80.-Una esfera de radio r expuesta a la radiación solar es capaz de absorberla íntegramente. Se pide el radio de dicha esfera si se cumple que la fuerza de atracción gravitatoria entre el Sol y la esfera se equilibra con la fuerza de presión de la radiación solar.
Datos Potencia radiada por el Sol P_S=4.10^{26} W, densidad de la esfera 10^3 kg/m^3, Constante de Gravitación Universal G = $6,67.10^{-11}$ N.m^2/kg^2 ; Masa del Sol =$1,99.10^{30}$ kg.

La luz está formada por fotones, partículas sin masa, con energía y con momento, existiendo entre estas dos últimas magnitudes la relación:

$$E = pc \quad (1)$$

Por consiguiente al absorber la esfera energía procedente de la radiación solar "absorbe" momento lineal, esto es, cambia el momento y ese cambio de momento origina una fuerza que se denomina de presión de la radiación.
El Sol lanza al espacio de forma uniforme una energía por unidad de tiempo de valor P_S. Si la esfera se encuentra a una distancia R del Sol, la energía que le llega por unidad de tiempo y unidad de superficie es:

$$P_B = \frac{P_S}{4\pi R^2}$$

La superficie de la esfera que absorbe la radiación es πr^2, tal como puede deducirse de la figura 1.

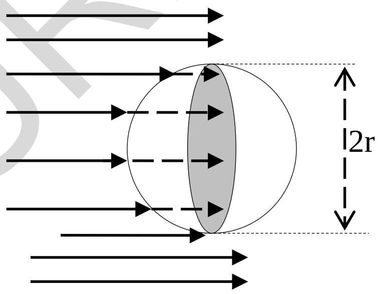


Fig.1

La energía que por unidad de tiempo absorbe la esfera de superficie $S = \pi r^2$ es:

$$E_B = P_B \cdot S = \frac{P_S}{4\pi R^2} \cdot \pi r^2 = \frac{P_S \cdot r^2}{4\,R^2}$$

Simultáneamente con esa absorción de energía se produce una variación por unidad de tiempo en el momento lineal de la radiación, de acuerdo con la ecuación (1), y precisamente esa variación por unidad de tiempo del momento lineal, es la fuerza de la radiación

$$c \cdot \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{P_s\, r^2}{4R^2} \quad \Rightarrow \quad F_B = \frac{P_s\, r^2}{4\,c\,R^2}$$

La fuerza de atracción gravitatoria entre el Sol y la esfera es:

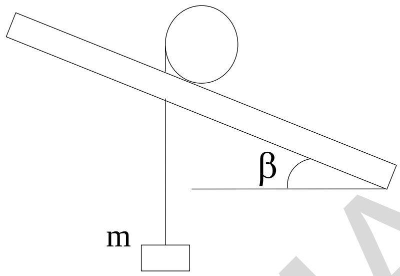
$$F_g = \frac{GM_S m_b}{R^2} = \frac{GM_S \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_B}{R^2}$$

Igualando ambas fuerzas:

$$F_g = \frac{P_S\, r^2}{4cR^2} = \frac{GM_S \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_B}{R^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_S}{4c} = GM_S \cdot \frac{4}{3}\pi r\ \rho_B \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3P_S}{16\pi G\ M_S\, c\rho_B} \Rightarrow$$

$$r = \frac{3 \cdot 4.10^{26}}{16\pi 6{,}67.10^{-11} \cdot 1{,}99.10^{30}.3.10^{8} \cdot 10^{3}} = 6.10^{-7}\,\mathrm{m}$$

81.-Un cilindro macizo de mas M y radio R está situado sobre un plano inclinado que forma con la horizontal un ángulo β. Lleva enrollada una cuerda de masa despreciable y en el extremo libre de la misma se ha colocado una masa m=$\frac{M}{4}$ (ver figura). Dicha cuerda pasa por una rendija que posee el plano inclinado a lo largo del mismo. Se supone que el rozamiento entre el cilindro y el plano es μ=0,3, que la cuerda no desliza sobre el cilindro y que no existe ningún otro tipo de rozamiento. Determinar el movimiento del cilindro de modo que éste ruede pero no deslice por el plano inclinado.



