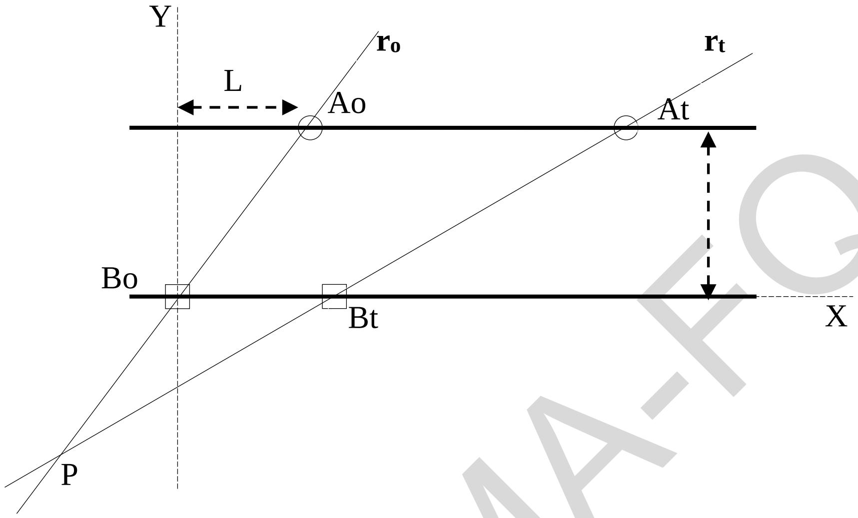
30.-Un punto material A se desplaza con velocidad constante +v_A por una recta. Otro punto material B se desplaza con una velocidad constante +v_B por una recta paralela a la anterior cuya distancia es h. Demostrar que la recta que une los puntos Ay B pasa siempre por un punto fijo P.

Hacemos en primer lugar un esquema gráfico del problema



HEUREMA-FQ

En la figura superior el móvil A ocupa una posición cualquiera en el tiempo t=0 y el móvil B una posición cualquiera en el tiempo t=0. Si tomamos unos ejes coordenados centrados en la posición inicial del móvil B, las coordenadas cartesianas de ambos móviles en el tiempo t=0, son:

Móvil A (L , h) ; Móvil B (0, 0)

Al cabo de un tiempo t cualquiera el móvil A se ha desplazado hasta At, siendo las coordenadas de At(v_At, h).
En el mismo tiempo t, el móvil B se ha desplazado hasta Bt, siendo las coordenadas Bt(0, v_Bt).

Las rectas $\mathbf{r_o}$ y $\mathbf{r_t}$ se cortan en el punto P. Si lo que se quiere demostrar es que las rectas pasan siempre por P, las coordenadas de este punto deben ser independientes de t.
Hacemos uso de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

para las rectas $\mathbf{r_o}$ y $\mathbf{r_t}$

$$\frac{y-0}{x-0}=\frac{h-0}{L-0} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{h}{L}x$$

$$\frac{y-0}{x-v_Bt}=\frac{h-0}{(L+v_At)-v_Bt} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{h(x-v_Bt)}{(L+v_At)-v_Bt}$$

Dado que el punto P pertenece a ambas rectas, resolvemos

$$\frac{h}{L}x = \frac{h(x - v_B t)}{(L + v_A t) - v_B t} \quad \Rightarrow \quad xL + xv_A t - xv_B t = xL - v_B Lt \Rightarrow xt(v_A - v_B) = v_B Lt \quad \Rightarrow$$

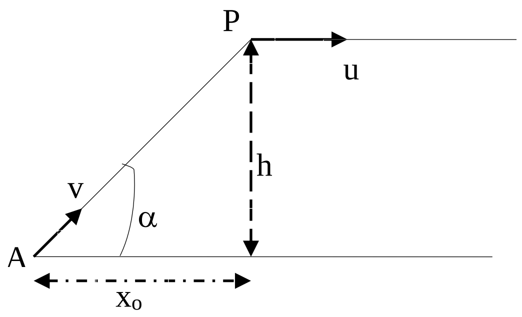
$$\Rightarrow x = \frac{Lv_B}{v_A - v_B}$$

