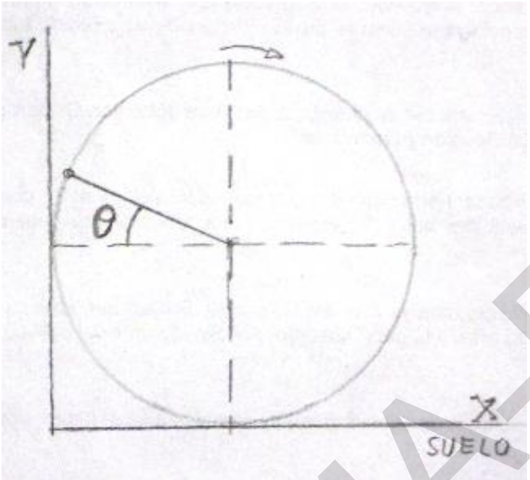
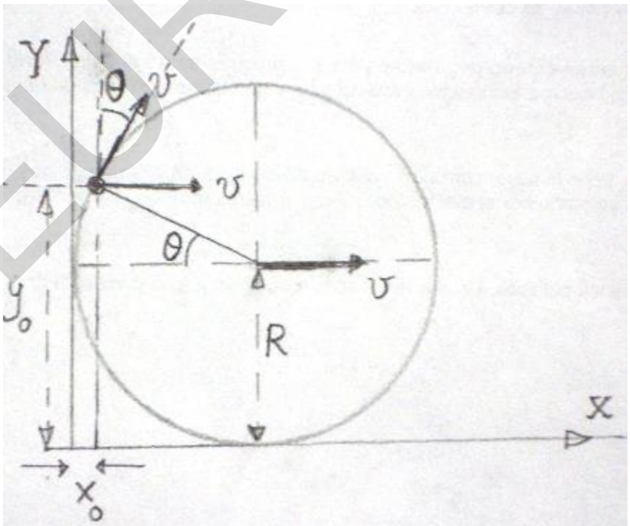
70.-Una rueda de radio R=0,5 m, rueda sin deslizar por una zona húmeda con velocidad constante v= 20 m/s. Como consecuencia de ello la periferia de la rueda suelta gotas de agua a) Determinar para qué ángulo , θ , la altura alcanzada por la gota respecto del suelo es la máxima posible b) Dibujar la trayectoria de la gota respecto del suelo para el ángulo máximo y para 30º y 45º.



La gota que está en la periferia tiene la velocidad v del centro de masas de la rueda más la velocidad tangencial cuyo módulo es v. Una gota que abandona la periferia de la rueda tiene como coordenadas iniciales (x_o; y_o).



La velocidad inicial sobre el eje X es: $v + v\,\text{sen}\theta$.

La velocidad inicial sobre el eje Y es: v cos θ.

Las ecuaciones paramétricas respecto de los ejes coordenados son.

$$x = x_0 + v(1+\operatorname{sen}\theta)t = R - R\cos\theta + v(1+\operatorname{sen}\theta)t = R(1-\cos\theta) + v(1+\operatorname{sen}\theta)t \quad (1)$$

$$y = y_0 + v\cos\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2 = R + R\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow$$

$$y = R(1+\operatorname{sen}\theta) + v\cos\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

La altura máxima que alcanza la gota ocurre cuando la velocidad v_y se anule

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v\cos\theta - gt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v\cos\theta}{g}$$

Sustituyendo en (2)

$$y_m = R(1+\operatorname{sen}\theta) + v\cos\ \theta \cdot \frac{v\cos\theta}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v\cos\theta}{g}\right)^2 = R(1+\operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{2}\frac{v^2\cos^2\theta}{g} \quad (3)$$

En la ecuación (3) se observa que la $y_{\text{máxima}}$ de cada gota es función del ángulo θ, por tanto, como se pide la mayor de esas alturas, procedemos a derivar la ecuación (3) con respecto a θ e igualar a cero.

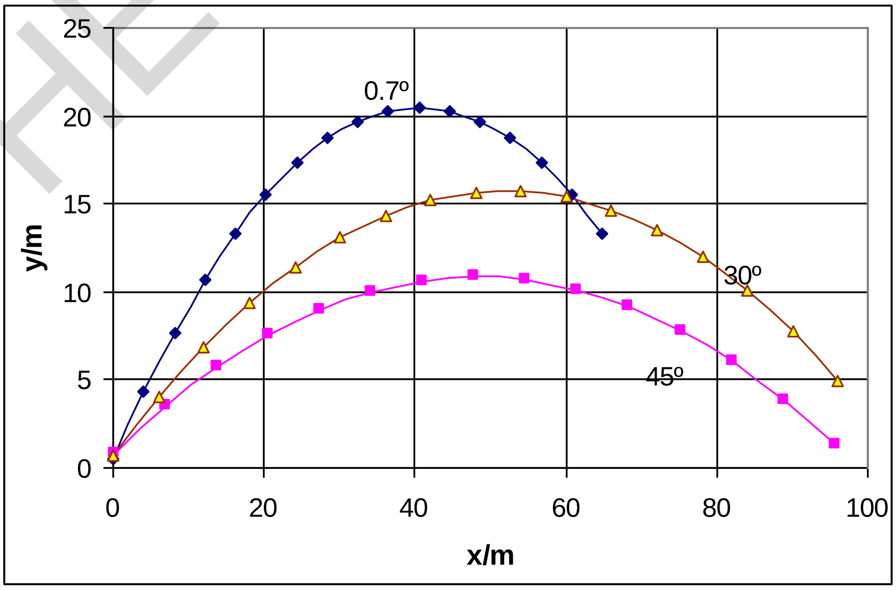
$$\frac{dy_m}{d\theta} = R\cos\theta + \frac{v^2}{2g}\cdot 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow R = \frac{v^2}{g}\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{Rg}{v^2}$$

Se debe cumplir que $v^2 > Rg$.

Con los datos del problema resulta: $\operatorname{sen}\theta = \frac{0{,}5\cdot 10}{400} \quad \Rightarrow \quad \theta = 0{,}72^{\circ}$ y la altura máxima de todas

$$Y_{max} = 0{,}5(1+\operatorname{sen}0{,}7) + \frac{1}{2}\frac{20^2\cdot\cos^2 0{,}7}{10} = 40{,}5\,\text{m}$$

En la figura 2 se han dibujado las trayectorias de las gotas para tres ángulos diferentes.



71.-Un cuerpo de masa m se encuentra en reposo en la posición $s_0=0$. Sobre él comienza a actuar una fuerza definida por la ecuación

$$F = F_o\left[1-\frac{(t-T)^2}{T^2}\right]$$

a) Calcular las ecuaciones de la posición y velocidad del móvil en función del tiempo
b) Calcular los tiempos para los cuales la fuerza, la velocidad y la posición tienen los valores máximos.
c) Si Fo=1 N , m =1 kg y T= 5 s, dibujar las gráficas frente al tiempo de F , s y v en el intervalo entre t=0 s y t =20 s.
d) Determinar la distancia recorrida por el cuerpo en el intervalo de t=0 s a t=20 s

a) De la segunda ley de Newton se deduce

$$F = F_o\left[1-\frac{t^2+T^2-2tT}{T^2}\right] = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \quad v = \frac{F_o}{m}\int\left(\frac{2t}{T}-\frac{t^2}{T^2}\right)dt \Rightarrow$$

$$v = \frac{F_o}{mT}\left(t^2-\frac{t^3}{3T}\right)+\text{Cte} \Rightarrow v = \frac{F_o}{mT}\left(t^2-\frac{t^3}{3T}\right)$$

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow s = \int \frac{F_o}{mT}\left(t^2-\frac{t^3}{3T}\right) \Rightarrow \quad s = \frac{F_o}{mT}\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{12T}\right)$$