Admitimos de entrada para el sentido del movimiento, que la masa m se desplaza en dirección vertical y hacia arriba o que el cilindro rueda hacia abajo del plano inclinado, las fuerzas que actúan sobre el sistema son las indicadas en la figura 1.

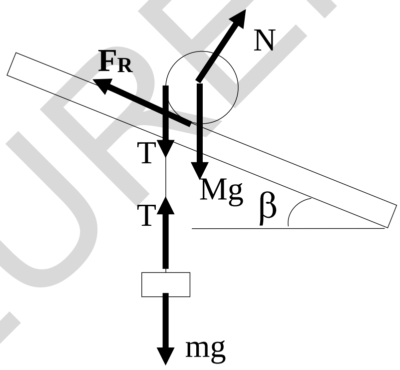


Fig.1

El hilo no desliza por la garganta del cilindro y en consecuencia la aceleración de la masa m suspendida, es la misma que la aceleración tangencial de la periferia de éste. A su vez, por rodar el cilindro por el plano inclinado, se cumple que la aceleración de su c.d.m. es igual a la angular por el radio del cilindro y en consecuencia la aceleración de la masa m, es la misma que la del c.d.m. del cilindro.
Con estas consideraciones, las ecuaciones de la Dinámica aplicadas al sistema, respecto de unos ejes situados en el plano inclinado son las siguientes *:

$$T\,\mathrm{sen}\,\beta + Mg\,\mathrm{sen}\,\beta - F_R = Ma \quad (1)$$

$$F_R R - TR = I\alpha \quad (2)$$

$$T - mg = ma \quad (3)$$

$$a = \alpha R \quad (4)$$

De (3) despejamos T, y de (2) F_R, y llevamos estos valores a (1).

$$T = mg + ma \ ; \ F_R = \frac{I\alpha}{R} + T = \frac{\frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a}{R}}{R} + mg + ma = a\left(\frac{1}{2}M + m\right) + mg \Rightarrow$$

$$m(g+a)\operatorname{sen}\beta + Mg\operatorname{sen}\beta - a\left(\frac{1}{2}M + m\right) - mg = Ma$$

Operando en la última ecuación:

$$Mg\operatorname{sen}\beta - mg + mg\operatorname{sen}\beta = a\left(M + \frac{1}{2}M + m - m\operatorname{sen}\beta\right) \Rightarrow a = \frac{(M+m)\operatorname{sen}\beta - m}{\frac{3}{2}M + m(1 - \operatorname{sen}\beta)}g$$

Según el enunciado M= 4 m, luego la aceleración es igual a:

$$a = \frac{5m\operatorname{sen}\beta - m}{7m - m\operatorname{sen}\beta}g = \frac{5\operatorname{sen}\beta - 1}{7 - \operatorname{sen}\beta}g$$

La aceleración en el sentido del movimiento, esto es, rodando hacia abajo del plano, es positiva:

$$a > 0 \ \Rightarrow \ \frac{5\operatorname{sen}\beta - 1}{7 - \operatorname{sen}\beta}g > 0 \Rightarrow 5\operatorname{sen}\beta - 1 > 0 \ \Rightarrow \ \operatorname{sen}\beta > \frac{1}{5} \Rightarrow \beta > 11{,}5^{\circ}$$

La condición encontrada es que el ángulo del plano sea mayor de 11,5º, ahora bien, la fuerza de rozamiento tiene un valor límite superior, de modo que $F_R < \mu N$.
Determinemos el valor de N de la figura 1, se deduce:

$$N - T\cos\beta - Mg\cos\beta = 0 \ \Rightarrow \ N = T\cos\beta + Mg\cos\beta = m(g+a)\cos\beta + 4mg\cos\beta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow N = m\cos\beta(5g + a) \Rightarrow F_R < \mu m\cos\beta(5g+a)$$

Sustituimos la fuerza de rozamiento y la aceleración por sus por sus valores

$$F_R = a\left(\frac{1}{2}M + m\right) + mg = 3ma + mg \Rightarrow 3ma + mg < \mu m\cos\beta(5g+a) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3a + g < \mu\cos\beta(5g+a) \Rightarrow \frac{3a+g}{\cos\beta(5g+a)} < \mu$$

