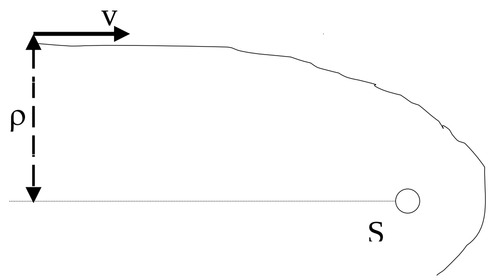
40.-Una masa m proveniente del infinito posee una velocidad v y se acerca al Sol, siendo su parámetro de impacto ρ, tal como se observa en la figura.



Hallar la distancia mínima a la que la masa m se acerca al Sol.
Constante de gravitación, G ; Masa del Sol, M_S

Designamos con d a la mínima distancia de la masa al Sol y a v_d su velocidad en esa posición. La conservación del momento angular nos permite escribir

$$mv\ \rho = mv_d d \quad \Rightarrow \quad v\ \rho = v_d d \quad (1)$$

Por la conservación de la energía mecánica

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_d^2 - G\frac{M_S m}{d} \quad \Rightarrow \quad v^2 = v_d^2 - 2\frac{GM_S}{d} \quad \Rightarrow \quad v_d = \sqrt{v^2 + 2\frac{GM_S}{d}}$$

Sustituyendo en la ecuación (1)

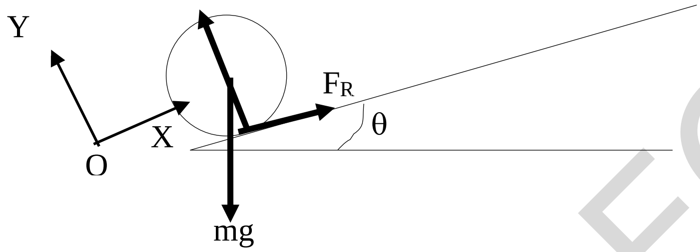
$$v\ \rho = \left(\sqrt{v^2 + 2\frac{GM_S}{d}}\right)d \Rightarrow \quad v^2 d^2 + 2GM_S d - v^2\rho^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad d^2 + \frac{2GM_S d}{v^2} - \rho^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$d = \frac{-2\frac{GM_S}{v^2} + \sqrt{\frac{4G^2M_S^2}{v^4} + 4\rho^2}}{2} = \sqrt{\frac{G^2M_S^2}{v^4} + \rho^2} - \frac{GM_S}{v^2}$$

41.-Un cilindro homogéneo de masa m y radio R se hace girar hasta alcanzar una velocidad angular ω_o, luego se coloca suavemente sobre un plano inclinado de ángulo θ .¿Hasta qué altura ascenderá el cilindro? El coeficiente de rozamiento es μ, cumpliéndose que μ > tag θ.

Al principio el cilindro tendrá que ir adquiriendo velocidad de traslación del centro de masas al mismo tiempo que su velocidad angular disminuye. El diagrama de fuerzas es el siguiente:



Las ecuaciones del movimiento, respecto de los ejes OXY, son:

$$\left.\begin{aligned} &F_R - mg\ \text{sen}\theta = ma \\ &F_R R = I\alpha = \frac{1}{2} mR^2 \cdot \alpha \\ &F_R = \mu N = \mu mg\ \cos\theta \end{aligned}\right\}$$

A partir de estas ecuaciones se obtiene

$$a = g(\mu\cos\theta - \text{sen}\theta) \quad ; \quad \alpha = \frac{2F_R}{mR} = \frac{2\mu\ mg\cos\theta}{mR} = \frac{2\mu\ g\ \cos\theta}{R}$$

Para la velocidad lineal del centro de masas

$$v = 0 + g(\mu\ \cos\theta - \text{sen}\theta)t$$

Para la velocidad angular del cilindro

$$\omega = \omega_o - \alpha t = \omega_o - \frac{2\mu\ g\ \cos\theta}{R} t$$

La velocidad del centro de masas del cilindro aumenta y la velocidad de rotación disminuye, llegará un momento en el que $v = \omega R$, y esto ocurre en un intervalo de tiempo t y el movimiento del cilindro en el plano pasa de ser de rodadura y deslizamiento a rodadura.

$$v=\omega R\Rightarrow g(\mu\cos\theta-\text{sen}\theta)t=\left(\omega_o-\frac{2\mu\ g\ \cos\theta}{R}t\right)R\Rightarrow t=\frac{\omega_o R}{g(\mu\cos\theta-\text{sen}\theta+2\mu\ \cos\theta)}\Rightarrow$$

$$t=\frac{\omega_o R}{g(3\mu\ \cos\theta-\text{sen}\theta)}$$

Las velocidad lineal del centro de masas y angular del cilindro son:

$$v=g(\mu\ \cos\theta-\text{sen}\theta)\cdot\frac{\omega_o R}{g(3\mu\ \cos\theta-\text{sen}\theta)}=\frac{\omega_o R(\mu\ \cos\theta-\text{sen}\theta)}{3\mu\ \cos\theta-\text{sen}\theta}$$

$$\omega=\omega_o-\frac{2\mu\ g\ \cos\theta}{R}\cdot\frac{\omega_o R}{g(3\mu\ \cos\theta-\text{sen}\theta)}=\omega_o\left(1-\frac{2\mu\ \cos\theta}{3\mu\ \cos\theta-\text{sen}\theta}\right)$$

Desde que el cilindro se colocó sobre el plano hasta el tiempo t, el cilindro ha ascendido una altura H y ha recorrido una distancia L sobre el plano

$$L=\frac{H}{\text{sen}\theta}=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow H=\frac{1}{2}\text{sen}\theta\cdot g(\mu\ \cos\theta-\text{sen}\theta)\cdot\frac{\omega_o^2R^2}{g^2(3\mu\ \cos\theta-\text{sen}\theta)^2}\quad\Rightarrow$$

$$H=\frac{\omega_o^2R^2\text{sen}\theta\cdot(\mu\ \cos\theta-\text{sen}\theta)}{2g\ (3\mu\ \cos\theta-\text{sen}\theta)^2}$$

A partir del momento en que se ha llegado a la rodadura sin deslizamiento, admitimos que la energía total del cilindro, que es suma de la de rotación más traslación, se convierte íntegramente en energía potencial

$$\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}mv^2=mgh\Rightarrow\frac{1}{4}R^2\omega^2+\frac{1}{2}v^2=gh\Rightarrow\frac{1}{4}v^2+\frac{1}{2}v^2=gh\Rightarrow h=\frac{3v^2}{4g}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h=\frac{3\omega_o^2R^2(\mu\ \cos\theta-\text{sen}\theta)^2}{4g(3\mu\ \cos\theta-\text{sen}\theta)^2}$$