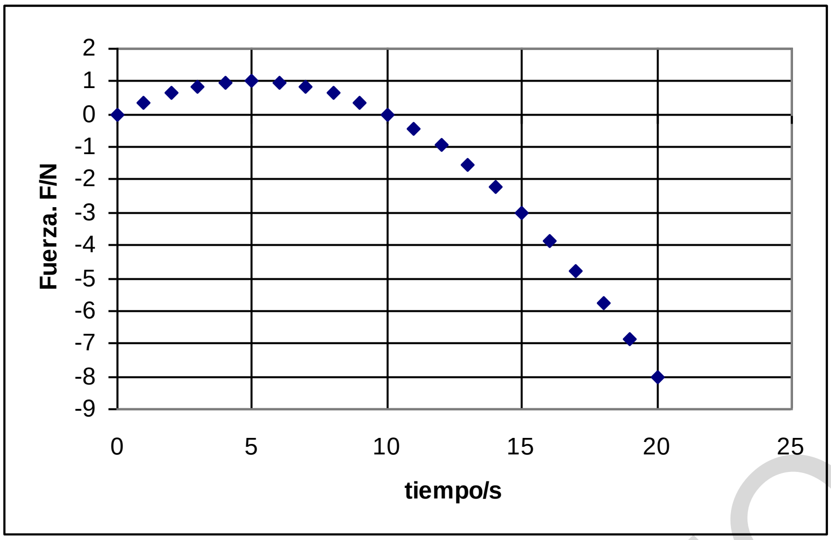
b) Para calcular los valores máximos derivamos las correspondientes ecuaciones respecto del tiempo e igualamos a cero.

$$\frac{dF}{dt} = \frac{F_o}{T^2}(-2t+2T) = 0 \Rightarrow t = T$$

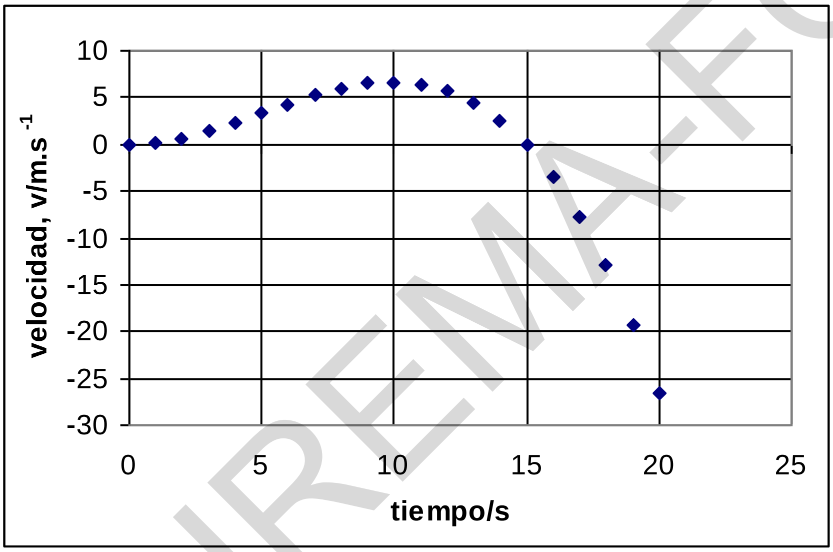
$$\frac{ds}{dt} = \frac{F_o}{mT}\left(t^2-\frac{t^3}{3T}\right) = 0 \Rightarrow 1-\frac{t}{3T} = 0 \Rightarrow t = 3T$$

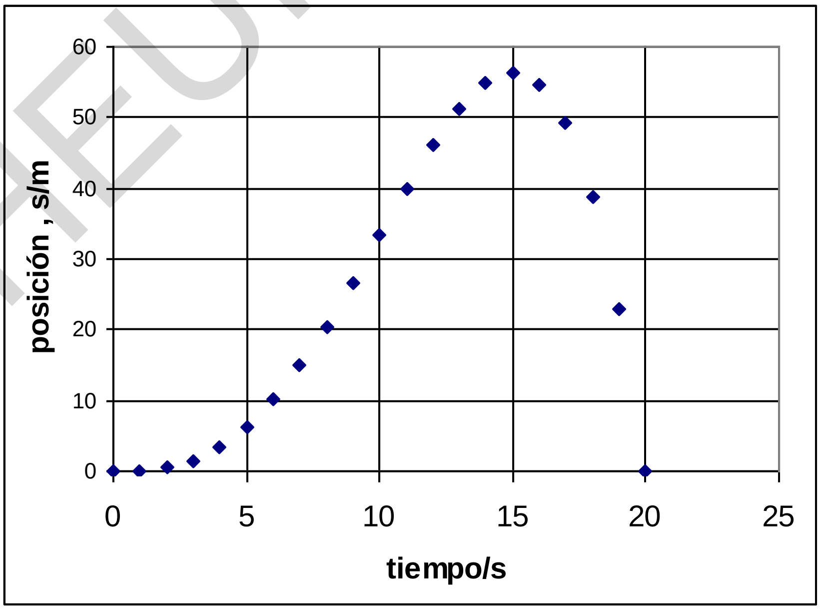
$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_o}{mT}\left(2t-\frac{t^2}{T}\right) = 0 \Rightarrow 2-\frac{t}{T} = 0 \Rightarrow t = 2T$$

c)


Fuerza. F/N
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
0
5
10
15
20
25
tiempo/s

c)


velocidad, v/m.s -1
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
0
5
10
15
20
25
tiempo/s


posición , s/m
60
50
40
30
20
10
0
0
5
10
15
20
25
tiempo/s

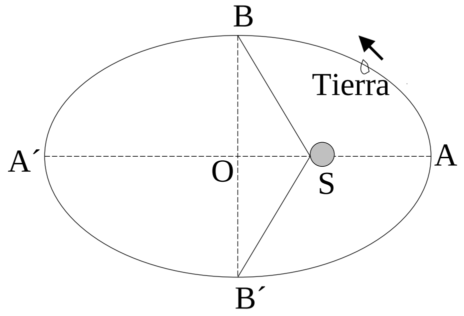
d) Según el apartado anterior el máximo en la posición del cuerpo ocurre cuando t=3T=3*5=15 s. Para calcular el valor de esa posición sustituimos el valor 15 en la ecuación de s:

$$s = \frac{F_o}{mT}\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{12\,T}\right) = \frac{1}{1\cdot 5}\left(\frac{15^3}{3} - \frac{15^4}{12\cdot 5}\right) = 56{,}25\,\text{m}$$

El cuerpo recorre 56,25 m hacia la derecha, luego retrocede hasta el punto de partida recorriendo los mismos metros, por tanto, en total ha recorrido

56,25+56,25= 112,5 m

72.- La Tierra describe una orbita elíptica, de excentricidad ε=0,0167, ocupando el Sol uno de los focos. Dividimos la órbita de la Tierra en dos mitades iguales en longitud, una BA´B´ y otra B´A B, esto es, media órbita más lejos del Sol que la otra. Se pide la diferencia de tiempos, expresada en días, que tarda la Tierra en recorrer ambas semiórbitas.



OS = c
OA =a
OB=b
ε=c/a=0,0167
Área de la elipse= π a b

La Tierra está sometida a una fuerza central; es la fuerza de atracción gravitatoria entre el Sol y la Tierra. Por el hecho de ser una fuerza central el momento angular de la Tierra respecto del Sol es constante. La velocidad lineal de la Tierra no es constante en su órbita, en cambio si es constante la velocidad areolar, esto es, el área barrida por el radio vector que une el Sol con la Tierra.
Esto último es en definitiva la expresión de la segunda ley de Kepler.

$$v_A = \frac{dA}{dt} = \text{Cte} \quad \Rightarrow \quad A = \text{Cte}\int dt = \text{Cte} \cdot t$$

Aplicamos la ecuación anterior para ambos recorridos

$$\text{Área}(BA´B´S) = A_G = \text{Cte} \cdot t_1 \quad ; \quad \text{Área}(B´ABS) = A_P = \text{Cte} \cdot t_2$$

A_G es el área de media elipse más el área del triángulo BB´S

$$A_G = \frac{\pi ab}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot c = \frac{\pi ab}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot \varepsilon\, a = \frac{\pi ab}{2} + \varepsilon\, b\, a = \text{Cte}\, t_1 \quad (1)$$

A_P es el área de media elipse menos el área del triángulo BB´S

$$A_P = \frac{\pi ab}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot c = \frac{\pi ab}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot \varepsilon\, a = \frac{\pi ab}{2} - \varepsilon\, b\, a = \text{Cte}\, t_2 \quad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2)