En la última ecuación se sustituye la aceleración por su valor:

$$\mu > \frac{3\frac{5\operatorname{sen}\beta - 1}{7 - \operatorname{sen}\beta}g + g}{\cos\beta\left(5g + \frac{5\operatorname{sen}\beta - 1}{7 - \operatorname{sen}\beta}g\right)} = \frac{\frac{14\operatorname{sen}\beta + 4}{7 - \operatorname{sen}\beta}}{\frac{5\cos\beta(7 - \operatorname{sen}\beta) + (5\operatorname{sen}\beta - 1)\cos\beta}{7 - \operatorname{sen}\beta}} \Rightarrow \ \mu > \frac{14\operatorname{sen}\beta + 4}{34\cos\beta}$$

Según el enunciado μ=0,3

$$0{,}3 > \frac{14\,\text{sen}\,\beta + 4}{34\cos\beta} \quad \Rightarrow \quad 10{,}2 \cdot \cos\beta > 14\,\text{sen}\,\beta + 4$$

En la inecuación damos valores al ángulo b , hasta encontrar aquel para el que la inecuación ya no se verifica

β/º	**10,2.cos β**	**14 sen β+4**
22	9,457	9,244
22,5	9,424	9,358
22,7	9,410	9,403
22,8	9,403	9,425

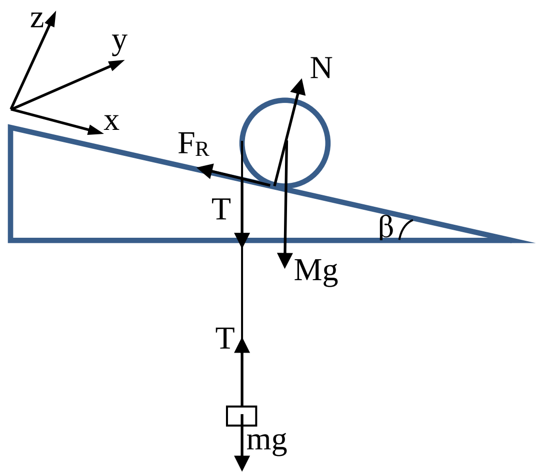
El ángulo β está comprendido entre: 22,7º<β<22,8º

La consecuencia es que el cilindro rueda para valores menores de 22,8 º. Si $\beta \geq 11{,}5^{\circ}$ la aceleración es positiva, el cilindro rueda hacia abajo y si $\beta \leq 11{,}5^{\circ}$ es negativa, el cilindro rueda hacia arriba del plano inclinado.

<u> Las ecuaciones (1) a (4) se han escrito en forma escalar. la justificación vectorial de dichas ecuaciones se hace a continuación</u>:*

El hilo no desliza por la garganta del cilindro y en consecuencia la aceleración de la masa m suspendida, es la misma que la aceleración tangencial de la periferia de éste. A su vez, al rodar el cilindro por el plano inclinado, se cumple que la aceleración de su c.d.m. $\vec{a} = -\vec{\alpha} \times \vec{R}$. Consecuentemente la aceleración en módulo de la masa m, es la misma que la del c.d.m. del cilindro.

Con estas consideraciones, las ecuaciones de la Dinámica aplicadas al sistema, respecto de unos ejes (triedro a derechas) situados en el plano inclinado son las siguientes:



En la masa M.

$$\sum F_x = Tsen\ \beta + Mgsen\beta - F_R = Ma$$

$$\sum F_z = N - Tcos\ \beta - Mg\cos\beta = 0$$

En la masa m.

$$\sum F_z = Tcos\ \beta - mgcos\ \beta = m \cdot a\ cos\beta \quad \rightarrow \quad T = mg + ma$$