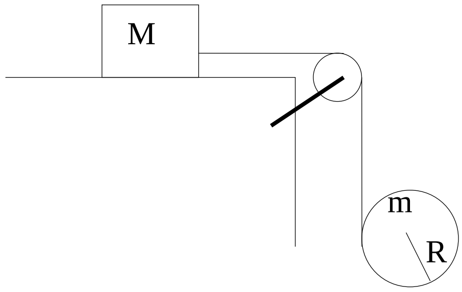
La altura total a la que sube el cilindro es:

$$H_{total}=H+h=\frac{\omega_o^2R^2\text{sen}\theta\cdot(\mu\ \cos\theta-\text{sen}\theta)}{2g\ (3\mu\ \cos\theta-\text{sen}\theta)^2}+\frac{3\omega_o^2R^2(\mu\ \cos\theta-\text{sen}\theta)^2}{4g(3\mu\ \cos\theta-\text{sen}\theta)^2}\Rightarrow$$

$$H_{total}=\frac{[\omega_o^2R^2(\mu\ \cos\theta-\text{sen}\theta)][2\text{sen}\theta+3\mu\ \cos\theta-3\text{sen}\theta]}{4g(3\mu\ \cos\theta-\text{sen}\theta)^2}\Rightarrow$$

$$H_{total}=\frac{[\omega_o^2R^2(\mu\ \cos\theta-\text{sen}\theta)][3\mu\ \cos\theta-\text{sen}\theta]}{4g(3\mu\ \cos\theta-\text{sen}\theta)^2}=\frac{\omega_o^2R^2(\mu\ \cos\theta-\text{sen}\theta)}{4g(3\mu\ \cos\theta-\text{sen}\theta)}$$

42.- En el esquema de la figura M =10 kg y m=5 kg y radio R = 8 cm. La polea fija y la cuerda tienen masas despreciables. La cuerda puede desenrollarse por la polea móvil m sin resbalar.



a) Calcular el menor coeficiente de rozamiento de M con la mesa para que cuando el sistema esté en libertad la masa M permanezca en reposo.
b) Si el coeficiente de rozamiento entre M y la mesa es 0,05 determinar la tensión de la cuerda y las aceleraciones lineales de M y m respecto del suelo.

a) En la figura 1 se indican las fuerzas que actúan sobre M y m.

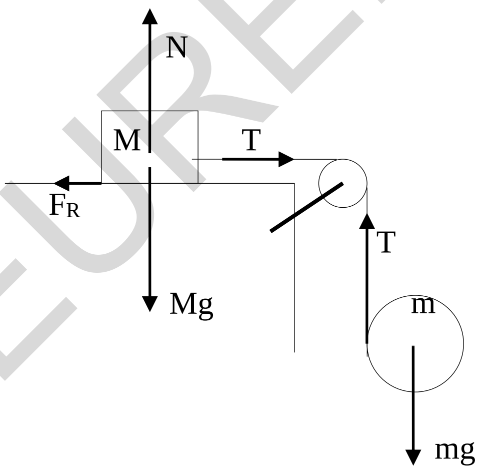


Fig.1

Para la masa M , $T - F_R = Ma_M = 0$

Para la masa m
$$\left.\begin{aligned} T \cdot R &= I\alpha = \frac{1}{2} mR^2 \alpha \Rightarrow T = \frac{1}{2} mR\alpha \\ mg - T &= m\,a_m \\ a_m &= \alpha R \end{aligned}\right\}$$

Sustituyendo α de la tercera ecuación en la primera y a_m de la segunda resulta

$$T = \frac{1}{2} mR \frac{a_m}{R} = \frac{1}{2} m \left(g - \frac{T}{m} \right) \Rightarrow \quad 2T = mg - T \;\Rightarrow\; T = \frac{mg}{3}$$

Como $\quad T = F_R = \mu N = \mu Mg = \dfrac{mg}{3} \quad \Rightarrow \quad \mu = \dfrac{m}{3M} = \dfrac{5}{3 \cdot 10} = 0{,}17$

Si el coeficiente de rozamiento entre M y la mesa es inferior a 0,17 habrá deslizamiento de la masa M sobre la mesa.

b) Dado que el coeficiente de rozamiento es 0,05 <0,17, la masa M deslizará sobre la mesa. La polea móvil se moverá hacia abajo al desenrollarse la cuerda y también al avanzar la masa M sobre la mesa, respecto del suelo la aceleración lineal de m es la suma de la aceleración de M más la aceleración producida al desenrollarse la cuerda.

$$T - \mu Mg = Ma_M \Rightarrow a_M = \frac{T}{M} - \mu g$$

$$T \cdot R = I\alpha = \frac{1}{2} mR^2 \alpha \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} mR\alpha \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2T}{mR} \Rightarrow \quad \frac{a_m}{R} = \frac{2T}{mR} \Rightarrow \quad a_m = \frac{2T}{m}$$

$$a_m = \alpha R$$

$$mg - T = m(a_M + a_m)$$

Sustituyendo en la última ecuación

$$mg - T = m\left(\frac{T}{M} - \mu g + \frac{2T}{m} \right) \Rightarrow mg - T = T\frac{m}{M} - m\mu g + 2T \Rightarrow T\left(3 + \frac{m}{M} \right) = mg(1+\mu) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{mg(1+\mu)}{3 + \dfrac{m}{M}} = \frac{5 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}05}{3 + \dfrac{5}{10}} = 14{,}7\,\text{N}$$

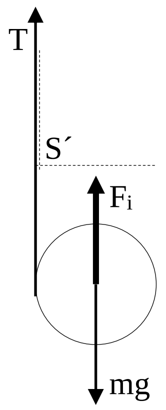
$$a_M = \frac{T}{M} - \mu g = \frac{14{,}7}{10} - 0{,}05 \cdot 9{,}8 = 0{,}98\ \frac{m}{s^2}$$

$$a_m = \frac{2T}{m} = \frac{2 \cdot 14{,}7}{5} = 5{,}88\ \frac{m}{s^2}$$

La aceleración lineal de la polea móvil respecto del suelo es:

$$a = a_M + a_m = 0{,}98 + 5{,}88 = 6{,}86\ \frac{m}{s^2}$$

Podemos calcular la aceleración de la polea móvil de otra manera y es tomando un sistema de referencia no inercial S´, situado en la cuerda que desciende con aceleración a_M. En este sistema hemos de introducir una fuerza de inercia contraria a esta aceleración .Calculamos la aceleración relativa a_m respecto de S´.



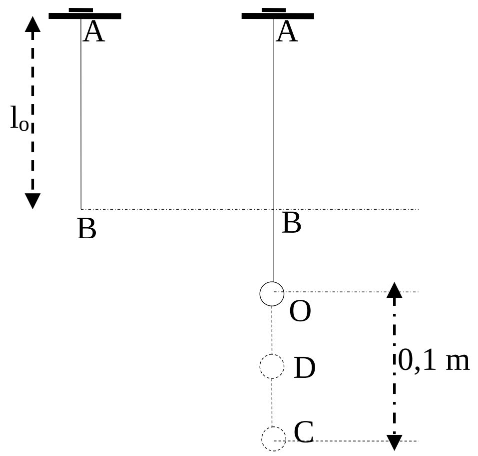
$$F_i = \left| -ma_M \right| = ma_M$$

$$mg - T - ma_M = ma_m \Rightarrow a_m = g - \frac{T}{m} - a_M \Rightarrow a_m = g - \frac{T}{m} - \frac{T}{M} + \mu g =$$

$$= g(1+\mu) - T\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \quad \Rightarrow \quad a_m = 9{,}8 \cdot 1{,}05 - 14{,}7\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right) = 5{,}88\ \frac{m}{s^2}$$

De igual modo, para conocer la aceleración absoluta sumariamos a esta aceleración relativa a_m la de arrastre a_M.