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{\pi a b}{2} + \varepsilon a b}{\frac{\pi a b}{2} - \varepsilon a b} = \frac{\frac{\pi}{2} + \varepsilon}{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} \quad \Rightarrow \quad t_1 = t_2 \cdot 1{,}021 \qquad (3)$$

Como $t_1 + t_2 = 365$ días

$$1{,}021 t_2 + t_2 = 365 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 180{,}6 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 184{,}4 \quad \Rightarrow \qquad t_1 - t_2 = 3{,}8 \ \text{días}$$

73.-Un satélite de masa m describe una órbita circular de radio r_o alrededor de la Tierra de masa M. a) Determinar la energía total del satélite. b) Suponer que el satélite al moverse dentro en la atmosfera de la Tierra está sometido a una fuerza de fricción f, por lo que el satélite describirá una espiral hacia la Tierra; f se considera una fuerza pequeña por lo que la disminución del radio es tal que puede suponerse que en cada instante la órbita es circular con un radio promedio r. Encontrar aproximadamente la variación del radio Δr, en cada revolución. c) Calcular aproximadamente la variación de la energía cinética del satélite en cada revolución.

a) La energía del satélite es la suma de su energía cinética y potencial gravitatoria.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{r_o}\right)$$

Dado que el satélite describe una órbita circular, la fuerza centrípeta necesaria es la fuerza de atracción gravitatoria entre la Tierra y el satélite

$$\frac{mv^2}{r_o} = G\frac{Mm}{r_o^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r_o} \Rightarrow E = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r_o} - \frac{GMm}{r_o} = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r_o}$$

b) Supongamos que el satélite esta describiendo una órbita de radio r, su energía es: $E = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$ y la variación con relación al tiempo de su energía debido a la fricción es $-\frac{dE}{dt}$, que es la potencia pérdida y como f es constante vale fv, siendo v la velocidad del satélite en esa órbita.

$$-\frac{dE}{dt} = -\frac{d\left(-\frac{1}{2}\frac{GMm}{r}\right)}{dt} = \frac{1}{2}GMm\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt} = \frac{1}{2}GMm\left(\frac{-\frac{dr}{dt}}{r^2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r^2}\frac{dr}{dt} = fv$$

$$-\frac{1}{2}\frac{GMm}{r^2}\frac{dr}{dt} = f\frac{\sqrt{GM}}{\sqrt{r}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dr}{dt} = -\frac{2f}{m\sqrt{GM}}r^{\frac{3}{2}}$$

$\frac{dr}{dt}$, representa la variación del radio de la órbita respecto del tiempo. Designamos con T al periodo de revolución

$$\frac{\Delta r}{T} = -\frac{2f\,r^{\frac{3}{2}}}{m\sqrt{GM}} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta r = -\frac{2f\,r^{\frac{3}{2}}}{m\sqrt{GM}}T$$

c)

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2} m \frac{G M}{r}\right)}{dt} = \frac{1}{2} G M m \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt} = -\frac{1}{2} G M m \frac{\frac{dr}{dt}}{r^2} = \frac{1}{2} G M m \frac{\frac{2f\, r^{\frac{3}{2}}}{m\sqrt{G M}}}{r^2} = \frac{\sqrt{G M}\, f}{r^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta E_c = \frac{\sqrt{G M}\, f}{r^{\frac{1}{2}}} T$$

Observe que los cálculos son aproximados ya que T no es constante sino que disminuye a medida que disminuye el radio de la órbita

74.-Se construye un modelo del sistema Sol –Tierra reduciendo todas las distancias lineales en un factor k. En dicho modelo las densidades, tanto del Sol como la de la Tierra, son las mismas que las reales. En el modelo la Tierra gira alrededor del Sol y se admite que está colocado en un lugar ausente de aire y gravedad terrestre. Se pide determinar cuánto dura un año en el modelo respecto a la duración real.

Designamos con R al radio real del Sol, M su masa , D la distancia Sol-Tierra, M_T a la masa real de la Tierra., ρ la densidad del Sol.

En el modelo r es el radio del ´´Sol´´, m su masa, d la distancia entre el ´´Sol y la Tierra´´, m_T a la masa de la ´Tierra´´.

De acuerdo con el enunciado se cumple que

$$d = k\,D \;\; ; \;\; r = kR$$

La fuerza centrípeta es proporcionada por la atracción gravitatoria, tanto en la realidad como en el modelo.

$$M_T \Omega^2 D = G\frac{M\,M_T}{D^2} \;\Rightarrow\; \Omega = \sqrt{\frac{G\,M}{D^3}} \quad ; \quad m_T \omega^2 d = G\frac{m\,m_T}{d^2} \;\Rightarrow\; \omega = \sqrt{\frac{G\,m}{d^3}} \Rightarrow$$

$$\frac{\Omega}{\omega} = \sqrt{\frac{G\,M\,d^3}{G\,m\,D^3}} = \sqrt{\frac{M\,k^3\,D^3}{m\,D^3}} = \sqrt{\frac{M\,k^3}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho k^3}{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}} = \sqrt{\frac{R^3\,k^3}{k^3 R^3}} = 1$$

Como la velocidades angulares son iguales la duración del año real y del modelo son iguales.

75.- La densidad de una esfera de radio R sigue una ley lineal

$$\rho = \rho_o - kr$$

Siendo k una constante positiva y r la distancia medida a partir del centro de la esfera. Cuando r = R la densidad es ¼ de la máxima densidad. Calcular para qué valor de r la intensidad del campo gravitatorio es el máximo.

De la formula de la densidad se deduce que el valor máximo de la densidad ese produce cuando x=0, entonces la densidad máxima es ρ_o.

Cuando x = R

$$\frac{1}{4}\rho_{max} = \rho_{max} - kR \quad \Rightarrow \quad kR = \frac{3}{4}\rho_{max}$$

En la esfera tomamos una corona de radio r<R y espesor dr. La masa de dicha corona es:

$$dM = 4\pi r^2 \, dr \cdot (\rho_0 - kr)$$

Si integramos entre cero y r calculamos la masa de esfera que esta comprendida entre r = 0 y r = r.

$$M = \int_0^r 4\pi r^2 \rho_o \, dr - \int_0^r 4\pi r^3 k \, dr = \frac{4\pi r^3 \rho_o}{3} - \frac{4\pi r^4 k}{4} = \frac{4\pi r^3 \rho_o}{3} - \pi r^4 k$$

El módulo de la intensidad del campo gravitatorio a una distancia r<R del centro de la esfera es:

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} = \frac{G\left(\frac{4\pi r^3 \rho_o}{3} - \pi r^4 k\right)}{r^2} = \pi G \rho_o \left(\frac{4r}{3} - kr^2\right)$$

Como se pide el valor máximo de g , derivamos la ecuación anterior e igualamos a cero

$$\frac{d\,g(r)}{dr} = \pi G\left(\frac{4}{3}\rho_o - 2kr\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2\rho_0}{3k} = \frac{2\rho_{max}}{3k} = \frac{2 \cdot \frac{4kR}{3}}{3k} = \frac{8R}{9}$$

76.-Un plano inclinado forma con la horizontal un ángulo α. Desde el punto más bajo de dicho plano se lanza un proyectil con un ángulo $\theta>\alpha$ el cual impacta con dicho plano. Determinar el valor del ángulo θ para el que la distancia entre el punto más bajo del plano y el lugar del impacto sea el máximo y la distancia entre esos puntos.