Por rodar, la aceleración del c.d.m. tiene sentido contrario a

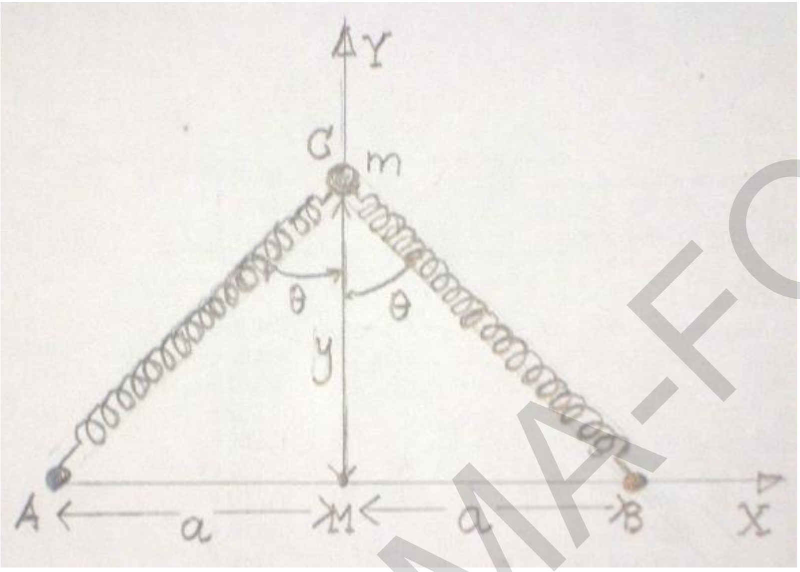
$\vec{\alpha}\ x\ \vec{R}$; $\vec{a} = a\vec{\imath} = -\vec{\alpha}\ x\ \vec{R} = -(-\alpha R\ \vec{\imath}) = \alpha R\ \vec{\imath}$;

$a = \alpha \cdot R \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{a}{R}$

$\sum Momentos = F_R \cdot R - T \cdot R = I \cdot \alpha$; $\quad F_R \cdot R = I\,\alpha + T \cdot R = \frac{1}{2}MR^2\ \frac{a}{R} + (mg + ma)R$

$$F_R = \left(\frac{1}{2}\ M + m\right)a + mg$$

82.- En la figura inferior la masa m está unida a dos muelles iguales cuya constante elástica es k. Los muelles están sujetos firmemente en las posiciones A y B y el conjunto se apoya sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Cuando la masa m se encuentra en la posición M los dos muelles tienen su longitud natural (a en la figura), esto es, ni estirados ni contraídos.



Cuando la masa m se encuentra en la posición C.
a) Calcular la fuerza con que actúan los muelles sobre dicha masa.
b) Calcular la energía potencial elástica de la masa m.
c) Evaluar el trabajo que ha de realizarse para llevar la masa m desde la posición M a la C.

a) Sobre la masa m el muelle de la izquierda actúa con una fuerza cuyo módulo es:

$$F_I = k\,\Delta l$$

Siendo Δl el aumento de longitud del muelle de la izquierda respecto de su longitud natural a.

$$\Delta l = \sqrt{a^2 + y^2} - a \quad \Rightarrow \quad F = k\left(\sqrt{a^2 + y^2} - a\right)$$

El vector $\vec{F}_I$ tiene dos componentes que son:

$$\vec{F}_I = -k\left(\sqrt{a^2 + y^2} - a\right)\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} - k\left(\sqrt{a^2 + y^2} - a\right)\cos\theta\,\vec{j}$$

El muelle de la derecha tiene dos componentes sobre los ejes que son:

$$\vec{F}_D = +k\left(\sqrt{a^2+y^2}-a\right)\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} - k\left(\sqrt{a^2+y^2}-a\right)\cos\theta\,\vec{j}$$

Luego la fuerza resultante es:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_I + \vec{F}_D = -2k\left(\sqrt{a^2+y^2}-a\right)\cos\theta\,\vec{j} = -2k\left(\sqrt{a^2+y^2}-a\right)\cdot\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}\,\vec{j} \Rightarrow$$

$$\vec{F}_R = -2\,k\,y\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}\right)\cdot\vec{j}$$

b) La energía potencial almacenada por cada uno de los muelles vale

$$E_P = \frac{1}{2}k\,\Delta l^2 = \frac{1}{2}k\left[\sqrt{a^2+y^2}-a\right]^2 = \frac{1}{2}k\left(a^2+y^2+a^2-2a\sqrt{a^2+y^2}\right)$$