43.-Una cuerda elástica que tiene una longitud natural l_o, sigue la ley de Hooke (la fuerza es directamente proporcional al alargamiento).Un extremo de la cuerda está sujeta firmemente en A y en el otro (B) se ha colocado una masa m= 0,2 kg como indica la figura.



La masa m se lleva suavemente hasta que alcanza la posición de equilibrio en O. Después se estira la cuerda hasta la posición C y desde allí se deja en libertad a la masa m y se mide el periodo de oscilación que es T = 2 s.
a) Calcular la constante k de la ley de Hooke para la cuerda

b) La velocidad de la masa m en el D siendo OD =0,05 m

c) El tiempo que emplea la masa m en ir desde C a D

d) La máxima energía cinética de m.

e) Ahora la masa m se lleva hasta el punto A y se deja caer libremente se pide calcular el tiempo que emplea en retornar por primera vez al punto A.

a) El periodo de oscilación de la masa m está relacionado con la constante k y la masa m

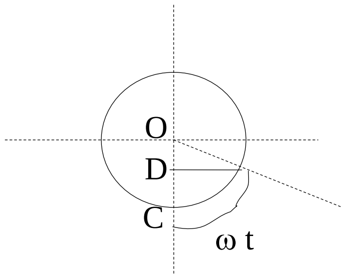
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0{,}2}{2^2} = 1{,}97\,\frac{N}{m}$$

b) En la posición C la velocidad de la masa m es cero y la distancia a O es 0,1 m , por tanto, la ecuación del movimiento armónico que describe la masa m oscilando a uno y otro lado del punto O , es :

x= A cos ωt $= 0{,}1\cos\frac{2\pi}{T}t$ o también $x = 0{,}1\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{T} + \frac{\pi}{2}\right)$

$$v=\frac{dx}{dt}=-A\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

En la posición D el ángulo ωt es:



OD= 0,05 m
OC=A =0,1 m
cos ω t =OD/OC=0,05/0,1
ω t =60º

$$v=-0{,}1\cdot\frac{2\pi}{2}\,\mathrm{sen}\,60º=-0{,}27\,\frac{m}{s}$$

c)

$$\omega t=60º=\frac{60\cdot\pi}{180}\,\mathrm{rad}=\frac{\pi}{3}\,\mathrm{rad}\quad\Rightarrow\quad t=\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{2\pi}{2}}=\frac{1}{3}\,s$$

d) La máxima energía cinética ocurre cuando la masa m pase por el punto O de equilibrio y debido a que el sistema es conservativo esa energía cinética es igual a la potencial en el punto C.

$$Ec(O)=Ep(C)=\frac{1}{2}\cdot 1{,}97\cdot 0{,}1^2=9{,}9.10^{-3}\ J$$

e) Al llevar la masa m al punto A, la cuerda se dobla y la masa m cae libremente desde A hasta el punto B en que la cuerda tienen su longitud natural, a partir de ese lugar la cuerda comienza a estirarse, siguiendo la ley de Hooke, como consecuencia de ello, la masa m empieza a disminuir su energía cinética que se convierte en potencial elástica en la cuerda, esto ocurre hasta que la velocidad de la masa es cero. Si tomamos como referencia de la energía potencial gravitatoria la posición de la masa m cuando su velocidad es cero (punto que designamos con Q) resulta que m en A tiene energía cinética y energía potencial gravitatoria. Designamos con Δx la distancia entre el punto A y la posición en que la masa m tiene velocidad cero.

$$Ec(A)+Ep(A)=\frac{1}{2}mv_A^2+mg\,\Delta x=\frac{1}{2}m(2gl_o)+mg\,\Delta x=\frac{1}{2}k(\Delta x)^2\Rightarrow$$

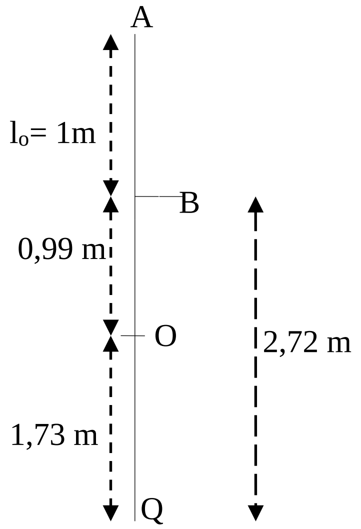
$$\Rightarrow 2mgl_0+2mg\,\Delta x=k(\Delta x)^2\Rightarrow \Delta x^2-\frac{2mg}{k}\Delta x-\frac{2mgl_0}{k}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta x^2-1{,}99\,\Delta x-1{,}99=0\Rightarrow \Delta x=2{,}72\,m$$

La posición del punto O corresponde al lugar en que equilibran el peso de la masa m y la fuerza elástica que sobre ella ejerce la cuerda.

$$mg=k\overline{OA}\Rightarrow \overline{OA}=\frac{mg}{k}=\frac{0{,}2\cdot 9{,}8}{1{,}97}=0{,}99\,m$$

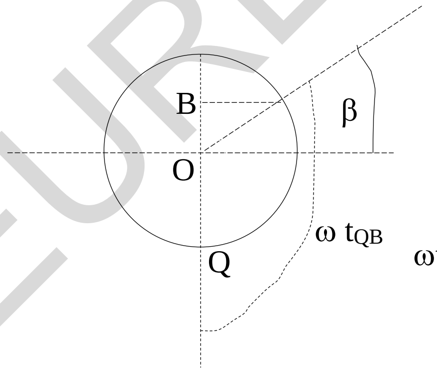
La masa m cae libremente de A hasta B, luego efectúa un movimiento armónico de periodo T=2 segundos y amplitud 2,72-0,99=1,73 m entre B y Q, sigue con movimiento armónico entre Q y B y finalmente a partir de B se mueve libremente en el campo gravitatorio. El tiempo total en retornar a A es:
2(tiempo de caída libre desde A a B + tiempo desde B a Q)



Velocidad en Q =0
Velocidad en O, máxima
Velocidad en B= $\sqrt{2gl_o}$

Tiempo desde A hasta B $\quad l_o = \frac{1}{2} g t_{AB}^2 \Rightarrow t_{AB} = \sqrt{\frac{2l_o}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1}{9,8}} = 0,45\,s$

El tiempo de B a Q es igual al tiempo desde Q a B
Posición de la masa m en B



OB = 0,99 m
OQ =1,73 m
sen β= OB/OQ=0,99/1,73
β=34,9º

ωt_{QB}=90+34,9=124,9º

$$\omega t_{QB} = 124{,}9^o = 124{,}9 \cdot \frac{\pi}{180} rad = 2{,}18 rad \Rightarrow t_{QB} = \frac{2{,}18}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{2{,}18}{\pi} = 0{,}69\, s$$

Tiempo de retornar a A = 2*(0,45+0,69) = 2,28 s

44.-Desde una altura h sobre el suelo y en dirección horizontal se lanzan simultáneamente dos cuerpos con velocidades v_1 y v_2. El primero hacia la derecha y el segundo hacia al izquierda. Calcular la distancia entre ambos cuerpos cuando sus vectores velocidad sean perpendiculares entre sí.

