ángulo α con la horizontal. Este ángulo es tal que el alcance sobre la horizontal es el máximo posible. Desde una altura y = h se traza una recta paralela al suelo que corta a la trayectoria del proyectil en dos puntos. Calcular la distancia D en dirección horizontal de ambos puntos en función de h. Dibuje la gráfica de D frente h cuando la velocidad inicial es v_o= 20 m/s . ¿A que corresponden los valores máximo y mínimo de D?. Tome g = 10 m/s²

Tomamos ejes de referencia el de abscisas paralelo al suelo y a su nivel y el de ordenadas perpendicular al anterior. Las ecuaciones de la trayectoria son:

$$\left.\begin{array}{l} x = v_0 \cos\alpha \; t \\ y = v_o \operatorname{sen}\alpha \; t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{array}\right\}$$

Cuando y = 0 , el proyectil está en la salida o ha recorrido su trayectoria y choca contra el suelo

$$0 = v_0 \operatorname{sen}\alpha \; t_a - \frac{1}{2} g t_a^2 \quad \Rightarrow \quad t_a = \frac{2 v_o \operatorname{sen}\alpha}{g}$$

t_a es el tiempo que emplea el proyectil en recorrer su trayectoria y llegar al suelo

$$x_a = v_o \cos\alpha \cdot \frac{2 v_o \operatorname{sen}\alpha}{g} = \frac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

El alcance depende de la velocidad inicial y del ángulo de salida, si fijamos v_o, podemos calcular para qué ángulo el alcance es el máximo posible

$$\frac{dx_a}{d\alpha} = \frac{v_o^2}{g} \cos 2\alpha \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos 2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45^o$$

Las ecuaciones paramétricas para este movimiento de máximo alcance son:

$$x = v_o \cos\; 45^o \;\; t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_o \cos\; 45^o}$$

$$y = v_o \operatorname{sen}\; 45 \;\; t - \frac{1}{2} g t^2 = v_o \operatorname{sen}\; 45^o \cdot \frac{x}{v_o \cos\; 45^o} - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_o^2 \cos^2 45^o} \quad \Rightarrow \quad y = x - \frac{g x^2}{v_o^2} \; (1)$$

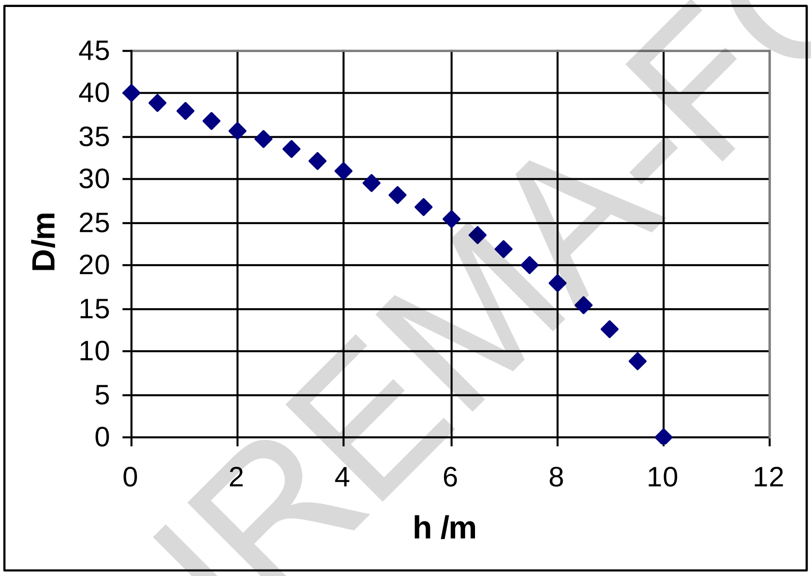
Si en la ecuación (1) hacemos y = h se obtiene dos soluciones que corresponden a las abscisas de los puntos de corte de la recta con la parábola

$$\frac{g}{v_o^2}x^2 - x + h = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{gh}{v_o^2}}}{\frac{2g}{v_o^2}} = \frac{v_o^2\left(1 \pm \frac{\sqrt{v_o^2 - 4gh}}{v_o}\right)}{2g} = \frac{v_o^2 \pm v_o\sqrt{v_o^2 - 4gh}}{2g}$$

La distancia D entre ambas abscisas es

$$D = x_2 - x_1 = \frac{v_o^2 + v_o\sqrt{v_o^2 - 4gh}}{2g} - \frac{v_o^2 - v_o\sqrt{v_o^2 - 4gh}}{2g} = \frac{v_o\sqrt{v_o^2 - 4gh}}{g}$$

Para dibujar la gráfica tenemos en cuenta que el radicando no sea negativo, por tanto, el máximo valor de h es 10 m.



