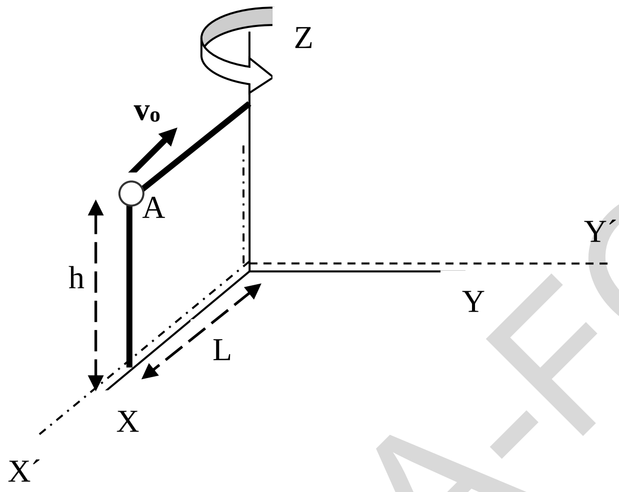
20.- Una partícula se encuentra en el tiempo t=0 en la esquina superior A de una puerta rectangular que gira alrededor del eje Z con velocidad angular constante ω.



Los ejes XYZ son de un sistema S inercial, y los ejes X´ Y´ y Z´ pertenecen a un sistema S´, ligado a la puerta y que por tanto giran con ella. En el instante t=0 ambos sistemas de coordenadas están superpuestos. Determinar expresando los resultados en el sistema móvil S´ a) la velocidad relativa b, de arrastre y absoluta de la partícula en función del tiempo b) la aceleración relativa, de arrastre, de Coriolis y absoluta en función del tiempo.

Al cabo de un tiempo t la situación de la puerta está indicada en la figura 1.

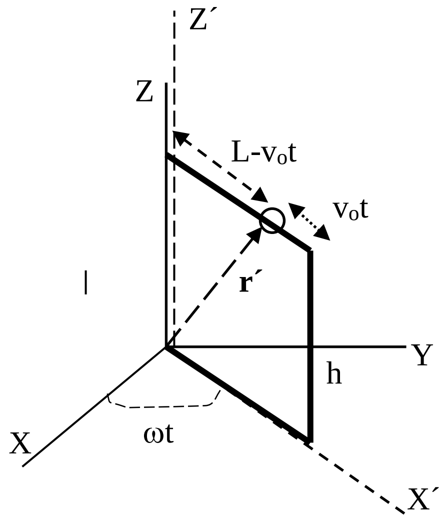


Fig.1

La puerta ha girado un ángulo ωt y con ella los ejes del sistema S´. En ese mismo tiempo la partícula ha avanzado por la puerta una longitud $v_o t$.
Desde el sistema móvil S´ la velocidad de la partícula es:

$$\vec{v}' = v_o\ \vec{i}'$$

La velocidad de arrastre es:

$$\vec{v}_{arrastre} = \vec{\omega} \times \vec{r}' = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & \omega \\ L - v_o t & 0 & h \end{vmatrix} = -\vec{j}'\left[-\omega\left(L - v_o t\right)\right] = \vec{j}'\left[\omega\left(L - v_o t\right)\right]$$

$$\vec{v}_{absoluta} = \vec{v}_{arrastre} + \vec{v}_{relativa} = -v_o\,\vec{i}' + \omega\left(L - v_o t\right)\vec{j}'$$

b) La aceleración relativa es cero, pues la velocidad es constante.

La aceleración de arrastre es la centrípeta

$$\vec{a}_{c\,entrípeta} = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right) = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega\left(L - v_o t\right) & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i}'\left[\omega^2\left(L - v_o t\right)\right]$$

$$\vec{a}_{Coriolis} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}' = 2\begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & 0 & \omega \\ -v_o & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\ \omega v_0\,\vec{j}'$$

$$\vec{a}_{absoluta} = -\omega^2\left(L - v_o t\right)\vec{i}' - 2\ \omega v_o\,\vec{j}'$$

21.- Considerar el problema 20. a) Obtener la ecuación de la trayectoria de la partícula en el sistema fijo b) determinar los vectores velocidad absoluta y aceleración absoluta en el sistema de referencia fijo S al cabo de 10 s de iniciado el movimiento, sabiendo que en el instante inicial los ejes X y X´ coinciden y que L = 1 m , v_o = 0,05 m/s y ω = 20 rpm.