Tomando los ejes X e Y sobre el suelo, las ecuaciones de los cuerpos son

$$x_1 = v_1 t \quad y_1 = h - \frac{1}{2} g t^2 \qquad v(1)_X = \frac{dx_1}{dt} = v_1 \quad ; v(2)_Y = -gt$$

$$x_2 = -v_2 t \quad y_1 = h - \frac{1}{2} g t^2 \qquad v(2)_X = \frac{dx_1}{dt} = -v_2 \quad ; v(2)_Y = -gt$$

Escribimos los vectores velocidad de cada cuerpo en función de los vectores unitarios sobre los ejes:

$$\vec{v}(1) = v_1 \vec{i} - gt\,\vec{j} \qquad ; \qquad \vec{v}(2) = -v_2 \vec{i} - gt\,\vec{j}$$

Si los vectores velocidad son perpendiculares su producto escalar es nulo, lo que sucederá en un instante t_P.

$$\vec{v}(1) \cdot \vec{v}(2) = 0 = v_1 v_2 - g^2 t_P^2 \quad \Rightarrow \quad t_P = \frac{\sqrt{v_1 v_2}}{g}$$

Llevamos el instante t_P , a las ecuaciones de las posiciones en la dirección del eje X de los cuerpos y restándolas calculamos la distancia entre ellos.

$$\Delta x = x_1(t_P) - x_2(t_P) = v_1 \frac{\sqrt{v_1 v_2}}{g} - \left(-v_2 \frac{\sqrt{v_1 v_2}}{g} \right) = \frac{\sqrt{v_1 v_2}}{g} \left(v_1 + v_2 \right)$$

45.- Supongamos que la energía potencial de un cuerpo está dada por la expresión $E_P = \frac{1}{2}kx^2$, siendo k una constante. Si la amplitud de la oscilación es x_0 , para una distancia x la velocidad es v.¿Cuál sería la velocidad para una amplitud nx_0 y para una distancia nx? Demostrar que el periodo de la oscilación no depende de la amplitud.

Teniendo en cuenta que la fuerza es igual a menos el gradiente de la energía potencial y dado que el movimiento es monodimensional, podemos escribir:

$$F = -\frac{dE_P}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (1)$$

La ecuación (1) es una ecuación diferencial tal que x es una función que derivada dos veces nos dé de nuevo la función, esta función es una función armónica

$$x = A\,\text{sen}\,\omega t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\text{sen}\,\omega t = -\omega^2 x \quad (2)$$

Identificando (2) con (1)

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right) = \frac{k}{m} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

El periodo es independiente de la amplitud. Se trata de un movimiento armónico simple. Podemos aplicar el principio de conservación de la energía, entre un punto cualquiera del recorrido y el de amplitud.

$$\frac{1}{2}kx_o^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{k}{m}\left(x_o^2 - x^2\right) = v^2$$

$$\frac{1}{2}k\left(nx_o\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(nx^2\right) + \frac{1}{2}mv'^2 \Rightarrow \frac{k}{m}n^2\left(x_o^2 - x^2\right) = v'^2$$

De las dos ecuaciones se deduce:

$$\frac{v'^2}{v^2} = n^2 \Rightarrow v' = nv$$

46.-Un péndulo simple está formado por una cuerda de masa despreciable y longitud l, y una pequeña esfera de hierro de masa m. El periodo de este péndulo es $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Si este péndulo se hace oscilar:

a) en el campo gravitatorio y por encima de un imán, siendo F_M la fuerza magnética perpendicular que actúa sobre la esfera de hierro el periodo cambia a T_1.

b) Si se hace oscilar entre los polos de un imán que provoca una fuerza magnética horizontal el periodo es T_2. Calcular la fuerza magnética en cada caso. Calcular para el caso b) el valor del ángulo que forma el péndulo con la vertical en su posición estable.

a) Las fuerzas que actúan sobre la esfera de hierro son las indicadas en la figura

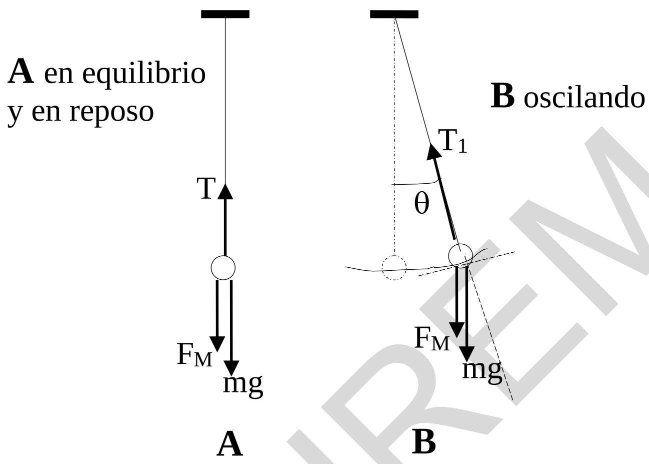


Fig.1

Descomponiendo las fuerzas peso y F_M en dirección perpendicular a la dirección del hilo y teniendo en cuenta que θ sea pequeño, $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, y que el valor del arco es igual al valor del ángulo en radianes por el radio, podemos escribir:

$$\left(F_M + mg\right)\operatorname{sen}\theta = F \Rightarrow \left(F_M + mg\right)\theta = F \Rightarrow \left(F_M + mg\right)\frac{x}{l} \Rightarrow \quad F = kx$$

Siendo una constante $\frac{F_M + mg}{l} = k$ resulta finalmente: $F = k \cdot x$

Se trata de un movimiento armónico cuyo periodo es:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{F_M + mg}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{F_M + mg}} \quad \Rightarrow \quad T_1^2 = 4\pi^2\frac{ml}{F_M + mg}$$

Combinando la última ecuación con la del péndulo simple:

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{ml}{F_M + mg} \Rightarrow T_1^2 = T_o^2 \frac{g}{l}\frac{ml}{F_M + mg} \Rightarrow F_M + mg = \left(\frac{T_o}{T_1}\right)^2 mg \Rightarrow$$

$$F_M = mg\left[\left(\frac{T_o}{T_1}\right)^2 - 1\right]$$

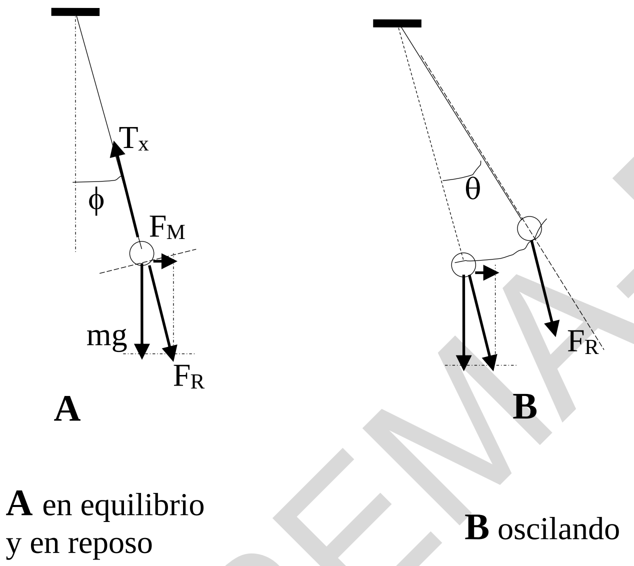


Fig.2

Ahora actúan dos fuerzas perpendiculares sobre la esfera de hierro que dan lugar a una resultante $F_R = \sqrt{(mg)^2 + F_M^2}$ y a una posición de equilibrio del péndulo que forma con la dirección vertical un ángulo ϕ. Si ahora el péndulo se separa un ángulo pequeño θ de la posición de equilibrio el péndulo oscila.

