53.- Un río tiene sus orillas paralelas y la distancia entre ambas es L. La velocidad de la corriente es constante y de módulo u.
a) Con una lancha se desea ir desde A en una orilla, hasta B en la otra orilla con la condición de que la velocidad de la lancha sea la mínima posible (fig. 1a).

a) Determinar el valor de v $_{minima}$.

b) Admitiendo que u>v (v, velocidad de la lancha), se parte del punto A y se desea llegar a la orilla opuesta con una deriva mínima, esto es, con un valor de s $_{minímo}$, (fig 1b). Determinar el valor de la velocidad.

a)

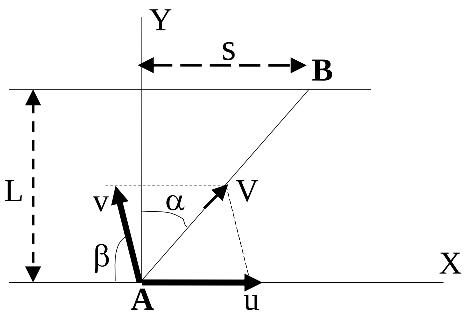


Fig.1a

En la figura 1a, v es la velocidad de la lancha, V es la velocidad resultante de la velocidad del agua y de la lancha. La dirección de V es la recta AB, puesto que se pretende salir de **A** y llegar a **B**. En la mencionada figura v es una velocidad cualquiera y no la mínima que es lo que pide el problema. Observe que son invariables u y s.

Proyectamos las velocidades sobre los ejes X e Y.

$$V\,\mathrm{sen}\,\alpha = u - v\cos\beta \;\; ; \;\; V\cos\alpha = v\,\mathrm{sen}\,\beta \;\Rightarrow\; \mathrm{tag}\,\alpha = \frac{u - v\cos\beta}{v\,\mathrm{sen}\,\beta} = \frac{s}{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L\,u - L\,v\,\cos\beta = s\,v\,\mathrm{sen}\,\beta \quad\Rightarrow\quad v = \frac{L\,u}{L\cos\beta + s\,\mathrm{sen}\,\beta}$$

Como el problema nos pide la velocidad mínima derivamos v respecto de β e igualamos a cero.

$$\frac{dv}{d\beta} = \frac{-Lu\left(-L\,\mathrm{sen}\,\beta + s\cos\beta\right)}{\left(L\cos\beta + s\,\mathrm{sen}\,\beta\right)^2} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; -L\,\mathrm{sen}\,\beta + s\cos\beta = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \mathrm{tag}\beta = \frac{s}{L} = \mathrm{tag}\,\alpha$$

A la vista de este resultado:

$$v_{min} = \frac{Lu}{L\cos\alpha + s\,\text{sen}\alpha} = \frac{L\,u}{L\dfrac{L}{AB} + s\dfrac{s}{AB}} = \frac{L\,u\sqrt{L^2+s^2}}{L^2+s^2} = \frac{L\,u}{\sqrt{L^2+s^2}}$$

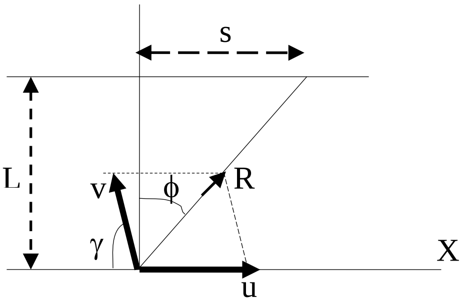


Fig.1b

En la figura 1b se ha representado un valor cualquiera de s, que no es el mínimo pedido por el problema. R representa la velocidad resultante que corresponde a s.

$$R\,\text{sen}\,\varphi = u - v\cos\gamma \;\;;\;\; R\cos\varphi = v\,\text{sen}\,\gamma \;\Rightarrow\; \text{tag}\,\varphi = \frac{u - v\cos\gamma}{v\,\text{sen}\,\gamma} = \frac{s}{L} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad s = L\frac{u - v\cos\gamma}{v\,\text{sen}\,\gamma} \quad (1)$$

Si s ha de ser mínimo, derivamos s con respecto a γ, e igualamos a cero.

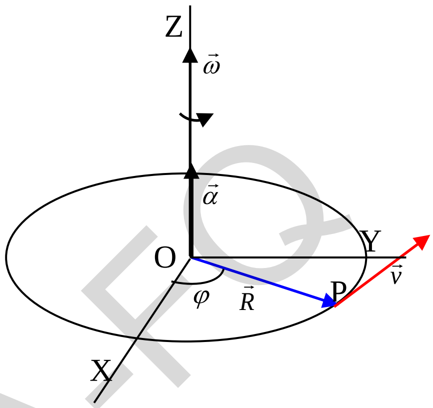
$$\frac{ds}{d\gamma} = L\frac{v\,\text{sen}\,\gamma \cdot v\,\text{sen}\gamma - (u - v\cos\gamma)\cdot v\cos\gamma}{v^2\,\text{sen}^2\gamma} = 0 \Rightarrow \quad v^2\text{sen}^2\gamma - u\,v\cos\gamma + v^2\cos^2\gamma = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos\gamma = \frac{v}{u}$$