Si nos fijamos en la figura 1, las coordenadas de la partícula en el sistema S, al cabo de un tiempo t, son:

$$x = (L - v_o t)\cos\ \omega t \quad ; \quad y = (L - v_o t)\text{sen}\ \omega t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = (L - v_o t)^2$$

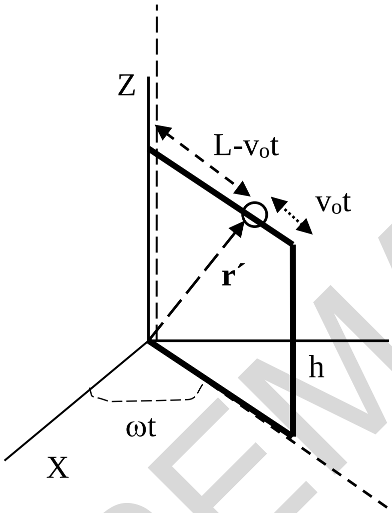
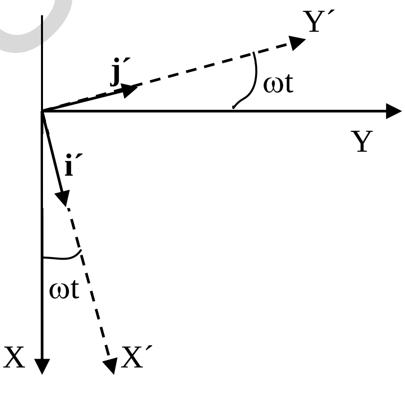


Fig.1

La trayectoria en el plano z=h, se obtiene sustituyendo valores en las ecuaciones de las coordenadas

b)



Las componentes de los vectores unitarios **i´** y **j´** sobre el sistema de referencia X Y son respectivamente.

$$(i´\cos\ \omega t, i´\text{sen}\ \omega t) \quad ; \quad (-\,j´\text{sen}\ \omega t, j´\cos\ \omega t)$$

Que puestos en forma vectorial y dado que i´ y j´ valen la unidad

$$\vec{i}' = \cos\ \omega t\ \vec{i} + \text{sen}\ \omega t\ \vec{j} \quad ; \quad \vec{j}' = -\text{sen}\ \omega t\ \vec{i} + \cos\ \omega t\ \vec{j}$$

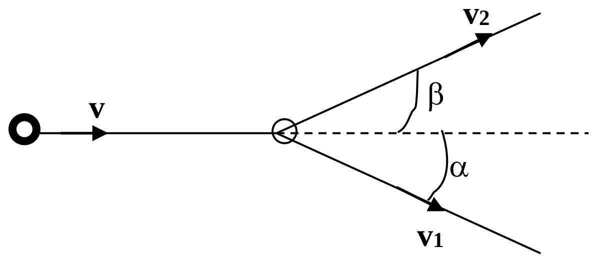
$$\vec{v} = \omega\left(l - v_o' t\right)\vec{j}' - v_o'\,\vec{i}' = \omega\left(l - v_o' t\right)\left(-sen\,\omega t\,\vec{i} + cos\,\omega t\,\vec{j}\right) - v_o'\left(cos\,\omega t\,\vec{i} + sen\,\omega t\,\vec{j}\right)$$
$$= -\left(\omega\left(l - v_o' t\right) sen\,\omega t + v_o' \cos\omega t\right)\vec{i} + \left(\omega\left(l - v_o' t\right)\cos\omega t - v_o' sen\,\omega t\right)\vec{j}$$
$$= -\left(\frac{20\cdot 2\pi}{60}\left(1 - 0{,}05\cdot 10\right) sen\,\frac{20\cdot 2\pi}{60}\cdot 10 + 0{,}05\cos\frac{20\cdot 2\pi}{60}\cdot 10\right)\vec{i} +$$
$$+\left(\frac{20\cdot 2\pi}{60}\left(1 - 0{,}05\cdot 10\right)\cos\frac{20\cdot 2\pi}{60}\cdot 10 - 0{,}05\,sen\,\frac{20\cdot 2\pi}{60}\cdot 10\right)\vec{j}$$