$$F_R \operatorname{sen}\theta = F \Rightarrow \quad F_R\ \theta = F \Rightarrow \quad \left(\sqrt{(mg)^2 + F_M^2}\right)\frac{x}{l} = F \quad \Rightarrow \quad F = kx$$

Siendo una constante $\dfrac{\sqrt{(mg)^2 + F_M^2}}{l} = k$

Se trata de un movimiento armónico cuyo periodo es:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{\sqrt{(mg)^2 + F_M^2}}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{\sqrt{(mg)^2 + F_M^2}}} \quad \Rightarrow \quad T_2^4 = (2\pi)^4 \frac{m^2 l^2}{(mg)^2 + F_M^2}$$

Para el péndulo simple tenemos:

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \;\Rightarrow\; T_o^4 = (2\pi)^4\,\frac{l^2}{g^2}$$

A partir de las dos últimas ecuaciones

$$T_2^4 = (2\pi)^4\,\frac{m^2 l^2}{(mg)^2 + F_M^2} = \frac{T_o^4 g^2}{l^2}\,\frac{m^2 l^2}{(mg)^2 + F_M^2} \;\Rightarrow\; (mg)^2 + F_M^2 = \frac{T_o^4 g^2 m^2}{T_2^4} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; F_M^2 = (mg)^2\,\frac{T_o^4}{T_2^4} - (mg)^2 \quad\Rightarrow\quad F_M = mg\sqrt{\frac{T_o^4}{T_2^4} - 1}$$

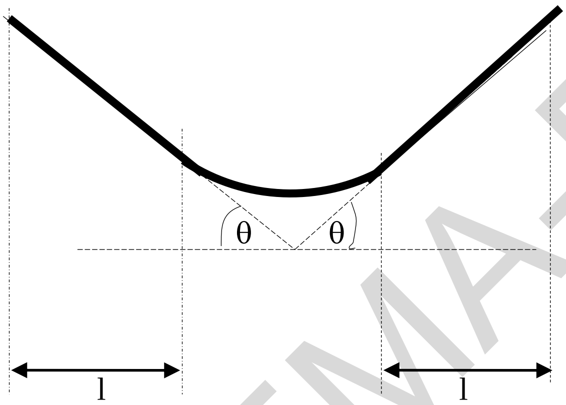
Para calcular el ángulo ϕ, observamos la figura 2.

$$\operatorname{tag}\phi = \frac{F_M}{mg} = \frac{mg\sqrt{\frac{T_o^4}{T_2^4} - 1}}{mg} = \sqrt{\frac{T_o^4}{T_2^4} - 1} = \frac{\sqrt{T_o^4 - T_2^4}}{T_2^2} \;\Rightarrow\; \frac{1-\cos^2\phi}{\cos^2\phi} = \frac{T_o^4 - T_2^4}{T_2^4} \;\Rightarrow$$

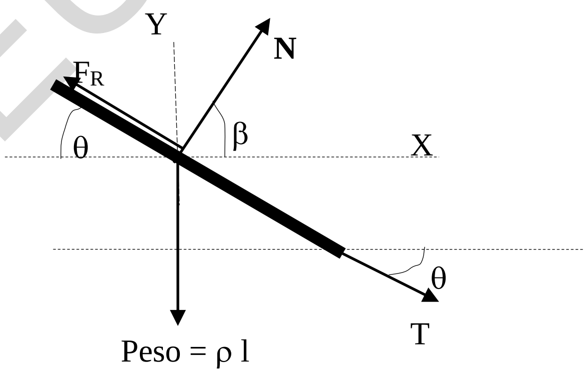
$$\Rightarrow\quad \frac{1}{\cos^2\iota} - 1 = \frac{T_o^4}{T_2^4} - 1 \quad\Rightarrow\quad \cos\phi = \left(\frac{T_2}{T_0}\right)^2$$

$$\phi = \arccos\left(\frac{T_2}{T_o}\right)^2$$

47.-Una cuerda se encuentra en reposo sobre dos planos inclinados que forman con la horizontal el mismo ángulo θ. La cuerda tiene una densidad por unidad de longitud uniforme ρ, y el coeficiente de rozamiento con los planos es la unidad. En la figura se observa que parte de la cuerda (longitud L) permanece en el aire y otras dos partes (de longitud cada una l), están sobre los planos. El sistema tiene simetría derecha izquierda como indica la figura. Se pide cuál es la mayor fracción de la cuerda ($\varepsilon = \dfrac{L}{2l+L}$) que está en el aire y para qué ángulo θ ocurre que ε alcanza su valor máximo y cuál es el valor de ε.



Analizamos las fuerzas que actúan sobre la longitud de cuerda l que está sobre el plano inclinado de la izquierda.



N es la fuerza con que el plano empuja a la cuerda, F_R es la fuerza de rozamiento = μN, T es la fuerza con que la cuerda que está en el aire tira de l. La reacción a esta fuerza está aplicada en L.

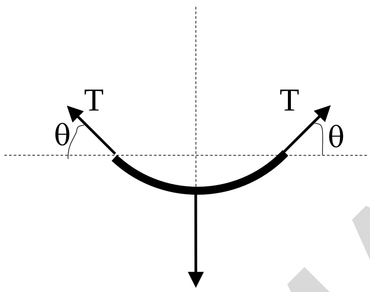
Dado que el trozo de cuerda l está en reposo se cumple.

$$\sum F_y = 0; \quad F_R\text{sen}\theta + N\text{sen}\beta - T\text{sen}\theta\text{-}\rho l\text{=}0$$
$$\sum F_x = 0; \quad \text{-}F_R\cos\theta\text{+}N\cos\beta + T\cos\theta\text{=}0$$

Como θ y β son ángulos complementarios: sen β = cos θ y cos β = sen θ

$$F_R\,\text{sen}\theta + N\cos\theta - T\text{sen}\theta = \rho\,l \quad \Rightarrow \quad \mu N\text{sen}\theta + N\cos\theta - T\text{sen}\theta = \rho\,l \quad (1)$$
$$\mu N\cos\theta - N\,\text{sen}\theta = T\cos\theta \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\mu N\cos\theta - N\,\text{sen}\theta}{\cos\theta} (2)$$

Para la cuerda de longitud L que está al aire:



Teniendo en cuenta que L se encuentra en equilibrio

$$2\,T\,\text{sen}\,\theta = \rho \quad L \quad (3)$$

Sustituimos (2) en (3)

$$2\frac{\mu N\cos\theta - N\,\text{sen}\theta}{\rho\cos\theta}\text{sen}\theta = L \quad (4)$$

Sustituimos (2) en (1)

$$\frac{\mu N\text{sen}\theta + N\cos\theta}{\rho} - \frac{\mu N\cos\theta - N\,\text{sen}\theta}{\rho\cos\theta}\text{sen}\theta = l \quad (5)$$