Las ecuaciones paramétricas del proyectil son:

$$x = v_0\, t\cos\theta\ ;\ y = v_0 t\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0\ \cos\theta} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = x\,\mathrm{tag}\,\theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{(v_0\ \cos\theta)^2} \quad (1)$$

La ecuación del plano inclinado $\quad y = x\,\mathrm{tag}\,\alpha \quad (2)$

En el punto de impacto del proyectil sobre el plano se cumple que:

$$x_i\ \mathrm{tag}\,\alpha = x_i\ \mathrm{tag}\,\theta - \frac{1}{2} g \frac{x_i^2}{v_o^2 \cos^2\theta} \quad (3)$$

Las soluciones de la ecuación (3) son $x_i=0$, que corresponde al punto de salida del proyectil y

$$\mathrm{tag}\,\theta - \mathrm{tag}\,\alpha = \frac{g\,x_i}{2\,v_o^2 \cos^2\theta} \Rightarrow x_i = \frac{2\,v_o^2}{g} \cos^2\theta\left(\mathrm{tag}\,\theta - \mathrm{tag}\,\alpha\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{2\,v_o^2}{g} \cos\theta\left(\mathrm{sen}\,\theta - \cos\theta\ \ \mathrm{tag}\,\alpha\right)$$

La distancia s entre el punto de salida del proyectil y el punto de impacto medido sobre el plano inclinado es:

$$s = \frac{x_i}{\cos\alpha} = \frac{2\,v_o^2 \cos\theta\left(\mathrm{sen}\,\theta - \cos\theta\,\mathrm{tag}\,\alpha\right)}{g\cos\alpha} \quad (4)$$

Como piden el valor máximo de s, derivamos s respecto de θ e igualamos a cero:

$$\frac{ds}{d\theta}=\frac{2v_o^2}{g\cos\alpha}\left[\cos\theta\cdot(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\operatorname{tag}\alpha)+(\operatorname{sen}\theta-\cos\theta\operatorname{tag}\alpha)\cdot(-\operatorname{sen}\theta)\right]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\operatorname{tag}\alpha=(\operatorname{sen}\theta-\cos\theta\operatorname{tag}\alpha)\operatorname{tag}\theta\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\operatorname{tag}\alpha=\operatorname{sen}\theta\operatorname{tag}\theta-\operatorname{sen}\theta\ \operatorname{tag}\alpha\ \Rightarrow\ \cos\theta+2\operatorname{sen}\theta\operatorname{tag}\alpha=\operatorname{sen}\theta\operatorname{tag}\theta\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\operatorname{tag}^2\theta-2\operatorname{tag}\theta\operatorname{tag}\alpha-1=0\Rightarrow\operatorname{tag}\theta=\frac{2\operatorname{tag}\alpha\pm\sqrt{4\operatorname{tag}^2\alpha+4}}{2}=\operatorname{tag}\alpha\pm\sqrt{1+\operatorname{tag}^2\alpha}$$

La solución válida que da resultado positivo es.

$$\operatorname{tag}\theta=\operatorname{tag}\alpha+\sqrt{1+\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\operatorname{tag}\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1+\operatorname{sen}^2\alpha+2\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{1+\operatorname{sen}^2\alpha+2\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha}+1=\frac{2+2\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha}\ \Rightarrow\ \cos^2\theta=\frac{\cos^2\alpha}{2(1+\operatorname{sen}\alpha)}$$

Sustituyendo en s

$$s=\frac{2v_o^2}{g\cos\alpha}\cos\theta(\operatorname{sen}\theta-\cos\theta\operatorname{tg}\alpha)=\frac{2v_o^2}{g\cos\alpha}\cos^2\theta(\operatorname{tag}\theta-\operatorname{tag}\alpha)\Rightarrow$$

$$s=\frac{2v_o^2}{g\cos\alpha}\cos^2\theta\left(\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}-\operatorname{tag}\alpha\right)=\frac{2v_o^2\cos^2\theta}{g\cos\alpha}\left(\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)=\frac{2v_o^2\cos^2\theta}{g\cos\alpha}\frac{1}{\cos\alpha}\Rightarrow$$

$$s=\frac{2v_o^2\cos^2\theta}{g\cos^2\alpha}=\frac{2v_o^2\dfrac{\cos^2\alpha}{2(1+\operatorname{sen}\alpha)}}{g\cos^2\alpha}=\frac{v_o^2}{g(1+\operatorname{sen}\alpha)}$$

77.- El péndulo de un reloj patrón ejecuta una oscilación completa en un segundo, esto es, su periodo es T =1s. Otro reloj de péndulo tiene una longitud algo mayor que el patrón. Ambos péndulos se encuentran en un instante determinado en fase y vuelven a estarlo cuando han transcurrido 150 s según el reloj patrón. a) Calcular: a) el retraso que sufre el segundo reloj respecto del patrón cuando han transcurrido 20 horas. b) ¿Cuánto debe acortarse el péndulo del segundo reloj para que ambos indiquen la misma hora?

El periodo de un péndulo simple tiene de ecuación $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Cuando el péndulo del reloj patrón efectúa una oscilación, el segundo péndulo no llega a efectuar una oscilación ya que al tener mayor longitud su periodo es mayor. Por tanto en cada oscilación del patrón, el segundo péndulo se retrasa algo, este retraso se ira acumulando al transcurrir el tiempo y llegará un momento en el que el retraso sea de una oscilación completa y entonces si el péndulo patrón ha efectuado n oscilaciones y el otro péndulo habrá efectuado n-1 oscilaciones. Esta situación ocurre cuando transcurren 150 segundos.
Para el péndulo patrón n.T = 150 y para el otro péndulo (n-1) T´ = 150, siendo T el periodo del péndulo patrón y T´ el periodo del otro péndulo.

$$nT = (n-1)T' \Rightarrow T' = \frac{n}{n-1}T = \frac{150}{149}\cdot 1 = \frac{150}{149}\,s$$

Si designamos con L a la longitud del péndulo patrón y L´ a la del segundo péndulo resulta:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\ ;\ T' = 2\pi\sqrt{\frac{L'}{g}} \Rightarrow \frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{L}{L'}} \Rightarrow L' = L\frac{T'^2}{T^2}$$

Cuando el péndulo patrón efectúa una oscilación completa transcurre 1 segundo de tiempo; el otro péndulo indica un tiempo de $\left(1-\frac{149}{150}\right)s$.

a)

$$\frac{1s}{\left(1-\frac{149}{150}\right)s} = \frac{20\,hora\cdot 3600\,\frac{s}{hora}}{x} \quad\Rightarrow\quad x = 72000\cdot\left(1-\frac{149}{150}\right) = 480\,s$$

b) Designamos con ΔL lo que hay que acortar al segundo péndulo para que indique lo mismo que el patrón

$$\Delta L = L' - L = L\frac{T'^2}{T^2} - L = L\left(\frac{T'^2}{T^2}-1\right) = \frac{T^2 g}{4\pi^2}\left(\frac{T'^2}{T^2}-1\right) = \frac{9{,}8}{4\pi^2}\left(\frac{150^2}{149^2}-1\right) = 0{,}00334\ m$$

78.-Un péndulo simple de longitud L, se separa un ángulo θ_o de su posición de equilibrio y se deja oscilar libremente.

a) Determinar la tensión de la cuerda en función del ángulo θ que la cuerda del péndulo forma con la dirección vertical.
b) Representar en una gráfica la tensión frente a θ para θ_o = 45 º y θ_o = 60º.
c) Calcular la aceleración total de la masa puntual del péndulo en función de θ.
d) construir la gráfica de la aceleración total en función de θ, para θ_o=20, 40, 60, y 70 grados.

a) Para cualquier ángulo θ las fuerzas que actúan sobre la masa puntual del péndulo son su peso y la tensión de la cuerda (ver figura 1). Como la masa está girando la tensión de la cuerda ha de proporcionar la fuerza centrípeta mv^2/L .