Sustituimos el valor de x en la ecuación de la recta **r₀**

$$y = \frac{h}{L}\frac{Lv_B}{v_A - v_B} = \frac{h\ v_B}{v_A - v_B}$$

HEUREMA-FQ

31.- Un pato vuela en línea recta con velocidad constante u y a una altura h sobre el suelo. Un cazador situado en A dispara una bala con velocidad v apuntando en la dirección del pato tal como indica la figura inferior. El pato es alcanzado por la bala y se pide la altura a la que volaba.



Dado que la bala alcanza al pato en un tiempo ti, en ese instante las coordenadas del pato y de la bala son las mismas.
Coordenadas del pato en le tiempo ti : (xo+u ti ; h)
La bala describe una trayectoria parabólica siendo sus ecuaciones

$$x = v\cos\alpha\ t; \qquad y = v\,\mathrm{sen}\alpha\ t - \frac{1}{2}gt^2$$

Coordenadas de la bala en el tiempo ti : (v cos α ti , $\quad h = v\ \mathrm{sen}\alpha\ \ ti - \frac{1}{2}g\ ti^2$

$$v\cos\alpha\ \ ti = xo + u\ \ ti \quad \Rightarrow \quad ti = \frac{xo}{v\cos\alpha - u}$$

$$v\,\mathrm{sen}\alpha\ \ ti - \frac{1}{2}g\ \ ti^2 = h$$

Sustituyendo el tiempo en la segunda ecuación

$$v\,\mathrm{sen}\alpha\ \frac{xo}{v\cos\alpha - u} - \frac{1}{2}g\left(\frac{xo}{v\cos\alpha - u}\right)^2 = h \quad \Rightarrow \quad \frac{xo}{v\cos\alpha - u}\left[v\,\mathrm{sen}\alpha - \frac{1}{2}\frac{g\ xo}{v\cos\alpha - u}\right] = h$$

De la figura se deduce: $\mathrm{tag}\alpha = \dfrac{h}{xo} \quad \Rightarrow \quad xo = \dfrac{h}{\mathrm{tag}\alpha}$

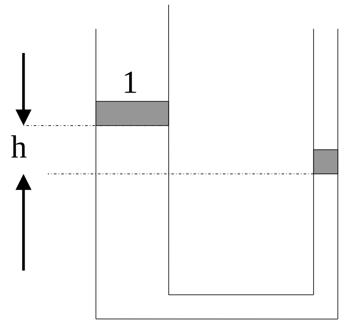
$$\frac{h}{\mathrm{tag}\alpha(v\cos\alpha - u)}\left[v\,\mathrm{sen}\,\alpha - \frac{1}{2}\frac{g\ h}{\mathrm{tag}\alpha(v\cos\alpha - u)}\right] = h \Rightarrow \frac{v\ \cos\alpha}{v\cos\alpha - u} - \frac{g\ h}{2\mathrm{tag}^2\alpha(v\cos\alpha - u)^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g\ h}{2\ \ \mathrm{tag}^2\alpha(v\cos\alpha - u)^2} = \frac{v\ \cos\alpha}{v\cos\alpha - u} - 1 = \frac{u}{v\cos\alpha - u} \Rightarrow \quad \frac{g\ h}{2\ \ \mathrm{tag}^2\alpha(v\cos\alpha - u)} = u$$

$$h = \frac{2u\ \ \mathrm{tag}^2\alpha(v\cos\alpha - u)}{g}$$

HEUREMA-FQ

32.-Dos vasos comunicantes de forma cilíndrica llevan sendos émbolos de masas M_1 y M_2 y áreas S_1 y S_2, respectivamente. El líquido contenido en el vaso tiene una densidad ρ. En el equilibrio existe un desnivel h entre ambos émbolos tal como indica la figura inferior



Si sobre el émbolo 1 se coloca una pesa de masa m =M_2=$2M_1$, no existe desnivel entre ambos émbolos, pero si se coloca la misma pesa sobre el émbolo 2 se produce un desnivel H. Determinar el valor de H en función de h.