$$\vec{v} = -0{,}88\vec{i} - 0{,}57\,\vec{j}$$

$$\vec{a} = -\omega^2\left(l - v_o' t\right)\vec{i}' - 2v_o'\,\omega\,\vec{j}' = -\omega^2\left(l - v_o' t\right)\left(cos\,\omega t\,\vec{i} + sen\,\omega t\,\vec{j}\right) - 2v_o'\,\omega\left(-sen\,\omega t\,\vec{i} + cos\,\omega t\,\vec{j}\right)$$
$$= \left(-\omega^2\left(l - v_o' t\right)\cos\omega t + 2v_o'\,\omega\ sen\,\omega t\right)\vec{i} + \left(-\omega^2\left(l - v_o' t\right) sen\,\omega t - 2v_o'\,\omega\,\cos\omega t\right)\vec{j}$$
$$= \left(-\left(\frac{20\cdot 2\pi}{60}\right)^2\left(1 - 0{,}05\cdot 10\right)\cos\frac{20\cdot 2\pi}{60}10 + 2\cdot 0{,}05\cdot\frac{20\cdot 2\pi}{60}\,sen\,\frac{20\cdot 2\pi}{60}10\right)\vec{i} +$$
$$+\left(-\left(\frac{20\cdot 2\pi}{60}\right)^2\left(1 - 0{,}05\cdot 10\right) sen\,\frac{20\cdot 2\pi}{60}10 - 2\cdot 0{,}05\cdot\frac{20\cdot 2\pi}{60}\cos\frac{20\cdot 2\pi}{60}10\right)\vec{j}$$

$$\vec{a} = 1{,}28\ \vec{i} - 1{,}79\,j$$

22.- Una partícula de masa m_1 colisiona, de forma elástica, con una partícula de masa m_2, siendo $m_1>m_2$. La partícula 2 se encuentra en reposo ¿Cuál es el máximo ángulo de desviación de la primera partícula respecto de su dirección inicial? .Se supone que las velocidades de las partículas son mucho más pequeñas que la de la luz.



En el choque elástico hay conservación de la cantidad de movimiento y de la energía

$$\left.\begin{array}{l} m_1 v = m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 v_2 \cos\beta \\ m_1 v_1 \mathrm{sen}\alpha = m_2 v_2 \mathrm{sen}\ \beta \\ \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{array}\right\}$$

Despejamos de la ecuación 2, sen β; y de la tercera v_2.

$$\mathrm{sen}\ \beta = \frac{m_1 v_1 \mathrm{sen}\alpha}{m_2 v_2} \quad ; \quad v_2^2 = \frac{m_1}{m_2}\left(v^2 - v_1^2\right)$$

Designando a $\frac{m_1}{m_2} = M$, resulta:

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{M^2 v_1^2 \mathrm{sen}^2\alpha}{v_2^2}} = \sqrt{1 - \frac{M^2 v_1^2 \mathrm{sen}^2\alpha}{M\left(v^2 - v_1^2\right)}}$$

Llevando cos β y v_2 a la primera de las ecuaciones iniciales:

$$Mv = Mv_1\cos\alpha + \sqrt{M\left(v^2 - v_1^2\right)} \cdot \sqrt{1 - \frac{M^2 v_1^2 \mathrm{sen}^2\alpha}{M\left(v^2 - v_1^2\right)}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Mv = Mv_1\cos\alpha + \sqrt{M\left(v^2 - v_1^2\right) - M^2 v_1^2 \mathrm{sen}^2\alpha} \Rightarrow \quad v = v_1\cos\alpha + \sqrt{\frac{v^2 - v_1^2}{M} - v_1^2 \mathrm{sen}^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \left(v - v_1\cos\alpha\right)^2 = \frac{v^2 - v_1^2}{M} - v_1^2\mathrm{sen}^2\alpha \Rightarrow \quad v^2 + v_1^2\cos^2\alpha - 2vv_1\cos\alpha + v_1^2\mathrm{sen}^2\alpha = \frac{v^2 - v_1^2}{M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 + v_1^2 - 2vv_1\cos\alpha = \frac{v^2 - v_1^2}{M} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{M\left(v^2 + v_1^2\right) - v^2 + v_1^2}{2vv_1 M}$$

En el problema nos piden que el ángulo α sea el máximo posible, o el coseno el valor mínimo, para ello derivamos la anterior expresión con respecto a v_1 e igualamos a cero

$$\frac{2vv_1M\left(2Mv_1+2v_1\right)-\left[M\left(v^2+v_1^2\right)-v^2+v_1^2\right]\cdot 2vM}{4v^2v_1^2M^2}=0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2Mv_1^2+2v_1^2-Mv^2-Mv_1^2+v^2-v_1^2=0$$

$$\Rightarrow \quad Mv_1^2-Mv^2+v_1^2+v^2=0 \Rightarrow v_1^2=\frac{v^2\left(M-1\right)}{\left(M+1\right)} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v_1=v\sqrt{\frac{\frac{m_1}{m_2}-1}{\frac{m_1}{m_2}+1}} \quad\Rightarrow\quad v_1=v\sqrt{\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}}$$