Sustituyendo el valor del coseno en (1), resulta:

$$s_{min} = L\frac{u - v\dfrac{v}{u}}{v\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{u^2}}} = L\frac{\dfrac{u^2 - v^2}{u}}{\dfrac{v}{u}\sqrt{u^2 - v^2}} = \frac{L}{v}\sqrt{u^2 - v^2}$$

54.- Una partícula P describe una trayectoria circular de radio R, con velocidad angular ω y aceleración angular α.
$\vec{R}$ es el vector de posición de la partícula respecto del centro de la circunferencia. Determinar la velocidad y aceleración de la partícula para un observador en reposo, e identificar las componentes intrínsecas de la aceleración absoluta



El vector de posición de P en un instante t, respecto de los ejes inerciales en O es:

$$\vec{R} = R\cos\varphi\,\vec{i} + R\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{j} \quad \text{con } \varphi = \varphi(t)$$

El vector velocidad es su derivada respecto del tiempo:

$$\vec{v} = -\dot{\varphi}R\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{i} + \dot{\varphi}R\cos\varphi\,\vec{j} = \omega R\left(-\mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}\right)$$
[1]

El vector contenido en el paréntesis es un vector unitario situado en una dirección perpendicular al vector $\vec{R}$ y como la trayectoria es una circunferencia tiene la misma dirección que la tangente, recibiendo el nombre de vector unitario tangente $\vec{\tau}$. La ecuación anterior [1] se puede también escribir.

$$\vec{v} = \omega R\,\vec{\tau}$$

Ahora bien, si definimos el vector velocidad angular $\vec{\omega}$ como un vector en la dirección del eje de rotación Z, cuyo sentido lo proporciona la regla del sacacorchos, entonces $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ y si establecemos y verificamos el producto vectorial $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$ [2]

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ R\cos\varphi & R\,\mathrm{sen}\,\varphi & 0 \end{vmatrix} = \omega R(-\mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j})$$

Resultado que al coincidir con [1] confirma la ecuación [2].

Para calcular la aceleración respecto de O, vamos a derivar el vector velocidad respecto del tiempo.

$$\vec{a} = \dot{\omega}R(-\mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}) + \omega R(-\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{i} - \dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{j}) =$$
$$= \dot{\omega}R(-\mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}) - \omega^2 R(\cos\varphi\,\vec{i} + \mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{j})$$

Cambiando $\dot{\omega} = \alpha$ módulo de la aceleración angular resulta:

$$\vec{a} = \alpha R(-\text{sen}\ \varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}) - \omega^2 R(\cos\ \varphi\,\vec{i} + \text{sen}\,\varphi\,\vec{j}) = \alpha R\ \vec{\tau} - \omega^2 \vec{R} \quad [3]$$

El primer vector de [3] es tangente a la trayectoria, se conoce como aceleración tangencial, mientras que el segundo tiene dirección radial con sentido hacia O como indica el signo menos, se conoce como aceleración radial o centrípeta.

Si derivamos la ecuación vectorial [2] respecto del tiempo inmediatamente obtenemos también la aceleración.

$$\vec{a} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{R}} = \vec{\alpha} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{R}\right) \quad [4]$$

Estando por definición el vector aceleración angular $\vec{\alpha}$ en la dirección del eje de rotación y su sentido coincide con el de $\vec{\omega}$, en el presente caso. En consecuencia $\vec{\alpha} = \alpha\,\vec{k}$

El primer sumando de [4] es la aceleración tangencial y el segundo en la aceleración centrípeta. Verifíquese que sale igual que en [3]; efectuando los productos vectoriales que aparecen en los dos sumandos de [4].

Una alternativa inmediata y breve es la siguiente:

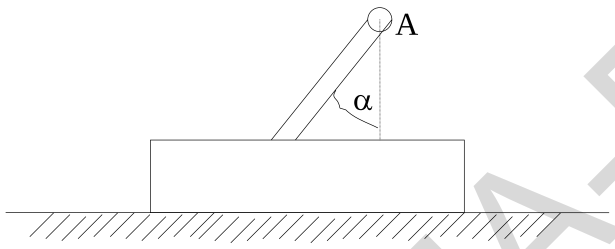
Utilizando coordenadas polares el vector de posición es $\vec{R} = R\vec{u}_r$; derivando respecto del tiempo y considerando que la derivada de un vector giratorio de módulo constante (demostración obvia que está en cualquier texto) es $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}_r$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = R\frac{d\vec{u}_r}{dt} = R\vec{\omega} \times \vec{u}_r$$