Dos puntos del mismo líquido que están al mismo nivel soportan las mismas presiones, por tanto:

$$\frac{M_1 g}{S_1}+\rho g h=\frac{M_2 g}{S_2} \quad \Rightarrow \quad \rho h=\frac{M_2}{S_2}-\frac{M_1}{S_1}$$

Cuando se coloca la pesa de masa m sobre el émbolo 1

$$\frac{M_1 g}{S_1}+\frac{mg}{S_1}=\frac{M_2 g}{S_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{m}{2}+m}{S_1}=\frac{m}{S_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2S_1}=\frac{1}{S_2} \quad \Rightarrow \quad S_2=\frac{2S_1}{3}$$

$$\rho h=\frac{M_2}{S_2}-\frac{M_1}{S_1}=\frac{m}{S_2}-\frac{\frac{m}{2}}{S_1}=\frac{3m}{2S_1}-\frac{m}{2S_1}=\frac{m}{S_1}$$

Cuando la pesa de masa m se coloca sobre el émbolo 2

$$\frac{M_1 g}{S_1}+\rho g H=\frac{M_2 g}{S_2}+\frac{mg}{S_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{m}{2}}{S_1}+\rho H=\frac{2m}{S_2} \Rightarrow \frac{m}{2S_1}+\rho H=\frac{2m}{\frac{2S_1}{3}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \rho H=\frac{3m}{S_1}-\frac{m}{2S_1}=\frac{5m}{2S_1}=\frac{5}{2}\rho h \quad \Rightarrow \quad H=\frac{5}{2}h$$

HEUREMA-FQ

33.-Una partícula se mueve por el eje X, en sentido negativo, a velocidad constante v_1. Otra partícula lo hace por el eje Y también en sentido negativo y con una velocidad constante v_2. En el instante t=0, las partículas pasan por las posiciones x_o e y_o respectivamente. Determinar el tiempo que transcurre para que la distancia entre ellas sea mínima.

Las ecuaciones del movimiento de las partículas son:

$$x = x_o - v_1 t \quad ; \quad y = y_o - v_2 t$$

La distancia entre ellas

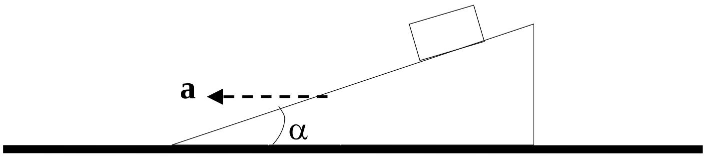
$$D = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x_o - v_1 t)^2 + (y_o - v_2 t)^2}$$

Para hallar la distancia mínima derivamos la función anterior respecto de la variable tiempo e igualamos a cero

$$\frac{dD}{dt} = \frac{2(x_o - v_1 t)\cdot(-v_1) + 2(y_o - v_2 t)\cdot(-v_2)}{2\sqrt{(x_o - v_1 t)^2 + (x_o - v_1 t)^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x_o v_1 + y_o v_2}{v_1^2 + v_2^2}$$

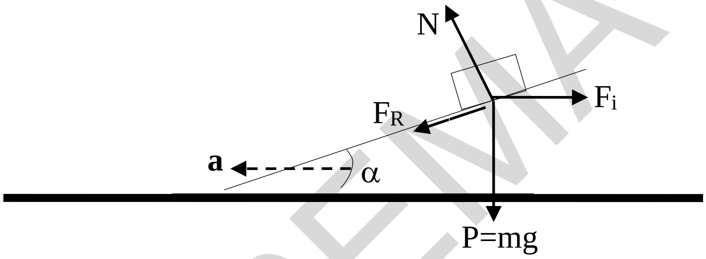
HEUREMA-FQ

34.-Un prisma cuyo ángulo es α se mueve por un suelo horizontal sin rozamiento con una aceleración constante paralela al suelo. Sobre él está situado un cuerpo.