Sustituimos el valor de v_1 en coseno α

$$\cos\alpha=\frac{\frac{m_1}{m_2}v^2+\frac{m_1}{m_2}v^2\,\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}-v^2+v^2\,\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}}{2v\frac{m_1}{m_2}v\sqrt{\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}}}=\frac{\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{m_1}{m_2}+1\right)+\left(\frac{m_1}{m_2}-1\right)}{2\frac{m_1}{m_2}\sqrt{\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}}}=$$

$$=\frac{\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{m_1+m_2}{m_2}\right)+\frac{m_1-m_2}{m_2}}{2\frac{m_1}{m_2}\sqrt{\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}}} \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha=\frac{m_1-m_2}{m_1\sqrt{\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}}} \quad\Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha=1-\frac{\left(m_1-m_2\right)^2}{m_1^2\cdot\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}}=1-\frac{m_1^2-m_2^2}{m_1^2}=\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad \operatorname{sen}\alpha_{max}=\frac{m_2}{m_1}$$

Calculamos ahora el valor de v_2 y del ángulo beta.

$$m_1v^2=m_1v_1^2+m_2v_2^2 \quad\Rightarrow\quad m_2v_2^2=m_1v^2-m_1v^2\,\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}=m_1v^2\left(1-\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v_2^2=\frac{m_1}{m_2}\left(\frac{2m_2}{m_1+m_2}\right) \quad\Rightarrow\quad v_2=\sqrt{\frac{2m_1}{m_1+m_2}}$$

$$m_1v_1\operatorname{sen}\alpha=m_2v_2\operatorname{sen}\beta \quad\Rightarrow\quad m_1v\sqrt{\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}}\cdot\frac{m_2}{m_1}=m_2v\sqrt{\frac{2m_1}{m_1+m_2}}\cdot\operatorname{sen}\beta \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}\beta=\sqrt{\frac{m_1-m_2}{2m_1}}$$

23.- Se lanza un proyectil formando un ángulo α con la horizontal. En el punto más alto de su trayectoria h su velocidad es v_1. La velocidad en un punto de la trayectoria que es la mitad de la altura máxima h/2 es v_2 y entre ambas velocidades existe la relación

$$v_1 = \sqrt{\frac{6}{7}}\, v_2$$

Calcular el ángulo α de lanzamiento.

Las ecuaciones paramétricas del movimiento del proyectil son:

$$\left.\begin{aligned} x &= v\ \cos\alpha\ t \\ y &= v\ \mathrm{sen}\alpha\ t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}\right\}$$

Las ecuaciones de las velocidades sobre los ejes coordenados son:

$$\left.\begin{aligned} v_X &= \frac{dx}{dt} = v\ \cos\alpha \\ v_Y &= \frac{dy}{dt} = v\ \mathrm{sen}\alpha - gt \end{aligned}\right\}$$

En el punto más alto de la trayectoria la componente v_y de la velocidad es nula. El tiempo que tarda el proyectil en alcanzar la altura máxima es:

$$0 = v\ \mathrm{sen}\alpha - gt_h \quad \Rightarrow \quad t_h = \frac{v\ \mathrm{sen}\alpha}{g}$$

Y el valor de h

$$h = v\ \mathrm{sen}\alpha \cdot t_h - \frac{1}{2}gt_h^2 = v\ \mathrm{sen}\alpha \cdot \frac{v\ \mathrm{sen}\alpha}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v^2\mathrm{sen}^2\alpha}{g^2} = \frac{1}{2}\frac{v^2\mathrm{sen}^2\alpha}{g} \quad (1)$$

La velocidad en el punto más alto de la trayectoria:

$$v_1 = v_x = v\ \cos\alpha \ (2)$$

Cuando el proyectil se encuentra a una altura h/2 la velocidad v_2 tiene dos componentes v_{2x} y v_{2y}, cuyos valores son respectivamente

$$\begin{aligned} v_{2x} &= v\ \cos\alpha \\ v_{2y} &= v\ \mathrm{sen}\alpha - gt_{h/2} \end{aligned}$$