Llevamos l y L a ε (definido en el enunciado del problema).

$$\varepsilon = \frac{L}{2l + L} = \frac{2\dfrac{\mu N\cos\theta - N\text{sen}\theta}{\rho\cos\theta}\text{sen}\theta}{2\left(\dfrac{\mu N\text{sen}\theta + N\cos\theta}{\rho} - \dfrac{\mu N\cos\theta - N\text{sen}\theta}{\rho\cos\theta}\text{sen}\theta\right) + 2\dfrac{\mu N\cos\theta - N\text{sen}\theta}{\rho\cos\theta}\text{sen}\theta}$$

Teniendo en cuenta que μ = 1

$$\varepsilon = \frac{\dfrac{(\cos\theta - \text{sen}\theta)\text{sen}\theta}{\cos\theta}}{\text{sen}\theta + \cos\theta} = \frac{\text{sen}\theta\cos\theta - \text{sen}^2\theta}{\text{sen}\theta\cos\theta + \cos^2\theta} \quad (6)$$

Como nos piden el valor máximo de ε, derivamos la ecuación anterior respecto de θ e igualamos a cero.

$$\frac{d\varepsilon}{d\theta}=\frac{\left(\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\cos^2\theta\right)\left(-\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)}{\left(\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\cos^2\theta\right)^2}-$$
$$-\frac{\left(\operatorname{sen}\theta\cos\theta-\operatorname{sen}^2\theta\right)\left(-\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)}{\left(\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\cos^2\theta\right)^2}=0 \quad\Rightarrow$$

Al igualar a cero resulta que en principio son posibles dos soluciones

$$\frac{\left(-\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)\left[\left(\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\cos^2\theta\right)-\left(\operatorname{sen}\theta\cos\theta-\operatorname{sen}^2\theta\right)\right]}{\left(\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\cos^2\theta\right)^2}=0$$

$$\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\operatorname{sen}\theta\cos\theta-\operatorname{sen}^2\theta \quad\Rightarrow\quad \operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=0$$

Conduce a una relación correcta pero no relacionada con el problema ya que, la solución es θ =0 con lo que el suelo es horizontal.

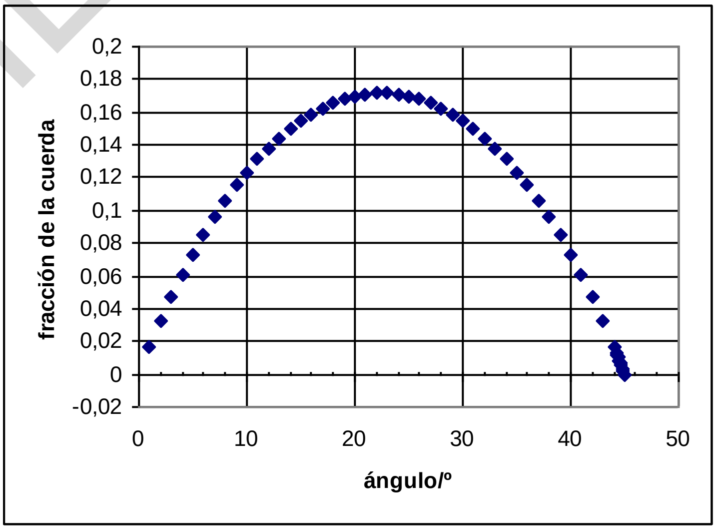
La otra solución posible es:

$$-\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta=0 \quad\Rightarrow\quad \cos 2\theta-\operatorname{sen}2\theta=0 \;\Rightarrow\; 1-\operatorname{tag}2\theta=0 \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \operatorname{tag}2\theta=1 \quad\Rightarrow\quad \theta=22{,}5^{o}$$

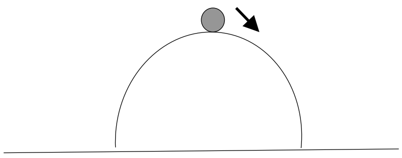
Sustituyendo en la ecuación (6)

$$\varepsilon==\frac{\text{sen}22{,}5^o\ \cos 22{,}5^o-\text{sen}^2\,22{,}5^o}{\text{sen}22{,}5^o\ \cos 22{,}5^o+\cos^2 22{,}5^o}=0{,}172$$

Vamos ahora a representar ε frente a θ.



48.-Una partícula puntual de masa m está situado en lo alto de un hemisferio de masa M. La partícula comienza a deslizar hacia la derecha. Se pide el ángulo θ para el cual la partícula abandona el hemisferio. El ángulo θ se mide desde el centro de la base del hemisferio. Se considera que no existe rozamiento entre el hemisferio y el suelo ni entre la partícula y el hemisferio.



Calcular el valor de θ cuando m=M, m<< M, m=100 M.

Este problema es una variante de uno clásico en el que se considera que el hemisferio está fijo. Aquí nos encontramos que si *m* se mueve hacia la derecha el hemisferio se desplaza hacia la izquierda.
En la figura 1 se consideran dos sistemas de referencia: OXY y O´X´Y´. El primero está ligado al suelo y es un sistema inercial, el segundo está ligado al hemisferio. En el instante t=0 ambos sistemas son coincidentes
.

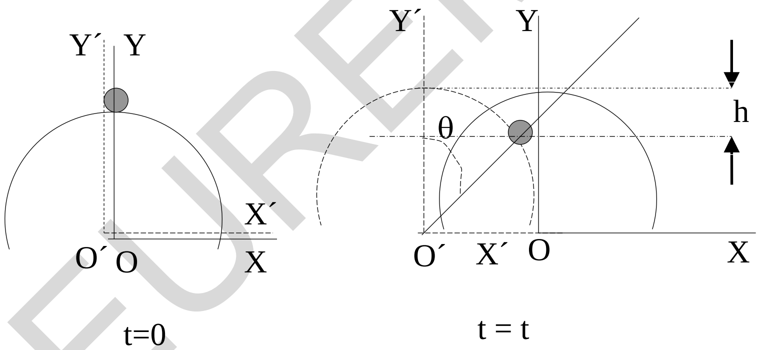


Fig.1

El instante *t=t* se considera cuando la masa puntual *m*, se desprende del hemisferio. Durante ese intervalo de tiempo el sistema O´X´Y´ es un sistema no inercial ya que el hemisferio se está acelerando por la fuerza de reacción N´. En la figura 2a se indican las fuerzas que actúan sobre la masa puntual (cuando todavía no se ha separado del hemisferio) y en la 2b las fuerzas que actúan sobre el hemisferio. N´ es la reacción a N y está aplicada en el hemisferio, mientras que N lo está en la masa puntual *m*. Entre los instantes *t=0 y t=t* , N´ existe y da una componente horizontal que empuja al hemisferio hacia la izquierda produciendo en él una aceleración y por esta razón el sistema O´X´Y´ es un sistema no inercial , pero cuando *m* se separa de *M* ya no existe N´ y por tanto a partir de ese instante O´X´Y´ se desplaza con velocidad constante constituyendo un sistema inercial.