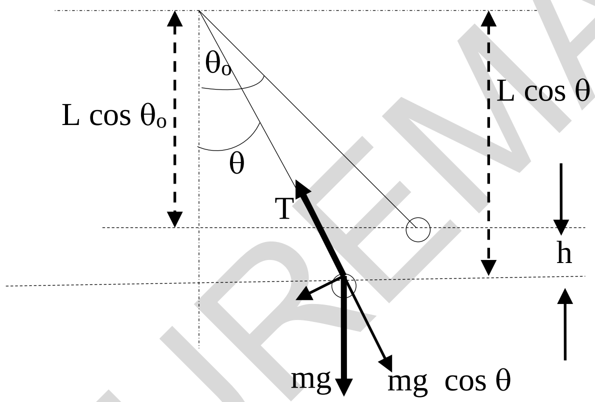


Fig.1

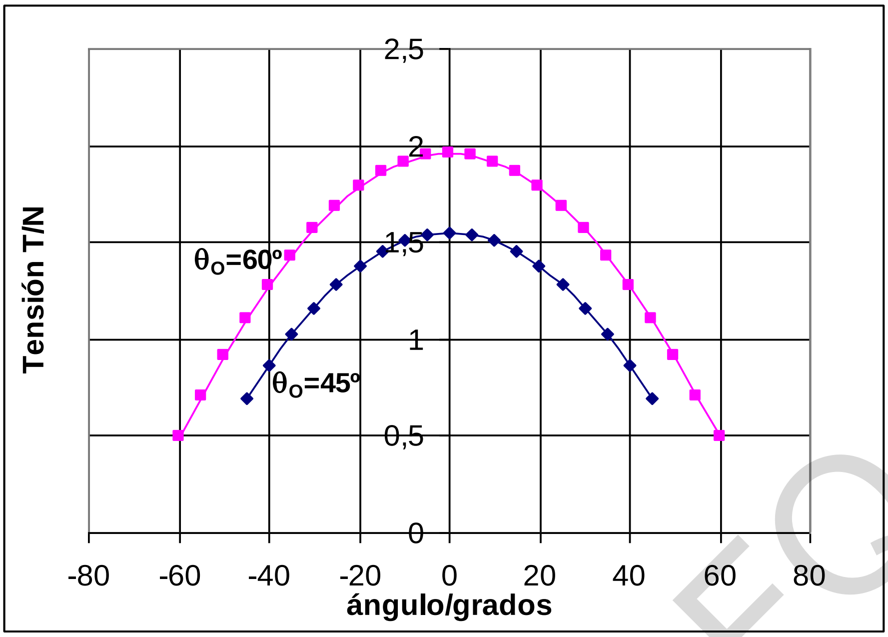
En la figura 1, L es la longitud del péndulo, y designamos con v a la velocidad del péndulo cuando el ángulo es θ. La longitud h es lo que ha descendido el péndulo desde su posición inicial (θ_o) hasta la posición θ.

Podemos escribir $T = mg\cos\theta + m\dfrac{v^2}{L}$ y $mgh = mgL(\cos\theta - \cos\theta_o) = \dfrac{1}{2}mv^2$

Combinando ambas ecuaciones resulta:

$$T = mg\cos\theta + 2mg(\cos\theta - \cos\theta_o) = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_o) \quad (1)$$

b) La representación gráfica de T frente a θ, es la siguiente:



La tensión es máxima cuando el péndulo pasa por la posición vertical (θ =0)

c) Para una posición cualquiera θ del péndulo en la figura 1, la aceleración total a_T se compone de la aceleración tangencial y de la centrípeta. Ambas aceleraciones, tangencial y centrípeta, son vectores perpendiculares entre sí, por tanto:

$$a_T^2 = a^2 + a_c^2 = (g\,\text{sen}\,\theta)^2 + \left(\frac{v^2}{L}\right)^2 = g^2\,\text{sen}^2\theta + \left(\frac{2gL(\cos\theta - \cos\theta_o)}{L}\right)^2 \Rightarrow$$

$$a_T^2 = g^2\,\text{sen}^2\theta + 4g^2\left(\cos^2\theta + \cos^2\theta_o - 2\cos\theta\cos\theta_0\right) \Rightarrow$$

$$a_T^2 = g^2\left(\text{sen}^2\theta + 4\cos^2\theta + 4\cos^2\theta_o - 8\cos\theta\cos\theta_0\right) \Rightarrow$$

$$a_T = g\sqrt{\text{sen}^2\theta + 4\cos^2\theta + 4\cos^2\theta_o - 8\cos\theta\cos\theta_0} \Rightarrow$$

$$a_T = g\sqrt{1 + 3\cos^2\theta + 4\cos^2\theta_o - 8\cos\theta\cos\theta_0} \quad (2)$$

b) La ecuación (2) nos dice que si fijamos (θ_o), la aceleración total dependerá del ángulo θ, esto quiere decir que a_T será diferente en los distintos lugares de oscilación del péndulo, por ello vamos a estudiar cómo varía a_T respecto de θ.

c)

$$\frac{da_T}{d\theta} = g\frac{-6\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + 8\,\text{sen}\,\theta\cos\theta_o}{2\sqrt{\text{sen}^2\theta + 4\cos^2\theta + 4\cos^2\theta_o - 8\cos\theta\cos\theta_o}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + 8\,\text{sen}\,\theta\cos\theta_o = 0; \qquad sen\theta\left(-6\cos\theta + 8\cos\theta_o\right) = 0 \quad (3)$$

La ecuación (3) tiene dos soluciones sen θ =0 y $3\cos\theta = 4\cos\theta_0 \Rightarrow \cos\theta_o = \frac{3}{4}\cos\theta$

El máximo valor de cos θ =1, por tanto, $\cos\theta_o = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta_o = 41{,}4^o$

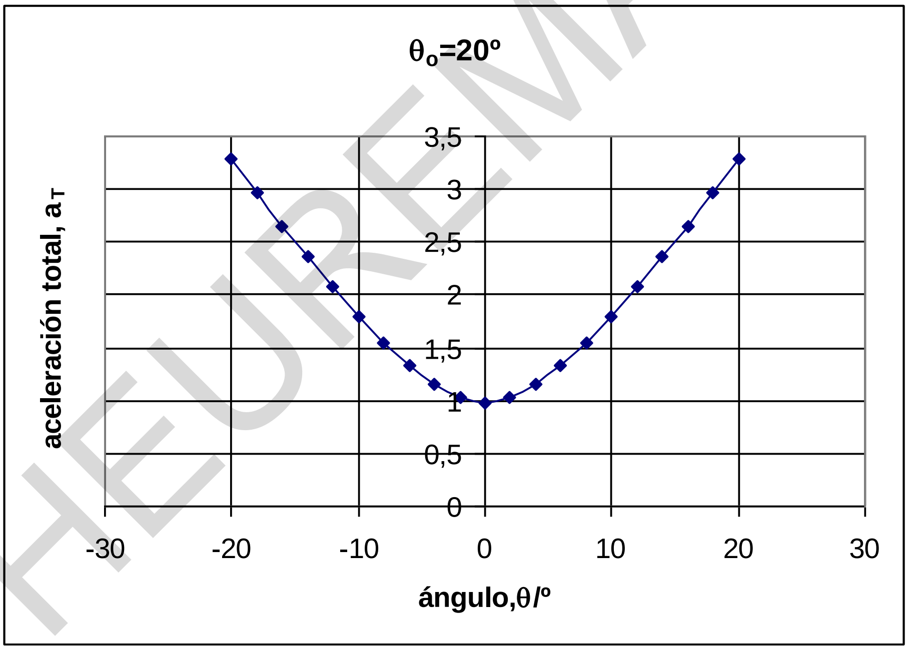
Si en la ecuación (3), damos a θ_o un valor inferior a 41,4 grados la ecuación tiene una solución y es sen θ =0.

Si en la ecuación (3), damos a θ_o un valor superior a 41,4 grados la ecuación tiene más de una solución.