Para averiguar la componente v_{2y} necesitamos saber el tiempo que el proyectil emplea en alcanzar la altura h/2, para ello sustituimos en una de las ecuaciones paramétricas

$$\frac{h}{2} = v\ \mathrm{sen}\alpha\ t_{h/2} - \frac{1}{2}gt_{h/2}^2 \quad \Rightarrow \quad t_{h/2}^2 - \frac{2v\ \mathrm{sen}\alpha\ t_{h/2}}{g} + \frac{h}{g} = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$$t_{h/2}=\frac{\dfrac{2v\,sen\alpha}{g}-\sqrt{\dfrac{4v^2sen^2\alpha}{g^2}-\dfrac{4h}{g}}}{2}=\frac{\dfrac{2v\,sen\alpha}{g}-\sqrt{\dfrac{4v^2sen^2\alpha}{g^2}-\dfrac{4\dfrac{\frac{1}{2}v^2sen^2\alpha}{g}}{g}}}{2}\Rightarrow$$

$$t_{h/2}=\frac{\dfrac{2v\,sen\alpha}{g}-\dfrac{v\,sen\alpha}{g}\sqrt{2}}{2}=\frac{v\,sen\alpha}{g}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$$

Se ha escogido de las dos soluciones la que corresponde al tiempo menor, que es cuando la altura h/2 la alcanza el proyectil antes de llegar a la altura h . La otra solución es cuando el proyectil llega a la altura h/2 después de alcanzar la máxima altura h.
Sustituimos el tiempo en la expresión de la velocidad v_{2y}.

$$v_{2y}=v\,sen\alpha-g\frac{v\ sen\alpha}{g}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)=v\ sen\alpha\left(1-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)=v\ sen\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}$$

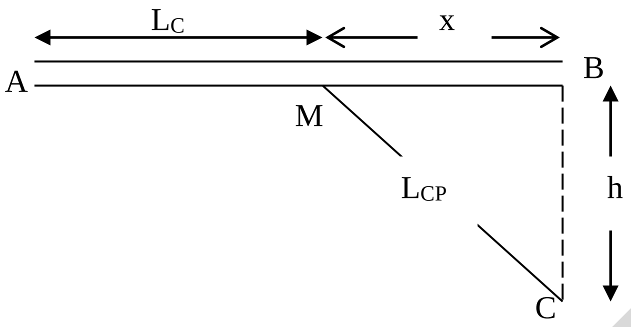
$$v_2=\sqrt{v_{2x}^2+v_{2y}^2}=\sqrt{v^2\cos^2\alpha+\frac{v^2sen^2\alpha}{2}}$$

De acuerdo con el enunciado del problema

$$v_1=\sqrt{\frac{6}{7}}v_2\Rightarrow v^2\cos^2\alpha=\frac{6}{7}\left(v^2\cos^2\alpha+\frac{v^2sen^2\alpha}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad v^2\cos^2\alpha=3v^2sen^2\alpha\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 1-sen^2\alpha=3\ sen^2\alpha\quad\Rightarrow\quad sen\alpha=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\alpha=30º$$

24.-En la figura inferior AB es una carretera y el punto C es un lugar del campo. Un automóvil si se desplaza por la carretera lo hace con una velocidad v constante y si lo hace por el campo con una velocidad ε veces menor que por la carretera. Calcular el valor de x para que el automóvil que se desplaza de A a C lo haga en el tiempo mínimo posible.



El automóvil va de A a M por la carretera, recorriendo la distancia L_C y y de M a C por el campo recorriendo la distancia L_{CP}.
De la figura se deduce que

$$L_C+x = \text{constante} = K$$

El tiempo total del viaje es:

$$t_{total} = \frac{L_C}{v} + \frac{L_{CP}}{v'} = \frac{L_C}{v} + \frac{L_{CP}}{v}\varepsilon = \frac{K - x + \varepsilon\sqrt{x^2+h^2}}{v} = \frac{K + \left(-x + \varepsilon\sqrt{x^2+h^2}\right)}{v}$$

Como el tiempo total ha de ser mínimo y K es constante y v también, el término entre paréntesis ha de ser mínimo

$$-x + \varepsilon\sqrt{x^2+h^2} = \text{mínimo}$$

Derivamos con respecto a x e igualamos a cero

$$-1 + \frac{\varepsilon\ 2x}{2\sqrt{x^2+h^2}} = 0 \quad \Rightarrow \sqrt{x^2+h^2} = \varepsilon x \quad \Rightarrow x^2 + h^2 = \varepsilon^2 x^2 \Rightarrow \quad x = \frac{h}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$$

25.-Un automóvil recorre en línea recta una distancia L con velocidad uniforme v y a continuación frena hasta pararse con una aceleración a constante. Se pide determinar el valor de v, el cual determina que el tiempo empleado en el recorrido total del automóvil sea el mínimo posible.