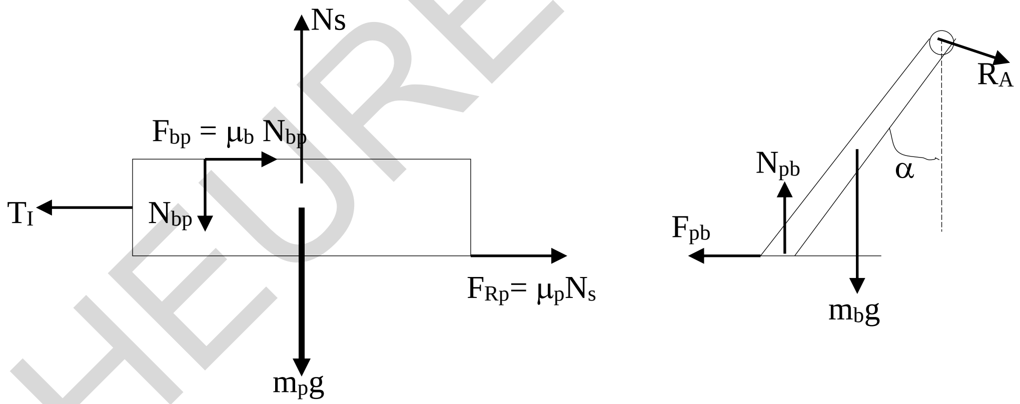
Volviendo a derivar.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{u}_r + R\vec{\omega} \times \frac{d\vec{u}_r}{dt} = R\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{u}_r + R\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{u}_r$$

55.-Una plancha de masa m_p está situada sobre un suelo horizontal, siendo μ_p el coeficiente de rozamiento. Una barra de masa m_b y longitud L se apoya por un extremo sobre la plancha y forma con la vertical un ángulo α, por el otro extremo está articulada en A que permanece fijo (ver la figura inferior). El coeficiente de rozamiento entre la plancha y la barra es μ_b.
a) Mediante una fuerza horizontal T_1 aplicada en la plancha se desea que ésta se deslice hacia la izquierda a velocidad constante, determinar T_1. b) Realizar el mismo caso pero para que la plancha deslice hacia la derecha.



a) Cuando la plancha deslice hacia la izquierda los diagramas de fuerzas sobre la plancha y la barra son los siguientes:



Fuerzas sobre la plancha:

Peso de la plancha = $m_p g$; Fuerza que el suelo ejerce sobre la plancha = N_s

Fuerza con que la barra empuja a la plancha = N_{bp}

Fuerza de rozamiento entre la plancha y el suelo =F_{Rp}

Fuerza de rozamiento entre la plancha y la barra = F_{bp}

Fuerza aplicada en la plancha para que deslice hacia la izquierda con velocidad constante=T_I

Fuerzas sobre la barra:

Peso de la barra = $m_b g$; Fuerza con que la plancha empuja a la barra =N_{pb} : Las fuerzas N_{bp} y N_{pb} son acción y reacción y por tanto tienen el mismo módulo.

Fuerza de rozamiento entre la barra y la plancha = F_{pb} Las fuerzas F_{bp} y N_{bp} son acción y reacción y por tanto tienen el mismo módulo.

Reacción en la articulación A = R_A. En la figura se ha dibujado en una dirección cualquiera, pues a priori no puede saberse cómo esta dirigida.

Como la plancha desliza a velocidad constante se cumple: que la suma de todas las fuerzas aplicadas debe ser nula: $\sum \vec{F} = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$

$$T_I - \mu_p N_s - \mu_b N_{bp} = 0 \quad ; \quad N_s = m_p g + N_{bp} \Rightarrow \quad T_I - \mu_p\left(m_p g + N_{bp}\right) - \mu_b N_{bp} = 0 \quad (1)$$

La barra se encuentra en reposo, si empleamos la condición de que la suma de los momentos respecto de la articulación A es cero, evitamos introducir la reacción en la articulación R_A y así calculamos directamente la reacción N_{bp}. Los momentos que sean perpendiculares a la barra y dirigidos según el dibujo hacia fuera del papel, se tomarán positivos y en sentido contrario negativos.

$$m_b g \cdot \frac{L}{2} \cdot \operatorname{sen}\alpha - N_{pb} \cdot L \cdot \operatorname{sen}\alpha - F_{pb} \cdot L \cdot \cos\alpha = 0 \Rightarrow \frac{m_b g}{2} \cdot \operatorname{sen}\alpha - N_{bp} \operatorname{sen}\alpha - F_{bp} \cos\alpha = 0$$

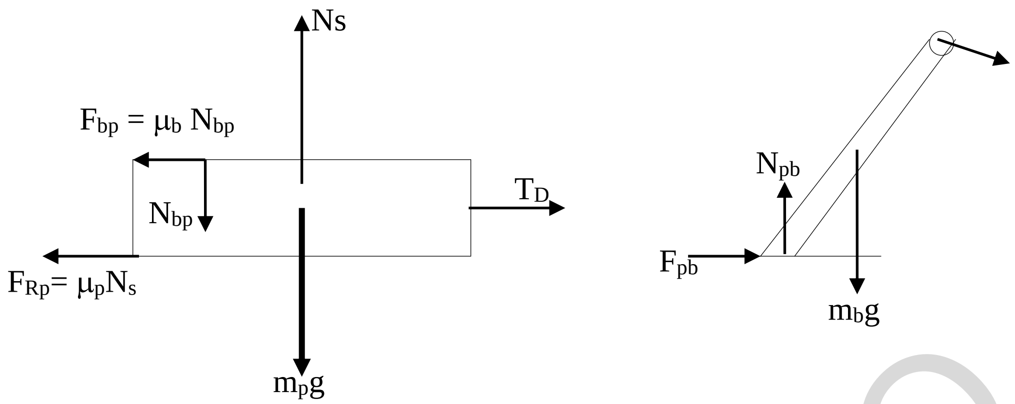
$$\Rightarrow \frac{m_b g}{2} \cdot \operatorname{sen}\alpha - N_{bp} \operatorname{sen}\alpha - \mu_b N_{bp} \cos\alpha = 0 \Rightarrow \quad N_{bp} = \frac{\frac{m_b g}{2} \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \mu_b \cos\alpha}$$