Determinar el valor de la aceleración del prisma para la que el cuerpo comience a deslizarse hacia arriba del prisma. El coeficiente de rozamiento entre el prisma y el cuerpo es μ.

En la figura inferior está dibujado el diagrama de fuerzas para el cuerpo con inclusión de la fuerza de inercia ya que el sistema elegido está acelerado



F_i= ma , fuerza de inercia

P= mg , peso del cuerpo

$F_R = \mu$ N , fuerza de rozamiento

N = normal, fuerza con que el plano empuja al cuerpo

Descomponiendo las fuerzas sobre dos ejes perpendiculares, X e Y, siendo el X Paralelo al plano y el Y perpendicular al mismo, resulta:

$$\left.\begin{array}{c} F_i \cos\alpha = F_R + mg\ \operatorname{sen}\alpha \\ N = mg\ \cos\alpha + F_i\ \operatorname{sen}\alpha \\ F_R = \mu N \end{array}\right\}$$

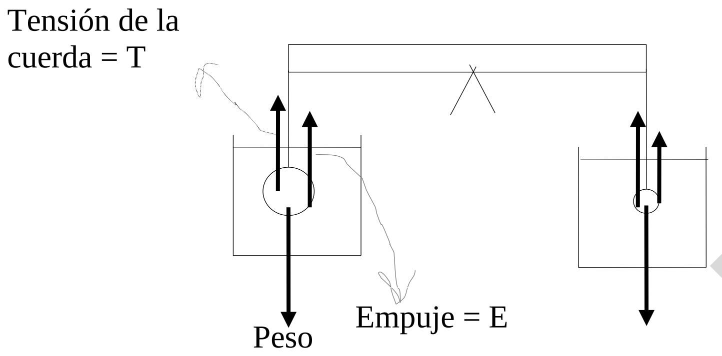
Combinando las tres ecuaciones se llega a:

$$F_i \cos\alpha = \mu\ mg\ \cos\alpha + \mu\ F_i \operatorname{sen}\alpha + mg\ \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ma(\cos\alpha - \mu\ \operatorname{sen}\alpha) = mg(\mu\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a(1 - \mu\ \operatorname{tag}\alpha) = g(\mu + \operatorname{tag}\alpha) \quad \Rightarrow \quad a = g\,\frac{\mu + \operatorname{tag}\alpha}{1 - \mu\ \operatorname{tag}\alpha}$$

HEUREMA-FQ

35.-En los extremos de una palanca de brazos iguales se cuelgan dos cuerpos de la misma masa. Uno de los cuerpos se introduce en un líquido de densidad ρ_1 y el otro en un líquido de densidad ρ_2 , observándose que la palanca sigue en equilibrio. Calcular la relación de densidades entre ambos cuerpos.

En la figura inferior se hace un esquema de las fuerzas que actúan sobre los cuerpos



Sobre cada cuerpo actúan su peso P, la tensión de la cuerda T y el empuje del líquido. Par ambos cuerpos el peso es el mismo por lo dicho en el enunciado, la tensión es la misma porque la reacción a cada T está aplicada en la palanca y ésta se encuentra en equilibrio, finalmente los empujes han de ser iguales y si los líquidos tienen diferentes densidades es que los cuerpos tienen diferentes volúmenes.

$$V_1\rho_1 g = V_2\rho_2 g \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{d_1}\rho_1 g = \frac{m}{d_2}\rho_2 g \quad \Rightarrow \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

HEUREMA-FQ

36.-Un cilindro, de densidad ρ y altura h, flota en la zona de separación de dos líquidos de densidades ρ_1 y ρ_2 respectivamente, siendo $\rho_1<\rho<\rho_2$. Determinar la altura x del cilindro que se encuentra sumergido en el líquido de densidad ρ_2.