Cuando h = 0 m, D se corresponde con el alcance horizontal del proyectil y cuando h=10 m es la altura máxima.
Para comprobarlo

$$x_a = \frac{v_o^2 \text{sen} 2\alpha}{g} = \frac{20^2 \cdot \text{sen } 90^o}{10} = 40 \text{ m}$$

La altura máxima se obtiene cuando la componente vertical de la velocidad se hace cero

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_o \text{sen}\alpha - g t_h = 0 \quad \Rightarrow \quad t_h = \frac{v_o \text{sen } \alpha}{g}$$

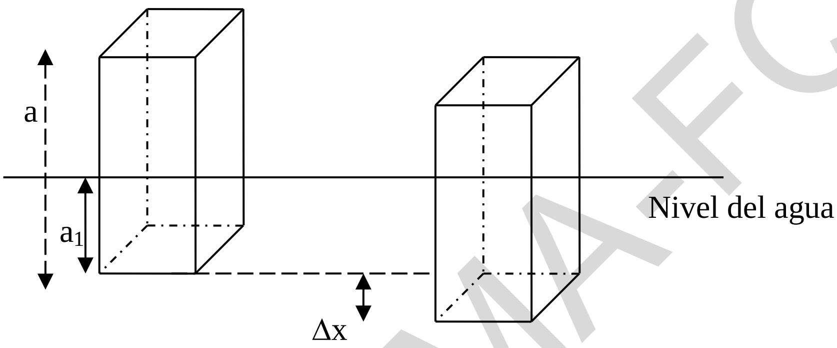
Sustituyendo

$$y_{max} = v_0 \text{sen}\alpha \ t_h - \frac{1}{2} g t_h^2 = \frac{v_o^2 \text{sen}^2 45^o}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_o^2 \text{sen}^2 45^o}{g^2} = \frac{1}{2}\frac{v_o^2 \text{sen}^2 45^o}{g} = \frac{400 \cdot 0,5}{20} = 10 \text{ m}$$

18.- Un bloque de madera de dimensiones a *b*c y densidad ρ respecto del agua. Cuando el bloque está flotando con el lado a en posición vertical se empuja hacia abajo y se suelta. Calcular el periodo de oscilación del bloque.

Cuando el bloque está flotando el peso es igual al empuje. Si designamos con a_1 la parte sumergida del bloque, ρ_M la densidad de la madera y ρ_A la del agua

$$P = E \Rightarrow abc\rho_M g = a_1 bc\rho_A g \Rightarrow a_1 = a\frac{\rho_M}{\rho_A} = a\rho$$



Si sumergimos el bloque una distancia Δx respecto a la posición inicial de equilibrio, el empuje ahora es superior al peso y esa fuerza resultante tenderá a llevarlo a la posición inicial

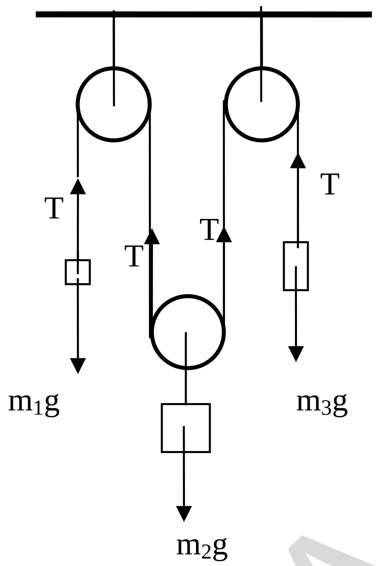
$$F = E - P \Rightarrow (a_1 + \Delta x)bc\rho_A g - abc\rho_M g \quad \Rightarrow \quad F = (a\rho + \Delta x)\rho_A bcg - abc\rho_M g \quad \Rightarrow$$

$$= \Rightarrow F = a\frac{\rho_M}{\rho_A}\rho_A bcg + \Delta x\rho_A bcg - abc\rho_M g \quad \Rightarrow \quad F = \Delta x\rho_A bcg = K\ \Delta x$$

Dado que la fuerza es proporcional al desplazamiento al igual que en un movimiento armónico

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{abc\rho_M}{bc\rho_A g}} = 2\pi\sqrt{\frac{a\rho}{g}}$$

19.- En el sistema de poleas de la figura inferior se supone que carecen de masa y que el sistema se desplaza sin rozamiento. Se pide calcular la aceleración de las masas.