Sustituyendo N_{bp} en la ecuación (1)

$$T_I - \mu_p m_p g - \left(\mu_p + \mu_b\right) \cdot \frac{m_b g \operatorname{sen}\alpha}{2\left(\operatorname{sen}\alpha + \mu_b \cos\alpha\right)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad T_I = \mu_p m_p g + \left(\mu_p + \mu_b\right) \cdot \frac{m_b g \operatorname{sen}\alpha}{2\left(\operatorname{sen}\alpha + \mu_b \cos\alpha\right)} \quad (2)$$

b) El diagrama de fuerzas cuando la plancha desliza hacia la derecha



Aplicando de nuevo las condiciones $\sum \vec{F} = 0$ a la plancha y $\sum \vec{M} = 0$ a la barra, resulta:

$$T_D - \mu_p\left(m_p g + N_{bp}\right) - \mu_b N_{bp} = 0 \quad (1)$$

$$m_b g \cdot \frac{L}{2} \cdot \operatorname{sen}\alpha - N_{pb} \cdot L \cdot \operatorname{sen}\alpha + F_{pb} \cdot L \cdot \cos\alpha = 0 \Rightarrow \frac{m_b g}{2} \cdot \operatorname{sen}\alpha - N_{bp}\operatorname{sen}\alpha + F_{bp}\cos\alpha = 0$$

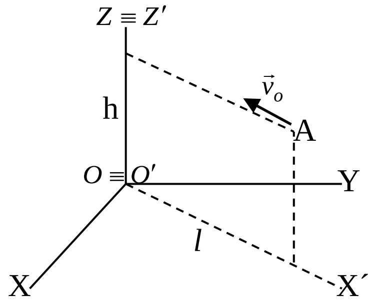
$$\Rightarrow \frac{m_b g}{2} \cdot \operatorname{sen}\alpha - N_{bp}\operatorname{sen}\alpha + \mu_b N_{bp}\cos\alpha = 0 \Rightarrow \quad N_{bp} = \frac{\frac{m_b g}{2} \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - \mu_b \cos\alpha}$$

Si se compara con las ecuaciones anteriores resulta que la única diferencia es cambiar un signo más por uno menos.

$$T_D = \mu_p m_p g + \left(\mu_p + \mu_b\right) \cdot \frac{m_b g \operatorname{sen}\alpha}{2\left(\operatorname{sen}\alpha - \mu_b \cos\alpha\right)} \quad (3)$$

Si se compara T_I con T_D resulta que siempre $T_D > T_I$, además puede ocurrir que T_D sea infinito si se cumple que $\operatorname{sen}\alpha = \mu_b \cos\alpha \Rightarrow \mu_b = \operatorname{tag}\alpha$, con lo cual es imposible deslizar la plancha hacia la derecha si $\mu_b \geq \operatorname{tag}\alpha$.

56.- Una partícula se encuentra inicialmente en la esquina superior (punto A) de una puerta rígida que gira alrededor de un eje vertical con velocidad angular constante ω´. La partícula se mueve por el borde superior de la puerta con velocidad constante v_o. Determinar, expresando los resultados en el sistema móvil S´, que gira solidario con la puerta: a) velocidad relativa de arrastre y absoluta de la partícula en función del tiempo, b) aceleración relativa, de arrastre, complementaria y absoluta en función del tiempo



La ecuación cinemática de velocidades es: $\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' + \vec{v}\,'$

a) La velocidad relativa, es decir definida desde los ejes móviles en O´ vale:

$$\vec{v}\,' = -v_o\,\vec{i}\,'$$

En este problema, la velocidad de arrastre debida al movimiento de los ejes móviles resulta:

Por no efectuar traslación $\vec{v}_{O'} = 0$

Debido a la rotación vale: $\vec{\omega} \times \vec{r}\,' = \omega\vec{k}\,' \times \left(h\vec{k}\,' + (l - v_o t)\vec{i}\,'\right) = \omega(l - v_o t)\vec{j}\,'$

La velocidad absoluta $\vec{v} = -v_o\vec{i}\,' + \omega(l - v_o t)\vec{j}\,'$

c) La ecuación cinemática de aceleraciones es:

d) $$\vec{a} = \vec{a}_{o'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{a}\,'$$

La aceleración respecto de los ejes móviles $\vec{a}\,' = \dfrac{d\vec{v}\,'}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(-v_o\vec{i}\,'\right) = 0$

Las aceleraciones de arrastre:

$$\vec{a}_{O'} = 0$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') = \omega\vec{k} \times \omega(l - v_o t)\vec{j}\,' = -\omega^2(l - v_o t)\vec{i}\,'$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,' = 0\,; \quad \text{pues} \quad \vec{\omega} = \text{cte.}$$

La aceleración de arrastre vale: $\vec{a}_{arrastre} = -\omega^2(l - v_o t)\vec{i}\,'$