Cuando θ_o=20º

$$a_T = 9{,}8\sqrt{1+3\cos^2\theta + 4\cdot\cos^2 20^o - 8\cdot\cos 20^o\cos\theta} = 9{,}8\sqrt{4{,}53+3\cos^2\theta - 7{,}52\cos\theta}$$

la gráfica a_T frente a θ es:

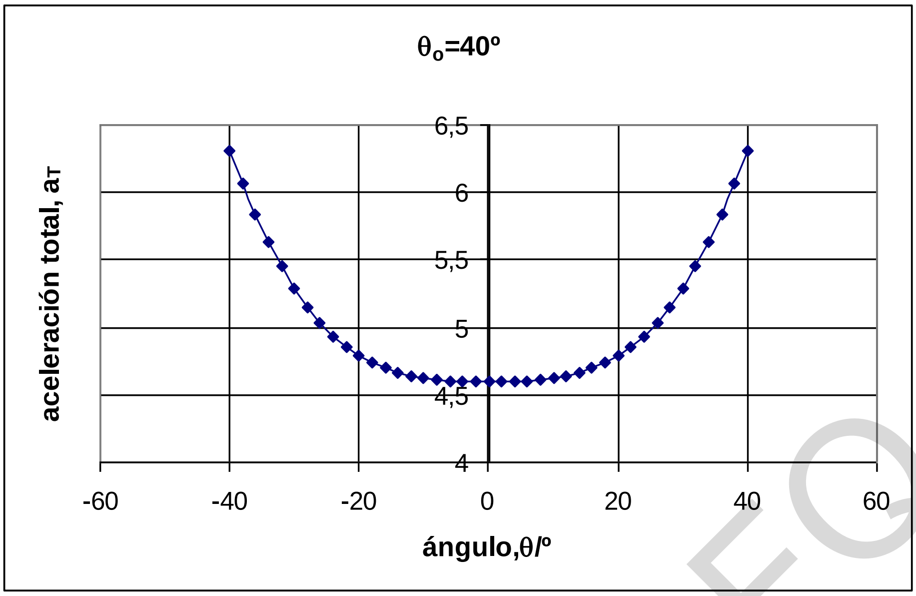


En este caso se presenta un mínimo en el punto más bajo del péndulo

Cuando θ_o= 40º

$$a_T = 9{,}8\sqrt{1+3\cos^2\theta + 4\cdot\cos^2 40^o - 8\cdot\cos 40^o\cos\theta} = 9{,}8\sqrt{3{,}35+3\cos^2\theta - 6{,}13\cos\theta}$$

la gráfica a_T frente a θ es:

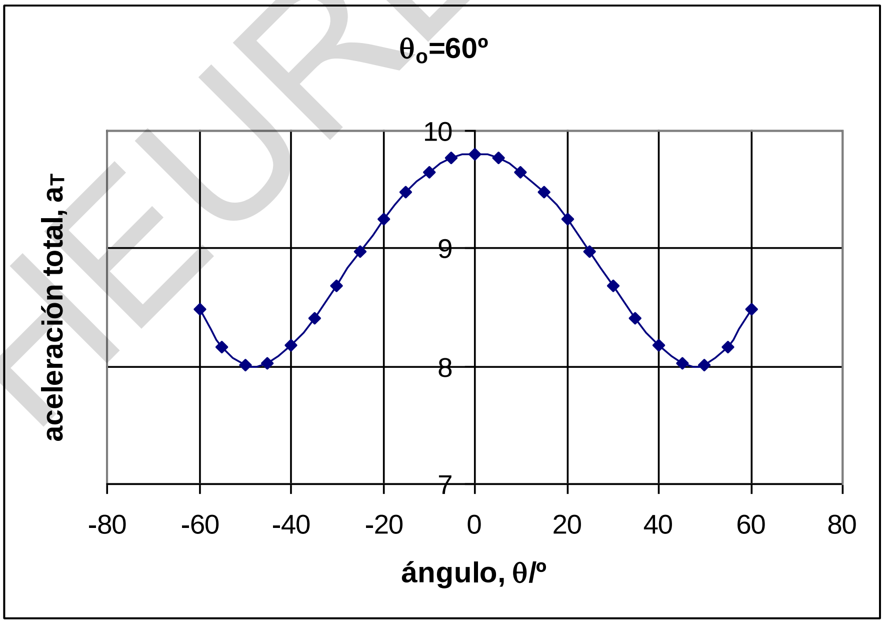


El mínimo se encuentra en el punto más bajo de la posición del péndulo

Cuando θ_o= 60º

$$a_T = 9{,}8\sqrt{1+3\cos^2\theta + 4\cdot\cos^2 60º - 8\cdot\cos 60º\cos\theta} = 9{,}8\sqrt{3{,}00+3\cos^2\theta - 4{,}00\cos\theta}$$

la gráfica a_T frente a θ es:



Como ahora el ángulo es mayor de 41,4 aparecen las soluciones sen θ=0 que ahora es un máximo y

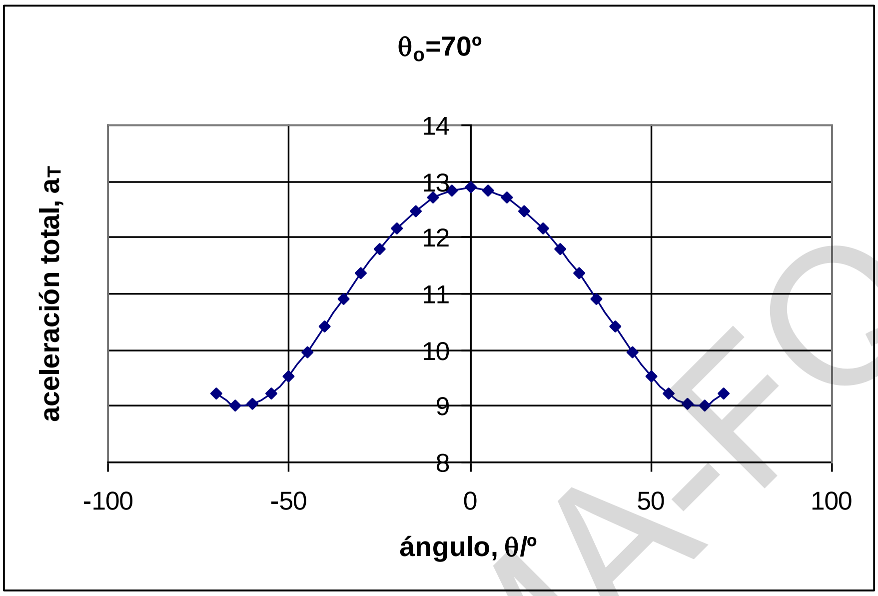
$$\cos\theta_o = \frac{3}{4}\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{4\cdot\cos 60º}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = \pm 48{,}2º$$

Que presenta dos mínimos

Cuando θ_o= 70º

$$a_T = 9{,}8\sqrt{1 + 3\cos^2\theta + 4\cdot\cos^2 70^o - 8\cdot\cos 70^o \cos\theta} = 9{,}8\sqrt{1{,}47 + 3\cos^2\theta - 2{,}74\cos\theta}$$

la gráfica a_T frente a θ es:



Como ahora el ángulo es mayor de 41,4 aparecen las soluciones sen θ=0 que es un máximo y

$$\cos\theta_o = \frac{3}{4}\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{4\cdot\cos 70^o}{3} = \frac{1{,}368}{3} \Rightarrow \theta = \pm 62{,}8^o$$

79.- Un carrito se desplaza por un suelo horizontal con una velocidad v_C constante. El carrito dispone de un dispositivo que puede lanzar una bola con una velocidad v_B en dirección vertical hacia arriba. a) Describir el movimiento de la bola y su posición a medida que transcurre el tiempo, así como la del carrito. Representar gráficamente ambos movimientos si v_C=1 m/s y v_B = 3 m/s

b) Ahora el carrito se encuentra en lo alto de un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. Estando el carrito en reposo se lanza la bola con velocidad v_B perpendicular al plano. Describir el movimiento de la bola y su posición a medida que transcurre el tiempo, así como la del carrito. Obtener las graficas de posiciones del carrito y de la bola cuando a=45º.

c) El carrito se encuentra en el plano inclinado del apartado anterior y lanza la bola con velocidad vertical v_B perpendicular al plano, siendo la velocidad del carrito v_C paralela al plano y en sentido ascendente. a) Describir el movimiento de la bola y su posición a medida que transcurre el tiempo, así como la del carrito. Obtener las graficas de posiciones del carrito y de la bola cuando a=45º.
Despreciar todos los rozamientos.

a) Tomamos unos ejes cartesianos fijos de referencia, con origen en el lugar que ocupa e el carrito en el tiempo t=0. La bola al salir del carrito está dotada de dos velocidades una horizontal v_C y otra vertical v_B, por lo que respecto del sistema elegido describirá una trayectoria parabólica. El carrito se desplaza por el eje X con velocidad uniforme v_C.