Tomando como sentidos positivo vertical hacia abajo, las ecuaciones de las tres masas son:

$$m_1 g - T = m_1 a_1 \quad (1)$$

$$m_2 g - 2T = m_2 a_2 \quad (2)$$

$$m_3 g - T = m_3 a_3 \quad (3)$$

Imaginemos que las masas m_1 y m_3 fuesen iguales, si la masa m_2 se desplaza hacia abajo Δx_2 , las otras dos masas se desplazan hacia arriba Δx_1 e Δx_3 . La distancia Δx_2 se reparte por igual en las dos ramas de la cuerda de modo que Δx_1 es la mitad de Δx_2 , lo mismo le ocurre a la masa 3. Por tanto las aceleraciones guardan la relación

$$a_2 = -\frac{a_1 + a_3}{2} \quad (4)$$

En el caso expuesto $a_1 = a_3$ y en general serán distintas si las masas m_1 y m_3 son diferentes. El signo menos se debe a que la aceleración de m_2 es hacia abajo (sentido positivo) y las otras dos sentido negativo.

Ahora debemos resolver un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

Despejamos T de la ecuación (3) y sustituimos en la (1)

$$m_1 g - m_3 (g - a_3) = m_1 a_1 \quad (5)$$

Multiplicamos la ecuación (1) por 2 y le restamos la (2)

$$2m_1g - 2T - m_2g + 2T = 2m_1a_1 - m_2a_2 \quad \Rightarrow \quad g(2m_1 - m_2) = 2m_1a_1 - m_2a_2$$

En la última ecuación sustituimos a_2 por la ecuación (4)

$$g(2m_1 - m_2) = 2m_1a_1 - m_2\left(-\frac{a_1 + a_3}{2}\right) \Rightarrow g(2m_1 - m_2) = a_1\left(2m_1 + \frac{m_2}{2}\right) + \frac{m_2a_3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{2g(2m_1 - m_2) - 2a_1\left(2m_1 + \frac{m_2}{2}\right)}{m_2} \quad (6)$$

Llevando la ecuación (6) a la (5)

$$m_1g - m_3g + m_3\,\frac{4m_1g - 2m_2g - 4m_1a_1 - m_2a_1}{m_2} = m_1a_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1m_2g - m_2m_3g + 4m_1m_3g - 2m_2m_3g - 4m_1m_3a_1 - m_2m_3a_1 - m_2m_3a_1 = m_1m_2a_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{a_1} = \frac{\mathbf{4m_1m_3 + m_1m_2 - 3m_2m_3}}{\mathbf{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3}}\,\mathbf{g}$$

Llevando la ecuación de a_1 a la (1)

$$m_1g - T = m_1\,\frac{4m_1m_3 + m_1m_2 - 3m_2m_3}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3}\,g \Rightarrow T = m_1g\left(1 - \frac{4m_1m_3 + m_1m_2 - 3m_2m_3}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = m_1g\left(\frac{4m_2m_3}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3}\right)$$

Sustituyendo la tensión en la ecuación (2)

$$m_2g - 2m_1g\left(\frac{4m_2m_3}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3}\right) = m_2a_2 \Rightarrow g - 2m_1g\,\frac{4m_3}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3} = a_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2 = g\left(1 - \frac{8m_1m_3}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3}\right) \Rightarrow \qquad \mathbf{a_2} = \frac{\mathbf{m_1m_2 + m_2m_3 - 4m_1m_3}}{\mathbf{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3}}\,\mathbf{g}$$

Sustituyendo la tensión en la ecuación (3)

$$m_3g - m_1g\left(\frac{4m_2m_3}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3}\right) = m_3a_3 \Rightarrow g - m_1g\,\frac{4m_2}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3} = a_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_3 = g\left(1 - \frac{4m_1m_2}{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3}\right) \Rightarrow \qquad \mathbf{a_3} = \frac{\mathbf{4m_1m_3 - 3m_1m_2 + m_2m_3}}{\mathbf{4m_1m_3 + m_1m_2 + m_2m_3}}\,\mathbf{g}$$