La aceleración complementaria o de Coriolis:

$$\vec{a}_C = 2\,\vec{\omega}\times\vec{v} = 2\,\omega\vec{k}'\times v_o\left(-\,\vec{i}\,'\right) = -\,2\omega\ v_o\,\vec{j}'$$

La aceleración absoluta: $\vec{a} = -\,\omega^2\left(l - v_o t\right)\vec{i}\,' - 2\,\omega\, v_o\,\vec{j}'$

57.-Un satélite de la Luna se encuentra a una altura h de su centro. Va provisto de una cámara fotográfica de distancia focal 500 mm. En la Tierra existe una cámara igual a la anterior. Se realizan al mismo tiempo dos fotografías de la Luna, una desde la Tierra y otra desde el satélite. Los diámetros de la imagen de la Luna obtenidos en cada caso son d_1= 4,5 mm y d_2=250 mm. Determinar el periodo de rotación del satélite.
La intensidad del campo gravitatorio en la Luna es 1/6 del de la Tierra. La distancia Tierra Luna es D = 380000 km.

La distancia Tierra-Luna es tan grande que en la cámara fotográfíca situada en la Tierra se obtendrá una fotografía completa de la Luna y la imagen está situada en el plano focal.

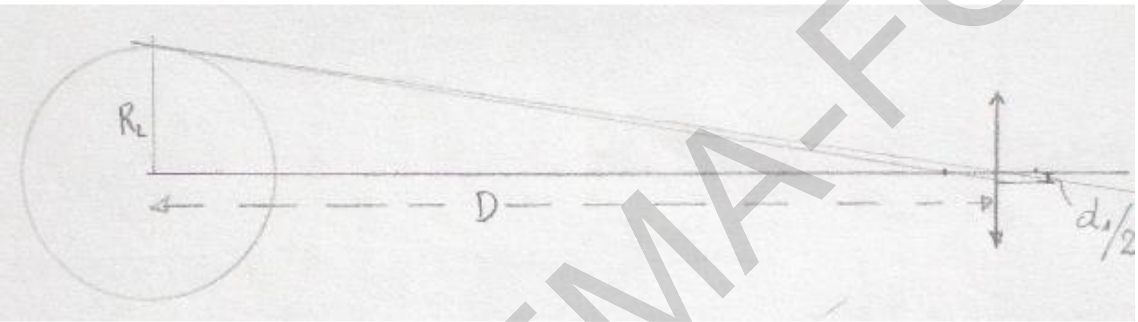


Fig.1

La figura 1 es un dibujo (no a escala) cuando la fotografía se hace desde la Tierra. De los triángulos se deduce:

$$\frac{D}{R_L} = \frac{f}{\frac{d_1}{2}} \quad \Rightarrow \quad R_L = \frac{D\,d_1}{2f} = \frac{380000\text{km} \cdot 4{,}5.10^{-3}\,\text{m}}{2 \cdot 500.10^{-3}} = 1710\,\text{km}$$

Cuando la fotografía se hace desde el satélite no se puede abarcar toda la Luna sino una parte de ella, como indica la figura 2 (no está a escala).

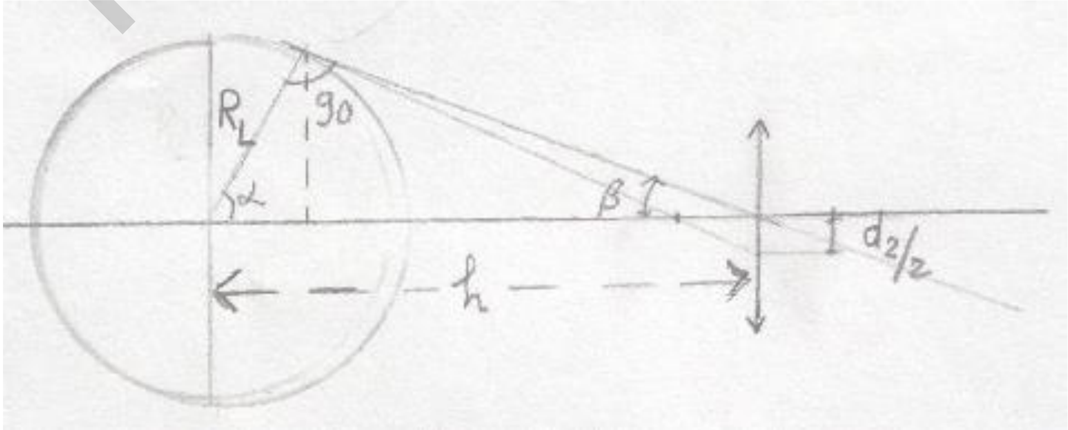


Fig.2

El ángulo α es complementario del β. De la figura 2 se deduce: $\operatorname{sen}\beta = \frac{R_L}{h}$

$$\frac{h - R_L \operatorname{sen}\beta}{R_L \cos\beta} = \frac{f}{\frac{d_2}{2}} = \frac{2f}{d_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{h - R_L \cdot \frac{R_L}{h}}{R_L\sqrt{1 - \frac{R_L^2}{h^2}}} = \frac{2f}{d_2} \Rightarrow \frac{\frac{h^2 - R_L^2}{h}}{\frac{R_L}{h}\sqrt{h^2 - R_L^2}} = \frac{2f}{d_2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{h^2 - R_L^2}}{R_L} = \frac{2f}{d_2} \Rightarrow h^2 - R_L^2 = \frac{4f^2}{d_2^2}R_L^2 \Rightarrow h = R_L\sqrt{1 + \frac{4f^2}{d_2^2}} = 1710\text{km}\sqrt{1 + \frac{4.(500.10^3)^2}{\left(250.10^3\right)^2}}$$

$$h = 1710\text{km} \cdot \sqrt{17} = 7051\text{km}$$

La fuerza de atracción gravitatoria entre la Luna y el satélite, de masa m´, proporciona la fuerza centrípeta de éste.