Una apreciación intuitiva del problema nos dice que si v es muy grande, la longitud L la recorrerá en poco tiempo, pero necesitará un tiempo largo para frenar, por el contrario, si v es pequeña tardará mucho tiempo en recorrer la distancia L pero poco tiempo en frenar, esto quiere decir que habrá una velocidad v para la que el tiempo sea mínimo.

El tiempo que tarda en recorrer la distancia L es:

$$t_1 = \frac{L}{v}$$

El tiempo que tarda en frenar con aceleración a constante

$$v_{final} = 0 = v - at_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{v}{a}$$

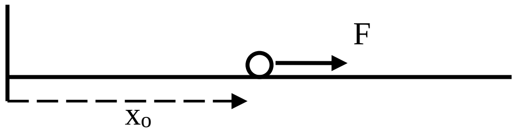
El tiempo total del recorrido:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{L}{v} + \frac{v}{a}$$

Como t ha de ser mínimo derivamos la expresión anterior respecto de v e igualamos a cero

$$\frac{dt}{dv} = 0 = \frac{-L}{v^2} + \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{v^2} = \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{La}$$

26.- Una partícula de masa m, se desplaza a lo largo del eje X. La mencionada partícula se encuentra, en el instante t=0, en la posición x_o con velocidad v_o y está sometida a una fuerza constante F dirigida como indica la figura.



Determinar v=f(t) y v=f(x)

Hacemos uso de la segunda ecuación de Newton

$$F = m\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \int F dt = \int m \ dv \quad \Rightarrow \quad Ft = mv + Cte$$

Para hallar la constate recurrimos a las condiciones iniciales, cuando t=0, la velocidad es v_o, sustituyendo en la expresión anterior

$$0 = mv_o + Cte \quad \Rightarrow \quad Cte = -mv_o$$

$$Ft = mv - mv_0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{Ft}{m} + v_o$$

Volviendo a la ecuación de Newton

$$F = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = mv\frac{dv}{dx} \quad \Rightarrow \quad \int F dx = \int mv \ dv \Rightarrow \quad Fx = m\frac{v^2}{2} + Cte$$

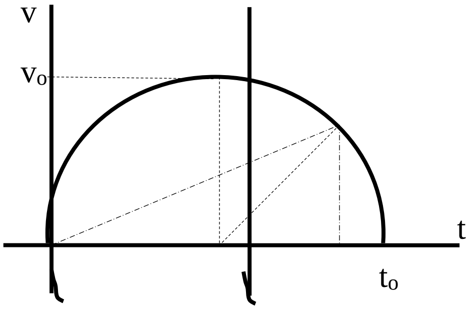
Según las condiciones iniciales cuando $x = x_o$, $v = v_o$

$$Fx_o = m\frac{v_o^2}{2} + Cte \quad \Rightarrow \quad Cte = Fx_o - m\frac{v_o^2}{2}$$

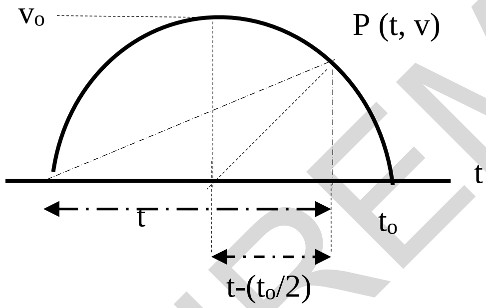
Sustituyendo en la ecuación

$$Fx = m\frac{v^2}{2} + Fx_o - m\frac{v_o^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{2F(x - x_o)}{m} + v_o^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2F(x - x_o)}{m} + v_o^2}$$

27.- Una partícula se desplaza con una velocidad indicada por la semicircunferencia de la gráfica inferior. La máxima velocidad se indica por v_o. Determinar el desplazamiento efectuado por la partícula en función de v_o y t_o



Buscamos la relación entre la velocidad y el tiempo
El centro de la circunferencia tiene por coordenadas $\left(\frac{t_o}{2}, 0\right)$ y el radio de la circunferencia es $t_o/2$.