La energía potencial elástica del sistema es la suma de la correspondiente a cada muelle.

$$E_t = 2\left(\frac{1}{2}k\,\Delta l^2\right) = k\left[\sqrt{a^2+y^2}-a\right]^2 = k\left(2a^2+y^2-2a\sqrt{a^2+y^2}\right) \quad (1)$$

c) La fuerza que actúa sobre la masa m es variable y depende de la distancia entre la posición de la masa m y el punto M. Designamos a esa distancia con λ, el trabajo elemental para desplazar la masa m una distancia $d\lambda$ debe ser realizado por una fuerza igual y de sentido contrario a $\vec{F}_R$ que actúe a través de sucesivos estados de equilibrio con objeto de que no adquiera energía cinética:

$$dW = F_R\,\vec{j}\cdot d\lambda\vec{j} = 2\,k\,\lambda\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda^2}}\right)d\lambda \quad \Rightarrow \quad W = 2\,k\int_0^y \lambda\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda^2}}\right)d\lambda \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = 2\,k\int_0^y \lambda\,d\lambda - k\,a\int_0^y \frac{2\lambda}{\sqrt{a^2+\lambda^2}}\,d\lambda$$

Para resolver la segunda integral hacemos el cambio de variable:

$$p^2 = a^2+\lambda^2 \Rightarrow 2\,p\,dp = 2\lambda\,d\lambda$$

Con lo que la integral queda:

$$-k\,a\int\frac{2\,p\,dp}{p} = -2\,k\,a\,p = -2\,k\,a\sqrt{a^2+\lambda^2}$$

Llevando a (2)

$$W = \left[2k\frac{\lambda^2}{2}\right]_0^y - \left[2\,k\,a\sqrt{a^2+\lambda^2}\right]_0^y = k\,y^2 - \left[2\,k\,a\sqrt{a^2+y^2}\right] + 2\,k\,a^2 \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) valen igual, puesto que el trabajo realizado sobre el sistema se invierte en energía potencial elástica, ya que se trata del trabajo realizado contra una fuerza conservativa, y efectuado en sucesivos estados de equilibrio.

83.- En lo alto de un plano inclinado de masa m_1; ángulo α y longitud L, se coloca una masa (considerada puntual) m_2. Se admite que no existe ningún tipo de rozamiento. Se pide determinar la aceleración del plano inclinado cuando la masa puntual m_2 desliza por él.

El sistema formado por el plano y la masa puntual se encuentran inicialmente como indica la figura 1(a) y al cabo de un tiempo t, cuando la masa m llega al final del plano, como indica la figura 1(b). Inicialmente el plano inclinado y la masa m_2 se encuentra en reposo, por tanto la velocidad del centro de masas del sistema en ese instante es nula.

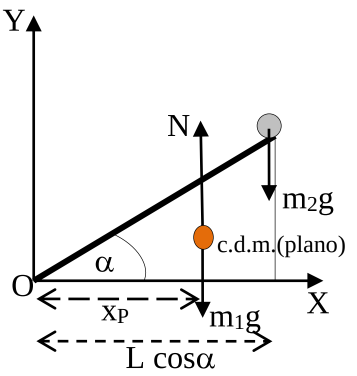


Fig. 1 (a)

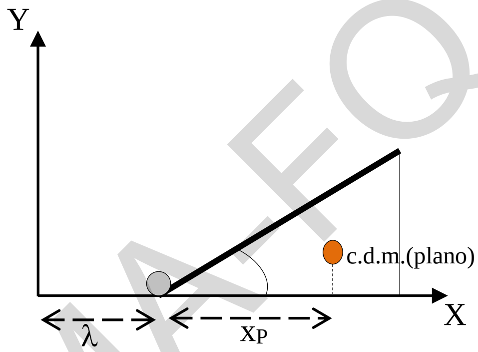


Fig.1 (b)

Designamos con L a la longitud del plano. Respecto del sistema de referencia (OXY), la abscisa de la masa puntual es L cos α, y la del centro de masas del plano inclinado, es x_P. Al cabo del tiempo t, la masa puntual tiene una abscisa λ y el centro de masas del plano inclinado $\lambda+x_P$.