$$G\frac{M_L m´}{h^2} = \frac{m´v^2}{h} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM_L}{h}} = \frac{2\pi h}{T} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi h\sqrt{\frac{h}{GM_L}}$$

La intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Luna es:

$$g_L = \frac{GM_L}{R_L^2} \quad \Rightarrow \quad GM_L = g_L R_L^2$$

El periodo de rotación del satélite vale:

$$T = 2\pi h\sqrt{\frac{h}{g_L R_L^2}} = \frac{2\pi h}{R_L}\sqrt{\frac{h}{g_L}} = \frac{2\pi 7051}{1710}\sqrt{\frac{7051.10^3}{\frac{9,8}{6}}} = 5,4.10^4\,\text{s} \approx 15\,\text{horas}$$

58.- Se lanza un cuerpo de masa m, considerado puntual, con una velocidad inicial vertical v_o. La resistencia que opone el medio es directamente proporcional a la velocidad R = kv.
a) Determinar la ecuación que relaciona la velocidad con el tiempo
b) Dibujar juntas las gráficas de la velocidad en el caso indicado y si no hubiese resistencia del medio.
c) Calcular para ambos casos la altura alcanzada por la masa m.
Datos g = 10 m/s^2, k=0,4 Ns/m , v_o = 20 m/s, m= 1 kg

a) Al ascender el cuerpo existen dos fuerzas verticales dirigidas hacia abajo. Si k es el vector unitario en dirección vertical y hacia arriba, escribimos de acuerdo con la segunda ley de Newton

a)

$$(mg+kv)\left(-\vec{k}\right)=m\vec{a}=m\frac{d\vec{v}}{dt}\quad\Rightarrow\quad -(mg+kv)=m\frac{dv}{dt}\Rightarrow\quad dt=-\frac{dv}{\left(g+\frac{k}{m}v\right)}$$

Para resolver la ecuación diferencial hacemos el siguiente cambio de variable: $g+\frac{k}{m}v=\rho$ y de aquí

$$\frac{k}{m}dv=d\rho$$

Sustituyendo

$$\int dt=-\int\frac{\frac{m}{k}d\rho}{\rho}\quad\Rightarrow\quad t=-\frac{m}{k}\ln\rho+Cte=-\frac{m}{k}\ln\left(g+\frac{k}{m}v\right)+cte$$

Según las condiciones iniciales, cuando t =0, v = velocidad inicial = v_0

$$cte=\frac{m}{k}\ln\left(g+\frac{k}{m}v_o\right)$$

La ecuación del tiempo

$$t=\frac{m}{k}\ln\frac{g+\frac{k}{m}v_o}{g+\frac{k}{m}v}\Rightarrow\quad e^{\frac{kt}{m}}=\frac{g+\frac{k}{m}v_o}{g+\frac{k}{m}v}\Rightarrow g+\frac{k}{m}v=\left(g+\frac{k}{m}v_o\right)e^{-\frac{kt}{m}}\quad\Rightarrow$$

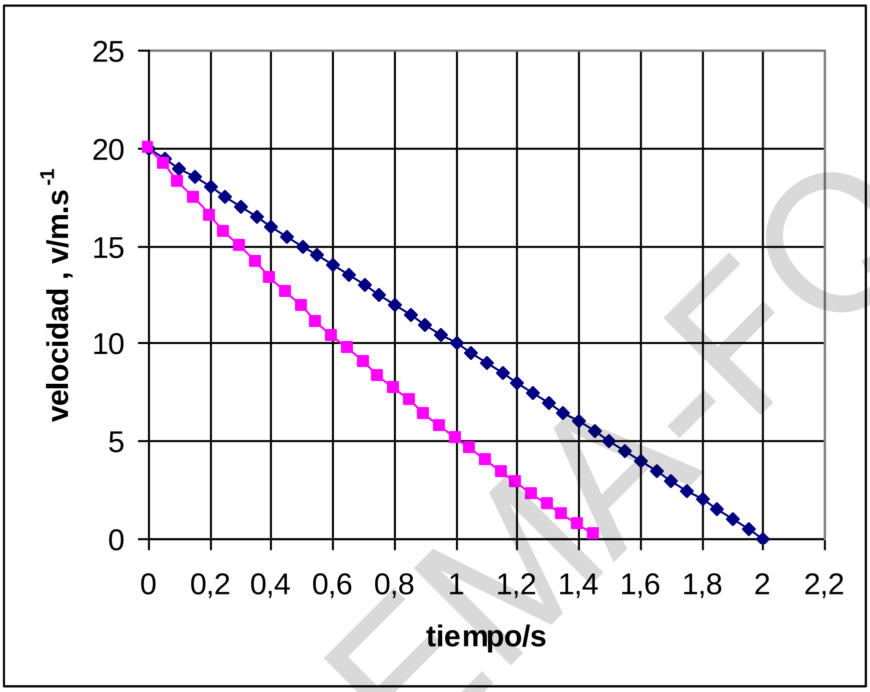
$$v=\frac{m}{k}\left(g+\frac{k}{m}v_o\right)e^{-\frac{kt}{m}}-\frac{mg}{k}\qquad(1)$$