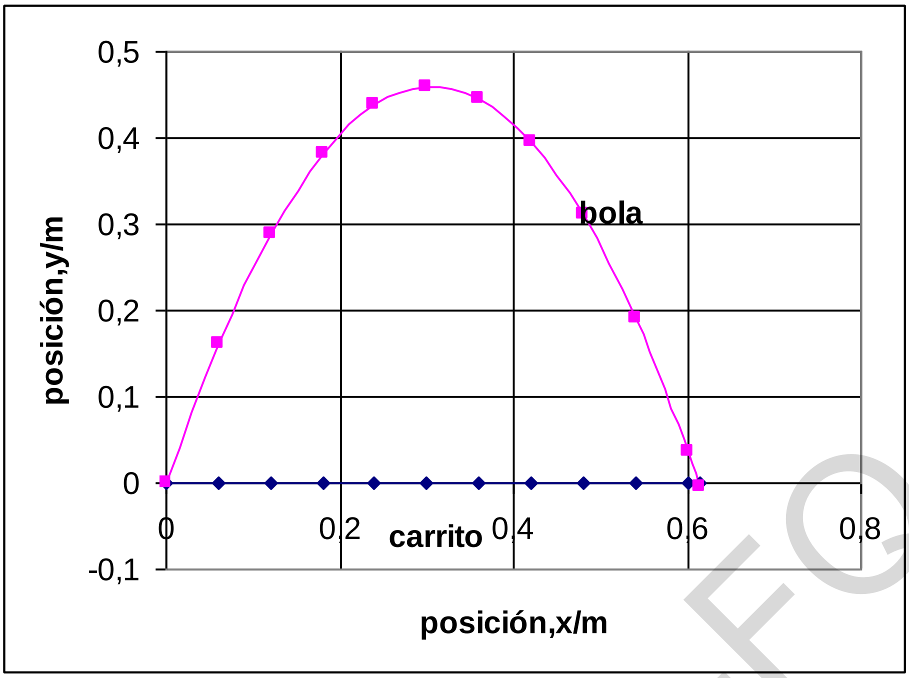
Ecuaciones de la bola:

$$x_B = v_C t \;\; ; \;\; y_B = v_B t - \frac{1}{2} g t^2 \;\Rightarrow\; y_B = v_B \frac{x_B}{v_C} - \frac{1}{2} g \frac{x_B^2}{v_C^2} = 3x_B - \frac{9{,}8}{2 \cdot 1} x_B^2 = 3x_B - 4{,}9\, x_B^2$$

Ecuación del carrito:

$$x_C = v_C t; \quad \text{como} \quad v_C = 1\,\text{m/s} \quad \Rightarrow \quad v_C = t$$

Las abscisas del carrito y la de la bola son las mismas, por tanto, en todo momento, el carrito está justamente debajo de la bola y cuando y_B=0, la bola caerá sobre el carrito.



b) En la figura 1 se indican los ejes X_P e Y_P de referencia, fijos en el plano inclinado.

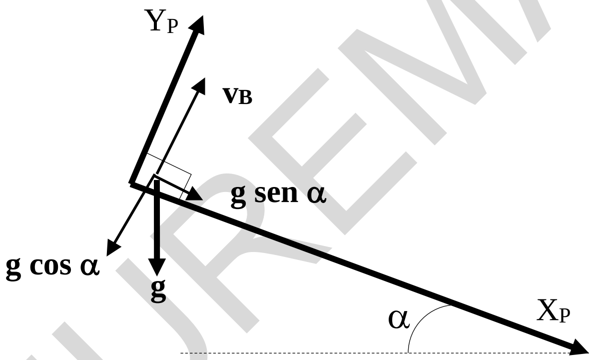


Fig.1

La bola en la dirección del eje Y_p lleva una velocidad inicial v_B y está sometida a una aceleración -g cos α; en la dirección del eje Xp su velocidad inicial es cero y está sometida a una aceleración g sen α.

Las ecuaciones de movimiento de la bola son:

$$x_B = \frac{1}{2} g \operatorname{sen} \alpha \cdot t^2 \quad ; \quad y_B = v_B t - \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot t^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_B = v_B \sqrt{\frac{2 x_B}{g \operatorname{sen} \alpha}} - \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot \frac{2 x_B}{g \operatorname{sen} \alpha} = v_B \sqrt{\frac{2 x_B}{g \operatorname{sen} \alpha}} - \frac{x_B}{\operatorname{tag} \alpha} \quad (1)$$

Las ecuaciones de movimiento del carrito son:

$$x_C = \frac{1}{2} g \operatorname{sen}\alpha \cdot t^2 \quad ; \quad y_C = 0 \quad (2)$$

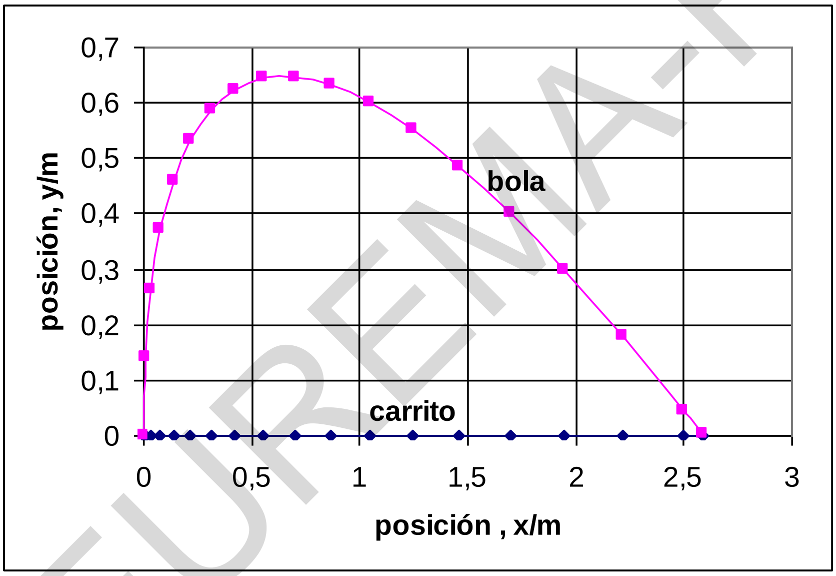
Dado que $x_C = x_B$ se deduce que para los ejes de referencia X_P e Y_P ; el carrito esta debajo de la bola en todo momento.

Para los valores numéricos dados en el enunciado

$$y_B = 3\sqrt{\frac{2x_B}{9{,}8.\operatorname{sen}45}} - \frac{x_B}{\operatorname{tag}45} = 1{,}61\sqrt{x_B} - x_B$$

$$x_C = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot \operatorname{sen}45 \cdot t^2 = 3{,}46t^2$$

Las gráficas de movimiento de ambos cuerpos



En la figura 2 se ha elegido un sistema de referencia distinto al anterior

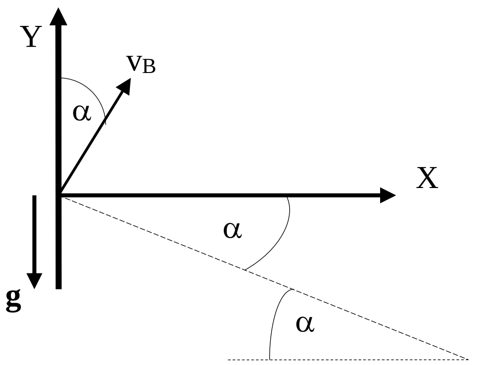


Fig.2

Las ecuaciones de movimiento de la bola son:

$$x_B = v_B \operatorname{sen}\alpha \cdot t \;\;;\;\; y_B = v_B \cos\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g\, t^2$$