El instante *t=t* se considera cuando la masa puntual *m*, se desprende del hemisferio. Durante ese intervalo de tiempo el sistema O´X´Y´ es un sistema no inercial ya que el hemisferio se está acelerando por la fuerza de reacción N´. En la figura 2a se indican las fuerzas que actúan sobre la masa puntual (cuando todavía no se ha separado del hemisferio) y en la 2b las fuerzas que actúan sobre el hemisferio. N´ es la reacción a N y está aplicada en el hemisferio, mientras que N lo está en la masa puntual *m*. Entre los instantes *t=0 y t=t* , N´ existe y da una componente horizontal que empuja al hemisferio hacia la izquierda produciendo en él una aceleración y por esta razón el sistema O´X´Y´ es un sistema no inercial , pero cuando *m* se separa de *M* ya no existe hemisferio hacia la izquierda produciendo en él una aceleración y por esta razón el N´ y por tanto a partir de ese instante O´X´Y´ se desplaza con velocidad constante constituyendo un sistema inercial.

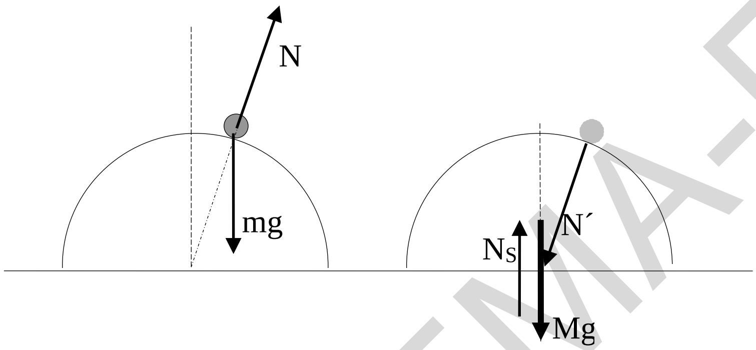


Fig.2b

Fig.2a

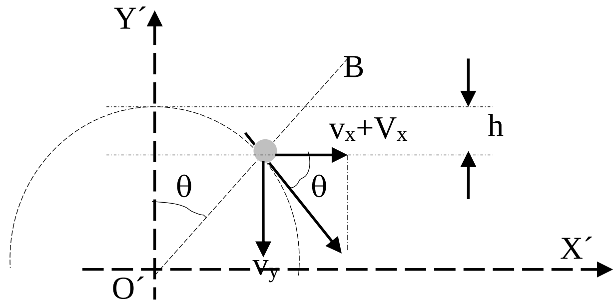
Volviendo a la figura 1, designamos las velocidades respecto del sistema OXYZ con V_x la velocidad del hemisferio hacia la izquierda en el instante t=t, y v_x e y v_y a las componentes de la velocidad de *m* justamente en el momento en que se separa de M, o lo que es lo mismo cuando t=t..

Respecto del sistema O´X´Y´ las componentes de la velocidad de *m* son (v_x+V_x; v_y)

Para el sistema OXY, podemos aplicar el principio de conservación de la cantidad de movimiento sobre el eje X.

$$mv_x = MV_x \quad \Rightarrow \quad V_x = \frac{m}{M} v_x = \varepsilon v_x \quad (1)$$

Desde el sistema O´X´Y´, la velocidad de m es tangente al hemisferio, esto es, perpendicular a la recta O´B, luego:



$$tag\theta = \frac{v_y}{v_x + V_x} \Rightarrow v_y = tag\theta(v_x + V_x) \Rightarrow v_y = tag\theta(v_x + \varepsilon v_x) = tag\theta \cdot v_x(1+\varepsilon) \quad (2)$$

Desde el sistema de referencia OXY aplicamos el principio de conservación de la energía:

$$mgh = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) + \frac{1}{2}MV_x^2$$

Si R es el radio del hemisferio y sustituimos V_x y v_y, resulta:

$$mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}m\left[v_x^2 + v_x^2 \cdot tag^2\theta \cdot (1+\varepsilon)^2\right] + \frac{1}{2}M\varepsilon^2 v_x^2 \Rightarrow$$

$$v_x = \sqrt{\frac{2gR(1-\cos\theta)}{1+(1+\varepsilon)^2 tag^2\theta + \frac{M}{m}\varepsilon^2}} = \sqrt{\frac{2gR(1-\cos\theta)}{1+(1+\varepsilon)^2 tag^2\theta + \varepsilon}} \quad (3)$$

Teniendo en cuenta que V_x es la máxima velocidad que puede recibir el hemisferio, ya que a partir del instante t=t su velocidad no puede aumentar más, puesto que no existe fuerza que lo acelere y teniendo también presente que $V_x = \varepsilon v_x$, siendo ε una constante, se concluye que v_x debe tener un valor máximo y por ello derivamos la ecuación (3) respecto de θ e igualamos a cero.

$$\frac{dv_x}{d\theta}=\frac{\dfrac{\left(1+(1+\varepsilon)^2\cdot \mathrm{tag}^2\theta+\varepsilon\right)(2gR\ \mathrm{sen}\,\theta)-2gR(1-\cos\theta)\cdot 2\cdot(1+\varepsilon)^2\,\mathrm{tag}\theta\,\dfrac{1}{\cos^2\theta}}{\left(1+(1+\varepsilon)^2\cdot \mathrm{tag}^2\theta+\varepsilon\right)^2}}{2\sqrt{\dfrac{2gR(1-\cos\theta)}{1+(1+\varepsilon)^2\cdot \mathrm{tag}^2\theta+\varepsilon}}}=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \left(1+(1+\varepsilon)^2\cdot \mathrm{tag}^2\theta+\varepsilon\right)(2gR\ \mathrm{sen}\,\theta)=2gR(1-\cos\theta)\cdot 2\cdot(1+\varepsilon)^2\,\frac{\mathrm{sen}\theta}{\cos\theta}\,\frac{1}{\cos^2\theta}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad (1+\varepsilon)\left[1+(1+\varepsilon)\cdot\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\right]=2\cdot(1+\varepsilon)^2\,\frac{1-\cos\theta}{\cos^3\theta}\Rightarrow\left[\cos^2\theta+(1+\varepsilon)\cdot \mathrm{sen}^2\theta\right]=$$

$$=2\cdot(1+\varepsilon)\frac{1-\cos\theta}{\cos\ \theta}$$

a) Como $\frac{m}{M}=\varepsilon$, cuando m= M , ε =1, sustituyendo en la última ecuación resulta:

$$\left[\cos^2\theta+2(1-\cos^2\theta)\right]=4\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)\Rightarrow 2-\cos^2\theta=\frac{4}{\cos\theta}-4\Rightarrow\quad \cos^2\theta+\frac{4}{\cos\theta}=6\quad(4)$$

Para resolver la ecuación (4) recurrimos a un procedimiento de tanteo:

Para θ = 40º 5,8<6 ; Para θ = 42º 5,93<6 ; Para θ = 43º 6,20>6 ;

Para θ = 42,9º 6=6

b) Cuando m<<M , ε =0

$$\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\theta=\frac{2-\cos\theta}{\cos\theta}\Rightarrow\cos\theta=2-\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{2}{3}\Rightarrow\quad\theta=48{,}2º$$

Esta es la solución del problema clásico cuando el hemisferio está quieto.

c) Cuando m=100M , ε=100

$$\cos^2\theta+101\mathrm{sen}^2\theta=\frac{202-202\cos\theta}{\cos\theta}\Rightarrow\cos^2\theta+101-101\cos^2\theta=\frac{202}{\cos\theta}-202\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 303-100\cos^2\theta=\frac{202}{\cos\theta}\Rightarrow\quad\cos^2\theta+\frac{2{,}02}{\cos\theta}=3{,}03\quad(5)$$

Resolvemos la ecuación (5) por tanteo

Para θ = 15º, 3,02<3,03 ; Para θ = 16º, 3,025<3,03 , Para θ = 17º, 3,027<3,03

Para θ = 18º, 3,028<3,03 ; Para θ = 19º, 3,03=3,03

49.-Un cilindro hueco tiene un radio R, en el interior del mismo descansa otro cilindro macizo de radio r, siendo r mucho menor que R. El cilindro de radio r se separa un ángulo pequeño de su posición de equilibrio y se deja en libertad. Calcular el periodo de oscilación en los dos casos siguientes: I) No hay rozamiento entre ambos cilindros, II) existe el suficiente rozamiento para que el cilindro pequeño ruede sin deslizar por el interior del grande.