Al estar el cilindro en equilibrio es porque el peso del mismo se iguala con la suma de los empujes que sufre por parte de los dos líquidos. Designamos con x a la parte del cilindro sumergida en el líquido de densidad ρ_2, por tanto, la altura que está en el líquido de densidad ρ_1 es h-x, por m a la masa total del cilindro y por S al área de la base del cilindro.

$$mg = Sh\rho\ g = Sx\rho_2 g + S(h-x)\ \rho_1 g \quad \Rightarrow \quad h\rho = x\rho_2 + (h-x)\ \rho_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad h\rho - h\rho_1 = x\rho_2 + h\rho_1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{h(\rho-\rho_1)}{\rho_2-\rho_1}$$

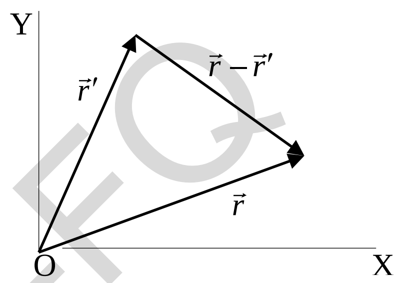
HEUREMA-FQ

37.-Desde el mismo lugar y con un intervalo de tiempo τ se lanzan dos cuerpos con la misma velocidad v y el mismo ángulo α con la horizontal ¿Cuáles son las ecuaciones que describen el movimiento del cuerpo lanzado en primer lugar visto desde un sistema ligado al cuerpo lanzado en segundo lugar?

Las ecuaciones del movimiento de los dos cuerpos ligados a un sistema inercial que esta sobre el suelo horizontal son:

$$x = v\cos\alpha\ t \quad ; \quad y = v\,\mathrm{sen}\alpha\ t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$x' = v\cos\alpha\ (t-\tau) \quad ; \quad y' = v\,\mathrm{sen}\alpha\ (t-\tau) - \frac{1}{2}g(t-\tau)^2$$



El vector de posición del primer cuerpo respecto del segundo

$$\vec{r} - \vec{r}' = x_r\vec{i} + y_r\vec{j} = (x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j}$$

Las posiciones vistas desde el segundo cuerpo son:

$$x_r = x - x' = v\ \cos\alpha \cdot t - v\ \cos\alpha\ \cdot (t-\tau) = v\ \cos\alpha \cdot \tau$$

$$y_r = y - y' = v\ \mathrm{sen}\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 - v\ \mathrm{sen}\alpha \cdot (t-\tau) + \frac{1}{2}g(t-\tau)^2 = v\,\mathrm{sen}\alpha \cdot \tau - \frac{1}{2}g(-\tau^2 + 2t\tau) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_r = v\,\mathrm{sen}\alpha \cdot \tau + \frac{g\tau^2}{2} - gt\tau$$

Las velocidades relativas son:

$$v_x = \frac{dx_r}{dt} = 0 \quad ; \quad v_x = \frac{dy_r}{dt} = -g\tau$$

38.-Un tren parte de la estación a las 12 horas según el reloj de la estación y se desplaza con movimiento uniformemente acelerado. Un observador situado en el andén frente a la cabecera del tren observa que su reloj marca las 12 horas cuando pasa por delante de él, el penúltimo vagón. Este penúltimo vagón tarda 10 segundos en pasar por delante del observador mientras que el último vagón emplea 8 segundos. Calcular cuánto se retrasa el reloj del observador respecto del reloj de la estación.