Las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema son: el peso m_2g de la masa m_2, el peso m_1g del plano inclinado y la fuerza N con que el suelo empuja al plano, todas ellas perpendiculares al eje X [nótese que entre las masa m_1 y m_2 también se ejercen fuerzas y reacciones, pero son interiores al sistema y no influyen en el movimiento general del mismo, aparecen representadas en la Fig. 2].

Aplicando la ley de Newton al sistema

$$\sum F_{ext}(x) = \sum m_{total} \cdot a_x = (m_1 + m_2) a_x$$

Teniendo en cuenta que el sumatorio de las fuerzas exteriores es nulo se deduce:

$$(m_1 + m_2) \cdot \frac{dv_x}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; v_x = Cte = 0 \;\Rightarrow\; x_{CM}(sistema) = Cte$$

La ecuación anterior nos indica que la abscisa del centro de masas del sistema no se desplaza, es la misma en el tiempo t=0 que cuando el tiempo es t, a pesar de que tanto el plano inclinado como la masa m_2 se han movido. Se deduce:

$$x_{CM}(\text{sistema}) = \frac{m_1 x_P + m_2 L\cos\alpha}{m_1+m_2} = \frac{m_1(x_P+\lambda)+m_2\lambda}{m_1+m_2} \Rightarrow m_2 L\cos\alpha = \lambda(m_1+m_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{m_2 L\cos\alpha}{m_1+m_2}$$

En el intervalo de tiempo t=0 a t=t la masa m_2 recorre la longitud L del plano y el plano inclinado la distancia λ.

Teniendo presente que el plano posee una aceleración **a** dirigida a lo largo del eje X positivo, del sistema (OXY); es necesario tomar otro sistema de ejes sobre el plano inclinado (O´X´Y´) que será no-inercial. La masa m_2 por moverse en este sistema las fuerzas que actúan sobre ella son: su peso, la fuerza de inercia $F_i= -m_2 \cdot a$ y la fuerza de reacción N_P con que el plano la empuja, tal como se indica en la figura 2.

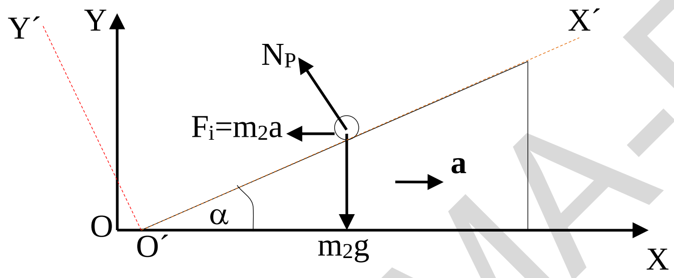


Fig.2

En el intervalo de tiempo t=0 a t=t, la masa m_2 llega a O´ donde x´= 0 :

$$\sum F_{X'} = -m_2 g\,\text{sen}\,\alpha - m_2 a\cos\alpha = m_2 a_x' \quad \Rightarrow \quad a_x' = -(g\,\text{sen}\,\alpha + a\cos\alpha)$$

$$x' - x'_o = \frac{1}{2} a'_x\, t^2 \quad ; \quad 0 - L = -\frac{1}{2}(g\,\text{sen}\,\alpha + a\cos\alpha)t^2$$

En el mismo intervalo de tiempo escribimos para el plano de masa m_1.

$$\lambda = \frac{1}{2} a\, t^2$$

De estas ecuaciones se deduce dividiendo miembro a miembro:

$$\frac{L}{\lambda} = \frac{g\,\text{sen}\,\alpha + a\cos\alpha}{a} \Rightarrow \frac{L}{\dfrac{m_2 L\cos\alpha}{m_1+m_2}} = \frac{g\,\text{sen}\,\alpha + a\cos\alpha}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{m_1+m_2}{m_2}\right) = g\,\text{sen}\alpha\,\cos\alpha + a\cos^2\alpha \Rightarrow a\left(1+\frac{m_1}{m_2} - \cos^2\alpha\right) = g\,\text{sen}\alpha\cos\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{g\,\text{sen}\alpha\,\cos\alpha}{\text{sen}^2\alpha + \dfrac{m_1}{m_2}}$$