De la figura se deduce:

$$\left(t-\frac{t_o}{2}\right)^2+v^2=\left(\frac{t_o}{2}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad t^2+\frac{t_o^2}{4}-tt_o+v^2=\frac{t_o^2}{4} \quad\Rightarrow\quad v^2=tt_o-t^2$$

Aplicamos la ecuación anterior cuando $t=\frac{t_o}{2}$

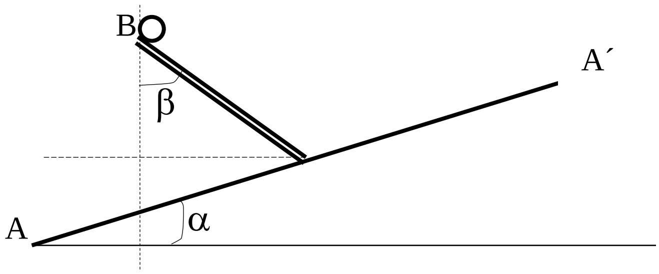
$$v_o^2=\frac{t_o}{2}\cdot t_o-\left(\frac{t_o}{2}\right)^2=\frac{t_o^2}{4} \quad\Rightarrow\quad t_o=2v_o \quad (1)$$

El desplazamiento que sufre la partícula entre t=0 y $t=t_o$ es igual al área bajo la curva velocidad tiempo. Esa área vale:

$$\Delta s=\frac{\pi\cdot\frac{t_o^2}{4}}{2}=\frac{\pi\ t_o\cdot t_o}{8}=\frac{\pi}{8}\cdot 2v_o\cdot t_o=\frac{\pi v_o t_o}{4}$$

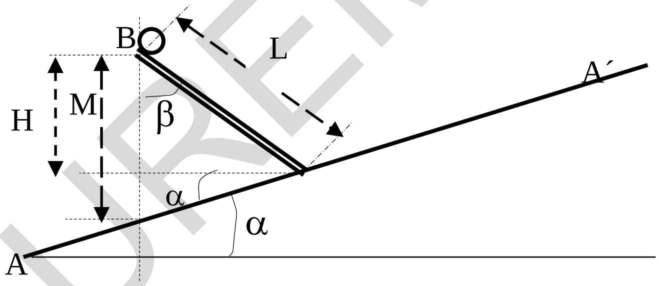
Ricardo David Fernández Cruz   José Luis Hernández Pérez

28.- Un plano inclinado AA´ forma un ángulo α con la horizontal. Desde un punto B fijo se pueden construir diversos planos inclinados que lleguen al plano AA´.



Se pide el ángulo β que forma uno de los planos con la vertical (ver figura superior) en el que se cumpla que un cuerpo que parte, sin velocidad inicial, de B y desliza por él, llegue al plano AA´ en el tiempo mínimo. Se supone que el cuerpo desliza sin rozamiento

En la figura inferior L representa la longitud del plano, M la distancia de B al plano AA´ en dirección vertical



Conviene observar que si se cambia de plano, cambian β, L y H pero permanecen constantes M y α.

$$L = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}g\ \cos\beta\ t^2 \quad (1)$$

Vamos a poner la variable L en función de β.

$$\cos\beta = \frac{H}{L} \quad ; \quad \text{tag}\alpha = \frac{M - H}{L\ \text{sen}\beta} \quad \Rightarrow L\ \text{tag}\alpha\ \text{sen}\beta = M - L\cos\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{M}{\text{tag}\alpha\ \text{sen}\beta + \cos\beta} \quad (2)$$

Llevando la ecuación (2) a la (1)

$$\frac{M}{\mathrm{tag}\alpha\ \mathrm{sen}\beta+\cos\beta}=\frac{1}{2}g\cos\beta\ t^{2}\qquad\Rightarrow\qquad t=\sqrt{\frac{\frac{2M}{g}}{\mathrm{tag}\alpha\ \mathrm{sen}\beta\ \cos\beta+\cos^{2}\beta}}$$

Como t ha de ser un mínimo derivamos la expresión anterior con respecto a β, e igualamos a cero.

$$\frac{dt}{d\beta}=\frac{\dfrac{\frac{-2M}{g}\left[\mathrm{tag}\alpha\left(-\mathrm{sen}^{2}\beta+\cos^{2}\beta\right)-2\cos\beta\ \mathrm{sen}\beta\right]}{\left(\mathrm{tag}\alpha\ \mathrm{sen}\beta^{-}\cos\beta+\cos^{2}\beta\right)^{2}}}{2\sqrt{\dfrac{\frac{2M}{g}}{\mathrm{tag}\alpha\ \mathrm{sen}\beta^{-}\cos\beta+\cos^{2}\beta}}}=0\qquad\Rightarrow$$