El carrito desliza sobre el plano inclinado con una aceleración de módulo g sen α y al cabo de un tiempo t ha recorrido sobre el plano una distancia medida sobre el plano

$$l = \frac{1}{2} g \operatorname{sen}\alpha \cdot t^2$$

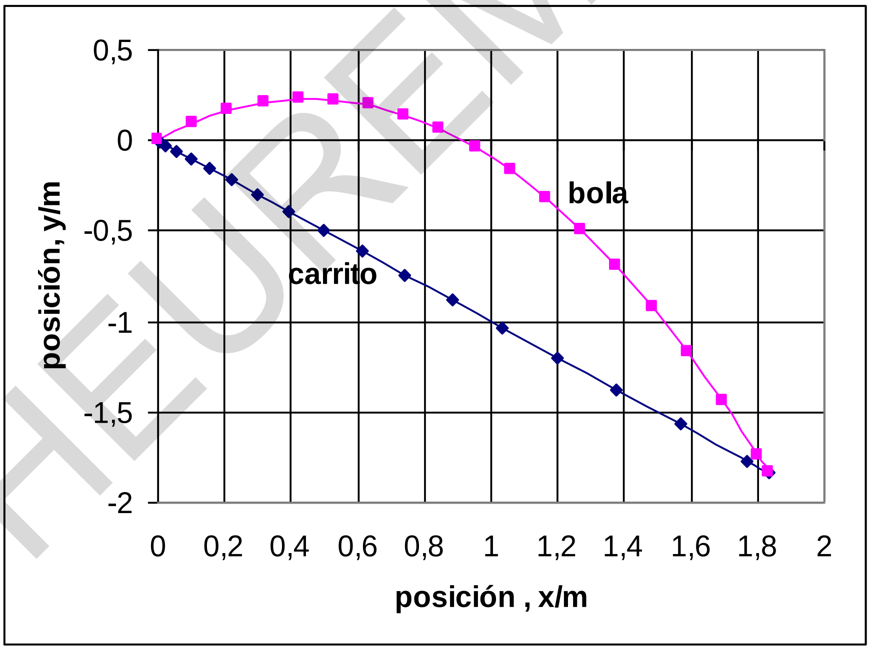
Para ese valor de l, las correspondientes coordenadas en el sistema XY (condiciones de ligadura) son:

$$x_C = l \cos\alpha = \frac{1}{2} g \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \cdot t^2 \;\;;\;\; y_C = -l \operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{2} g \operatorname{sen}^2\alpha \cdot t^2$$

Para los valores numéricos dados en el enunciado:

$$x_B = 2{,}12\, t \;\;;\;\; y_B = 2{,}12\, t - 4{,}9\, t^2$$
$$x_C = 2{,}45\, t^2 \;\;;\;\; y_C = -2{,}45\, t^2$$

Las posiciones de las trayectorias de la bola y del carrito están en la gráfica siguiente:



Esta gráfica nos indica que desde el punto de vista del sistema XY el carrito no está permanentemente debajo de la bola pero sí que coinciden en un lugar del plano inclinado (distinto al inicial) tal como ocurre en el sistema X_PY_P.

c) Tomamos unos ejes de referencia X_PY_P, como los de la figura 1.
Ecuaciones de la bola

$$x_B = -v_C t + \frac{1}{2} g \operatorname{sen}\alpha \cdot t^2 \quad ; \quad y_B = v_B t - \frac{1}{2} g \cos\alpha \cdot t^2$$

Ecuaciones del carrito

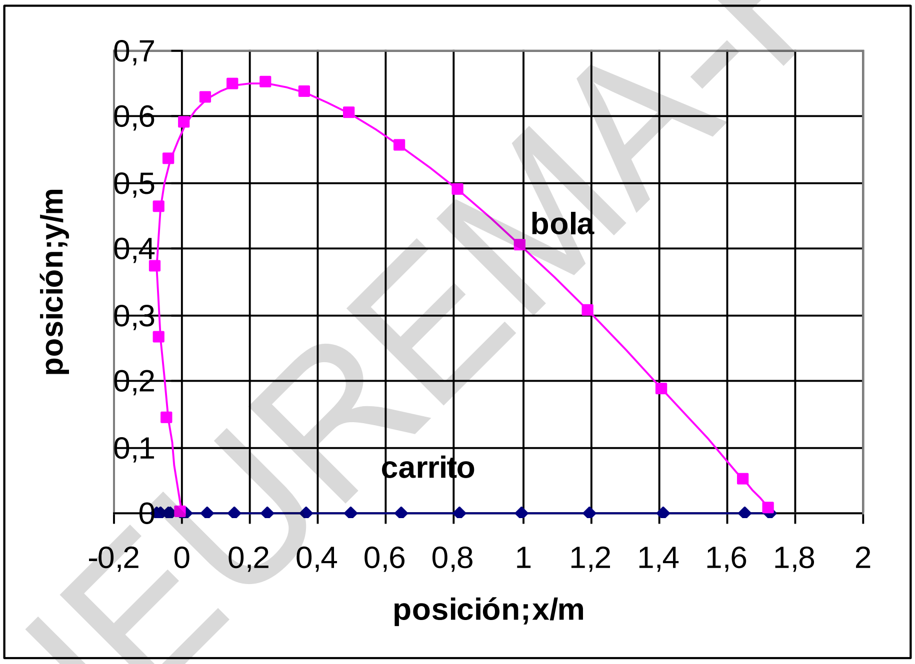
$$x_C = -v_C t + \frac{1}{2} g \operatorname{sen}\alpha \cdot t^2 \quad ; \quad y_C = 0$$

Como $x_C = x_B$, el carrito está siempre debajo de la bola y en un determinado lugar se encontrarán, aparte del instante inicial.

Sustituyendo los valores del enunciado en las ecuaciones anteriores resulta:

$$x_B = -t + 3{,}46\,t^2 \quad ; \quad y_B = 3t - 3{,}46\,t^2$$
$$x_C = -t + 3{,}46\,t^2 \quad ; \quad y_C = 0$$

Las posiciones de las trayectorias de la bola y del carrito están en la gráfica siguiente:



Elegimos ahora un sistema de referencia XY como se indica en la figura 3

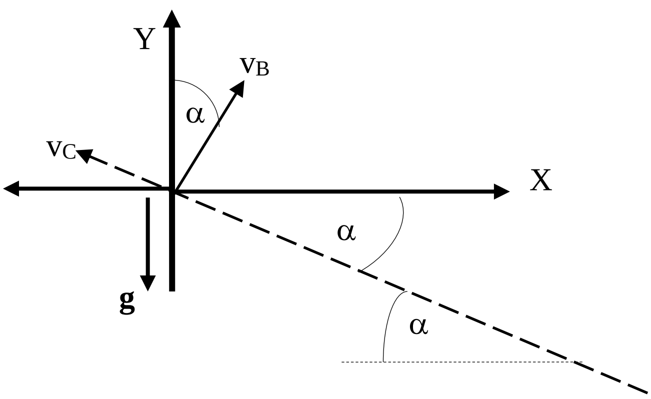


Fig.3

Las ecuaciones de la bola son:

$$x_B = (v_B \operatorname{sen}\alpha - v_C \cos\alpha)t \quad ; \quad y_B = (v_B \cos\alpha + v_C \operatorname{sen}\alpha)t - \frac{1}{2} g\, t^2$$

Si el carrito recorre sobre el plano inclinado una distancia l en un tiempo t, resulta:

$$l = -v_C t + \frac{1}{2} g \operatorname{sen}\alpha\, t^2$$

Y las coordenadas de esa posición respecto del sistema XY de la figura 3 (condiciones de ligadura).

$$x_C = l\cos\alpha = -v_C \cos\alpha \cdot t + \frac{1}{2} g \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \cdot t^2 \quad ; \quad y_C = -l \operatorname{sen}\alpha = v_C \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \operatorname{sen}^2\alpha \cdot t^2$$

Para un ángulo α= 45º

$$x_B = (3 \cdot \operatorname{sen} 45 - 1 \cdot \cos 45)t = 1{,}41\, t \quad ;$$

$$y_B = (3 \cdot \cos 45 + 1 \cdot \operatorname{sen} 45)t - 4{,}9\, t^2 = 2{,}83\, t - 4{,}9\, t^2$$

$$x_C = -1 \cdot \cos 45 \cdot t + 4{,}9 \cdot \cos 45\, sen 45 t^2 = -0{,}707\, t + 2{,}45\, t^2$$

$$y_C = 1 \cdot sen\, 45 \cdot t - 4{,}9 \cdot sen^2\, 45\, t^2 = 0{,}707\, t - 2{,}45\, t^2$$

Las posiciones de las trayectorias de la bola y del carrito están en la gráfica siguiente