I) En el primer caso al no haber rozamiento, el cilindro pequeño de radio r desliza y el movimiento de éste, es como el de un péndulo simple con la masa concentrada en el centro de masas. El centro de masas de ese cilindro describe al oscilar un arco de radio R-r, tal como se indica en la figura 1.

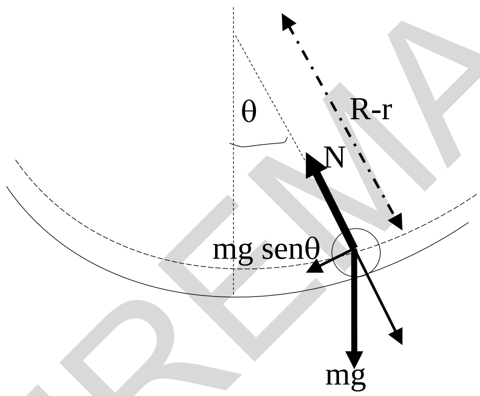


Fig.1

Sobre el cilindro de radio r actúan dos fuerzas el peso mg y la fuerza normal N con que el cilindro de radio R empuja al otro cilindro. El peso se puede decomponer en dos fuerzas, una mg sen θ y otra mg cos θ. La fuerza que hace oscilar al cilindro es mg senθ, pero para ángulos pequeños podemos aproximar el seno θ al ángulo θ expresado en radianes y así poder escribir:

$$mg\,\theta = -ma = -m\,\alpha(R-r) = -m\frac{d^2\theta}{dt^2}(R-r) \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{R-r}\theta = 0$$

La ecuación diferencial representa un movimiento armónico simple cuya pulsación vale.

$$\omega^2 = \frac{g}{R-r} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{R-r} \quad\Rightarrow\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R-r}{g}}$$

II) Las fuerzas que actúan sobre el cilindro pequeño son tres: peso =mg, empuje N y fuerza de rozamiento F_R que al no pasar por el centro de masas produce un momento.

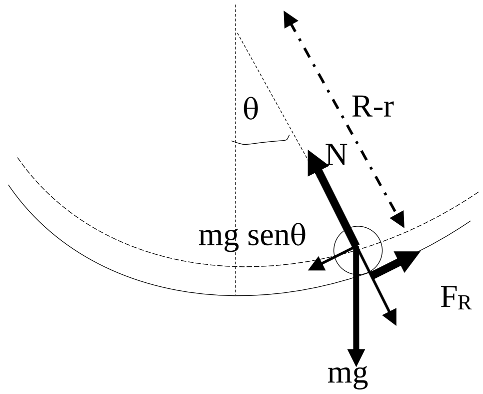


Fig.2

Las fuerzas que hacen oscilar al cilindro y provocan aceleración sobre él son: mg senθ y F_R. Además el cilindro rueda sin deslizar debido al momento de la fuerza de rozamiento respecto del centro de masa del cilindro. Las ecuaciones del movimiento admitiendo que el ángulo θ es pequeño son las siguientes:

$$mg\,\theta - F_R = ma_{CM}$$
$$F_R\, r = I\alpha = \frac{1}{2}mr^2\alpha \Rightarrow F_R = \frac{mr\alpha}{2}$$
$$a_{CM} = \alpha r$$

Llevando las ecuaciones segunda y tercera a la primera resulta:

$$mg\,\theta - \frac{mr\,\alpha}{2} = m\alpha r \quad \Rightarrow \quad g\,\theta = \frac{3}{2}r\,\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2}{3}\frac{g\theta}{r} \quad (1)$$

Cuando el cilindro pequeño da una vuelta completa su centro de masas describe un arco de longitud 2π (R-r) al cual corresponde un ángulo que designamos con β.

Supongamos que el cilindro pequeño describe al rodar un ángulo dβ con lo que su centro de mas avanza un trozo de arco dL, al cual corresponde un ángulo dθ.

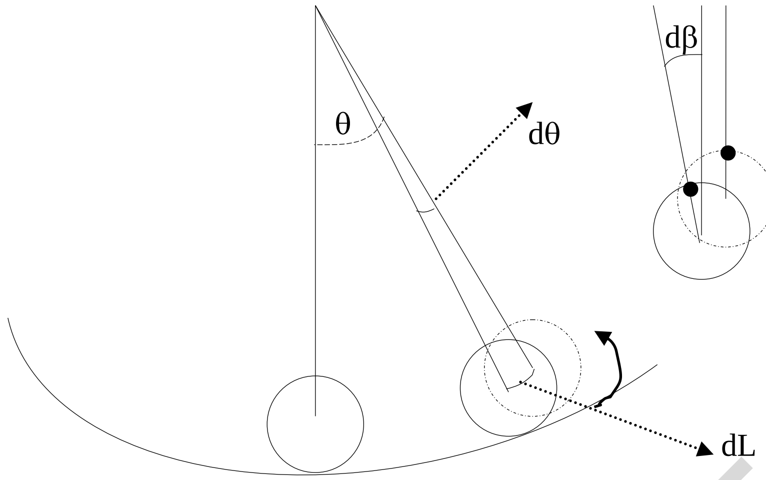


Fig.3

En la figura 3 se observa que $dL = d\theta(R-r))$. Si nos fijamos en el cilindro que rueda (para ello se ha dibujado una figura aparte) éste ha girado un ángulo $d\beta$ al mismo tiempo que el centro de masas describe un arco de longitud dL. Si el cilindro diese una vuelta completa (2 π radianes) el centro de masa hubiese avanzado 2π r metros, por tanto:

$$\frac{2\pi \ \text{radianes}}{2\pi r \ \ \text{metros}} = -\frac{d\beta}{dL} \quad \Rightarrow \quad d\beta = \frac{dL}{r} = -\frac{d\theta(R-r)}{r}$$

Si derivamos la última ecuación con respecto del tiempo obtenemos

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\frac{R-r}{r}$$

Como $\frac{d^2\beta}{dt^2}$ es la aceleración angular α que según la ecuación (1)

$$\alpha = -\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\frac{R-r}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{2g\theta}{3r} = -\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\frac{R-r}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{3}\,\frac{g}{R-r}\theta = 0$$

$$\omega^2 = \frac{2}{3}\,\frac{g}{R-r} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{2}{3}\,\frac{g}{R-r} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$$