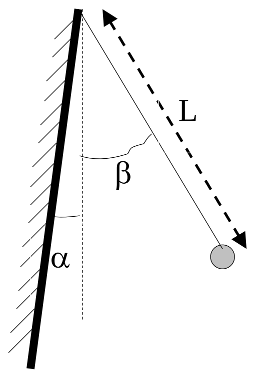
$$\Rightarrow\ \mathrm{tag}\alpha\left(-\mathrm{sen}^{2}\beta+\cos^{2}\beta\right)-2\cos\beta\ \mathrm{sen}\beta=0$$

Hacemos uso de las relaciones trigonométricas: $\cos^{2}\beta-\mathrm{sen}^{2}\beta=\cos2\beta$ y

$$2\mathrm{sen}\beta\ \cos\beta=\mathrm{sen}2\beta$$

$$\mathrm{tag}\alpha\cdot\cos2\beta-\mathrm{sen}2\beta=0\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{tag}\alpha}{\mathrm{tag}2\beta}-1=0\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{tag}\alpha}{\mathrm{tag}2\beta}=1\Rightarrow\quad\alpha=2\beta\quad\Rightarrow\quad\beta=\frac{\alpha}{2}$$

29.- Un péndulo simple de longitud L cuelga de una pared inclinada que forma un ángulo α con la vertical.



El péndulo se separa de su posición de equilibrio un ángulo $\beta>\alpha$ y se deja en libertad. Se admite que el choque con la pared es completamente elástico. Se pide calcular el periodo de las oscilaciones. Los ángulos α y β son pequeños.

Si los ángulos son pequeños el movimiento del péndulo es un movimiento armónico simple y en principio vamos a referirnos a este movimiento.
Recordemos que a efectos de deducir las ecuaciones del movimiento armónico, éste puede considerarse como la proyección sobre un diámetro de un móvil que con velocidad angular constante recorre una circunferencia

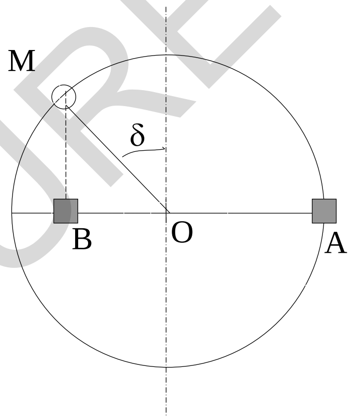


Fig. 1

Supongamos que M se desplaza por la circunferencia con velocidad angular constante ω y que el móvil que efectúa el movimiento armónico está situado sobre el eje X en la posición A cuando t=0. El tiempo que emplea el móvil en ir desde A hasta B, es el mismo que M tarda en describir el ángulo $\frac{\pi}{2}+\delta$, y como lo hace a velocidad angular constante, podemos escribir

$$\frac{2\pi}{T}=\frac{\frac{\pi}{2}+\delta}{t} \quad \Rightarrow \quad t=\frac{\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)T}{2\pi}$$

Siendo T el periodo del movimiento armónico. Si el móvil fuese de A a B y volviese de B a A emplearía un tiempo 2t =T´

$$T' = \frac{\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)T}{\pi} \quad (1)$$

Aplicamos estos resultados al movimiento del péndulo del problema.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2)$$

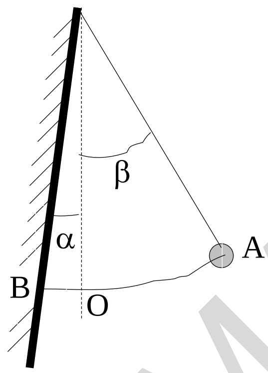


Fig. 2

De la figura 2 se deduce que

$$OA = \beta\ L \quad ; \quad OB = \alpha\ L$$

De la figura 1 se deduce que

$$\text{sen}\delta = \frac{OB}{OA} = \frac{\alpha\ L}{\beta\ L} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Aplicando la ecuación (1) y la igualdad (2):

$$T' = \frac{\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)T}{\pi} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}+\text{arco seno}\frac{\alpha}{\beta}\right)2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}{\pi} = \left(\pi + 2\ \text{arco seno}\frac{\alpha}{\beta}\right)\sqrt{\frac{L}{g}}$$