Designamos con τ al tiempo que se retrasa el reloj del observador respecto del de la estación y con L la longitud de cada vagón del tren.
La velocidad del tren cuando han transcurrido τ segundos es $a\tau$, siendo a, la aceleración constante del tren
Para el penúltimo vagón su velocidad cuando pasa por delante del observador es at, esto es, la velocidad del tren

$$L = a\tau \; 10 + \frac{1}{2} a 10^2$$

Cuando pasan los dos vagones, penúltimo y último del tren, por delante del observador, el tiempo total es 10+8 = 18 segundos

$$2L = a\tau \; 18 + \frac{1}{2} a 18^2$$

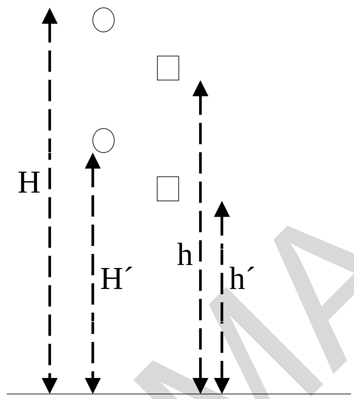
De ambas ecuaciones se deduce:

$$2\left(a\tau \; 10 + \frac{1}{2} a 10^2 \right) = a\tau \; 18 + \frac{1}{2} a 18^2 \Rightarrow \quad 20\tau + 100 = 18\tau + 162 \Rightarrow \quad \tau = \frac{62}{2} = 31 \; s$$

HEUREMA-FQ

39.-Un submarino desciende en vertical con una velocidad constante v. En un determinado instante emite un sonido que dura un tiempo T_o. El sonido se refleja en el fondo del mar y llega al submarino y el tiempo que dura el sonido reflejado medido en el submarino es T. Si la velocidad del sonido en el agua es c, determinar la velocidad con la que se sumerge el submarino.

Designamos con H la altura a la que está el submarino respecto del fondo del mar cuando empieza a emitir el sonido y con H´ la posición cuando termina de emitirse la señal. Con h designamos la posición del submarino cuando empieza a recibir la señal reflejada en el fondo y h´ cuando termina. La figura inferior aclara estos valores.



en el fondo y h´ cuando termina. La figura inferior aclara estos valores. Las posiciones se han puesto separadas para claridad de la figura. Entre las posiciones H y H´ el tiempo transcurrido es T_o y entre h y h´, T.

$$H - H' = vT_o \quad (1) \qquad ; \qquad h - h' = vT \quad (2)$$

El sonido emitido en H viaja H+h al llegar al submarino y emplea un tiempo τ_1 y en ese mismo tiempo el submarino recorre H-h

$$H + h = c\tau_1 ; H - h = v\tau_1 \Rightarrow \quad \frac{H+h}{c} = \frac{H-h}{v} \Rightarrow \quad H(c-v) = h(c+v) \Rightarrow \quad H = \frac{c+v}{c-v}h$$

El fin de la señal sonora se emite en la posición del submarino H´ y esa señal recorre la distancia H´+h´ cuando llega al submarino empleando un tiempo τ_2 y en ese mismo tiempo el submarino recorre H´-h´.

$$H' + h' = c\tau_2 ; H' - h' = v\tau_2 \Rightarrow \frac{H'+h'}{c} = \frac{H'-h'}{v} \Rightarrow \quad H'(c-v) = h'(c+v) \Rightarrow \quad H' = \frac{c+v}{c-v}h'$$

Sustituyendo H y H´ en la ecuación (1)

HEUREMA-FQ

$$\frac{c+v}{c-v}h-\frac{c+v}{c-v}h' = vT_o \Rightarrow \frac{c+v}{c-v}\left(h-h'\right) = vT_o$$

Sustituyendo en la última ecuación h-h´ se tiene:

$$\frac{c+v}{c-v}vT = vT_o \Rightarrow \quad \frac{c+v}{c-v}T = T_o \Rightarrow \quad cT + vT = cT_o - vT_o \quad \Rightarrow \quad v = \frac{T_o - T}{T_o + T}c$$

HEUREMA-FQ

HEUREMA-FQ