b) Sustituimos los datos del problema en la ecuación (1)

$$v = \frac{1}{0,4}\left(10 + \frac{0,4}{1}\cdot 20\right)e^{-\frac{0,4}{1}t} - \frac{1}{0,4}\cdot 10 = 45\cdot e^{-0,4t} - 25$$

Si no hubiese fuerza resistente, el movimiento de subida es uniformemente retardado

$$v = 20 - 10\,t$$



c) La altura alcanzada cuando no existe fuerza resistente es:

$$h = v_o t - \frac{1}{2}gt = 20\cdot 2 - 5\cdot 2^2 = 20\ \text{m}$$

Cuando existe fuerza resistente:

$$h' = \int_o^\tau v\,dt = \int_o^\tau \left(45\cdot e^{-0,4t} - 25\right)dt = 45\cdot e^{-0,4t}\left(-\frac{1}{0,4}\right) - 25t\Big|_o^\tau \Rightarrow$$

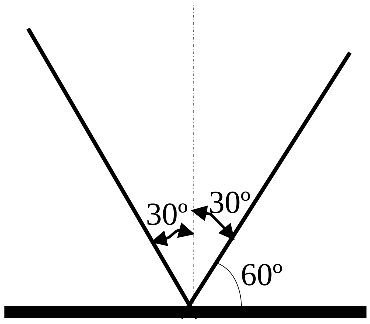
$$h' = -112,5\cdot e^{-0,4\tau} + 112,5 - 25\tau$$

En la ecuación de h´, τ significa el tiempo de subida, es decir, el tiempo que tarda en anularse la velocidad.

$$0 = 45\cdot e^{-0,4t} - 25 \;\Rightarrow\; \ln\frac{25}{45} = -0,4\,\tau \Rightarrow\; \tau = 1,469\,\text{s}$$

$$h' = -112,5\cdot e^{-0,4*1,469} + 112,5 - 25\cdot 1,469 = 14,2\,\text{m}$$

59.- Dos planos forman entre sí un ángulo α = 60º y se disponen sobre un suelo horizontal en la forma que indica la figura inferior



Sobre estos planos se sitúa un cubo de arista a. Si no existe rozamiento entre el cubo y los planos, determinar cómo ha de colocarse el cubo entre los planos para que se encuentre en equilibrio.

Para que el cubo se encuentre en equilibrio las fuerzas que actúen sobre él deben cumplir dos condiciones: una que la suma de esas fuerzas sea nula, otra que el momento resultante de las fuerzas respecto del centro de masas del cubo sea nulo.
Sobre el cubo actúan tres fuerzas, las dos reacciones de los planos y su peso. En la figura 1 se ha colocado el cubo en una determinada posición y se han dibujado las dos reacciones de los planos.

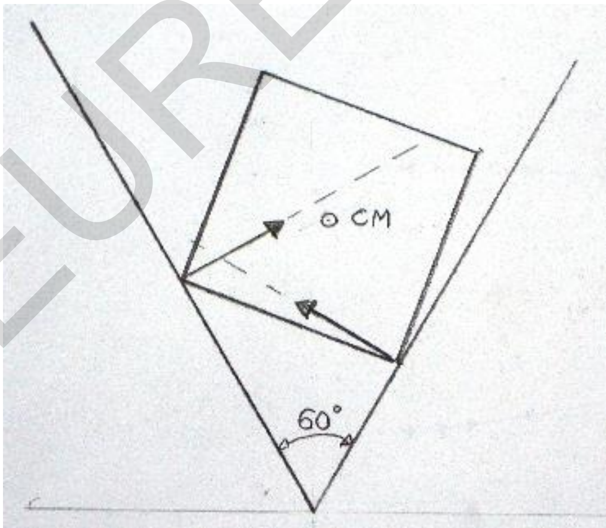


Fig.1

Las fuerzas de reacción de los planos sobre el cubo son perpendiculares a las respectivas paredes, ya que no existe rozamiento. En la figura 1 se observa que dichas fuerzas crean momentos respecto del centro de masas del cubo. Se infiere que solamente existen dos posiciones para las que los momentos sean nulos y ambas se encuentran dibujadas en la figura 2.

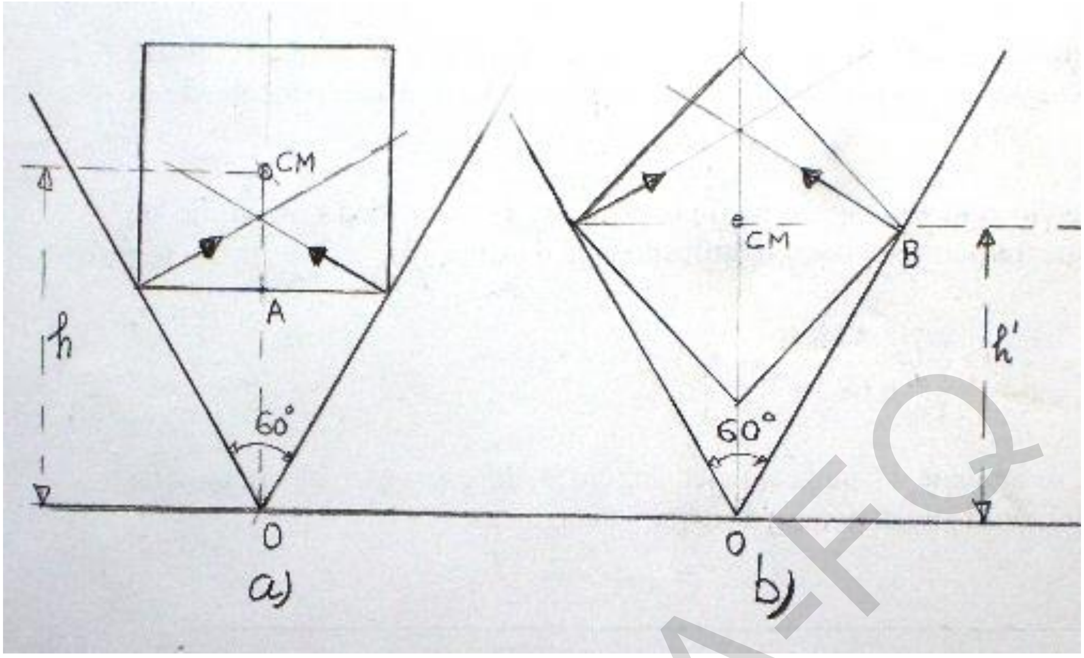


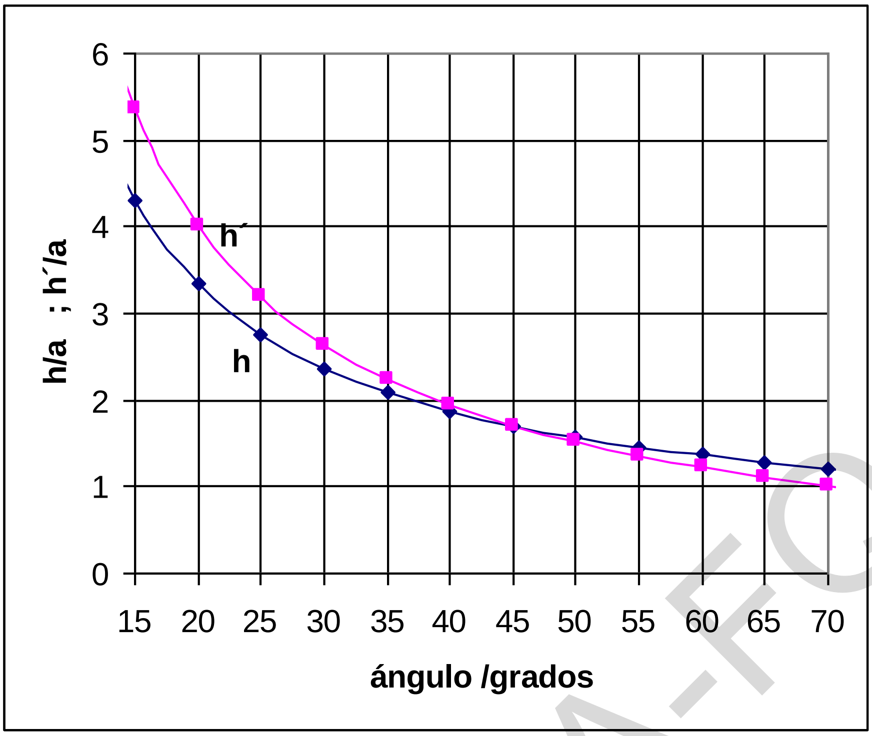
Fig.2

De las dos posiciones de equilibrio será estable la que tenga el centro de masa más bajo respecto del suelo horizontal. De la figura 2, dibujada a escala, se observa que es más estable la posición b).Calculamos las alturas del centro de masas (CM) en cada caso. Llamando α al ángulo que forman los planos entre sí.

$$h = OA + A\,\overline{CM} = \frac{\frac{a}{2}}{\operatorname{tag}\frac{\alpha}{2}} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tag}\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tag} 30}\right) = 1{,}366\,a$$

$$\operatorname{tag}\frac{\alpha}{2} = \frac{C\overline{M}B}{h´} = \frac{a\sqrt{2}}{2h´} \Rightarrow \quad h´ = \frac{a\sqrt{2}}{2\operatorname{tag}\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{tag} 30} = 1{,}225\,a$$

No siempre la posición b) tiene el centro de masas más bajo que la posición a). En la gráfica inferior se han representado los valores de h y h´ en función del ángulo alfa.


6
5
4
3
2
1
0
h/a ; h´/a
h´
h
15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70
ángulo /grados