84.- En la cámara de combustión de un motor de reacción penetran por segundo m kg de hidrógeno y la cantidad de oxígeno necesaria para su combustión completa. El orificio de salida de la tobera del motor tiene una sección S expresada en m², siendo p la presión en atmósferas y T la temperatura en kelvin. Determinar la fuerza con que los gases de salida impulsan al motor.
Dato . R = 0,082 (atm .L)/(mol K

En la cámara de combustión del motor se produce una reacción química entre el hidrógeno y el oxígeno.

$$\mathrm{H_2}(g)+\frac{1}{2}\mathrm{O_2}(g)\rightarrow \mathrm{H_2O\,(gas)}$$

De la estequiometría de la reacción se deduce que los moles formados de vapor de agua son los mismos que los de entrada de hidrógeno. Dado que la masa molar del hidrógeno es: $2\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}=2\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kgmol}}$ y la del agua $18\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}=18\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kgmol}}$, se deduce que la masa de vapor de agua que por segundo abandona la tobera es:

Moles de hidrógeno a la entrada: $\dfrac{\mathrm{m}\,(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}})\cdot}{2\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kgmol}}}=\dfrac{\mathrm{m}}{2}\,\dfrac{\mathrm{kgmol}}{\mathrm{s}}$

kg de vapor de agua que salen por la tobera por segundo:

$$\frac{\mathrm{m}}{2}\,\frac{\mathrm{kgmol}}{\mathrm{s}}\cdot 18\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kgmol}}=9\,\mathrm{m}\,\frac{\mathrm{kg}}{s}$$

El volumen de vapor de agua que abandona la tobera es igual a la masa de vapor de agua dividido por la densidad del vapor en las condiciones de presión y temperatura que existen a la salida. Admitiendo que el vapor de agua se comporta como un gas perfecto.

$$\mathrm{pV}=\frac{\mathrm{gramos}}{\mathrm{M_{H_2O}}}\mathrm{RT}\Rightarrow \mathrm{p}=\frac{\rho_{\mathrm{H_2O}}}{\mathrm{M_{H_2O}}}\mathrm{RT}\Rightarrow \rho_{\mathrm{H_2O}}=\frac{\mathrm{p\,M_{H_2O}}}{\mathrm{RT}}=\frac{\mathrm{p(atm)}\cdot\frac{18\,\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}}{0{,}082\,\frac{\mathrm{atm\,L}}{\mathrm{mol}}\,\mathrm{T(K)}}=219{,}5\,\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{T}}\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{L}}$$

$$\mathrm{Gasto}=\frac{\mathrm{masa\ por\ s}}{\rho_{\mathrm{H_2O}}}=\frac{9\mathrm{m}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}}{219{,}5\,\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{T}}\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{L}}}=\frac{9\mathrm{m}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}}{219{,}5\,\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{T}}\,\frac{10^{-3}\,\mathrm{kg}}{10^{-3}\,\mathrm{m}^3}}=\frac{9\mathrm{m}}{219{,}5\,\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{T}}}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}=\mathrm{Sv}\Rightarrow$$

$$\mathrm{v}=\frac{9\mathrm{m}}{219{,}5\,\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{S}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Teniendo en cuenta que la fuerza es igual a la variación de la cantidad de movimiento

$$F = m \cdot \frac{9\,mT}{219{,}5\,pS}\ N$$

Si en la ecuación anterior hubiese que sustituir valores numéricos m las magnitudes se expresarían m en kg, , T en K, p en atm y S en m^2.

85.-Cuando se lanza un proyectil desde un suelo horizontal formando un cierto ángulo con el suelo, el proyectil, en el vacío, describe una trayectoria parabólica. El área comprendida entre la curva y el suelo se designa con A(α) indicando así que esa área es función del ángulo de lanzamiento. a) Calcular el valor de α para que el área tenga el máximo valor. b) Dibujar la gráfica del área frente al ángulo de lanzamiento.

Si en la parábola seleccionamos una estrecha franja de altura y, y espesor dx (ver figura 1) el área vale dA=y dx y el área comprendida entre la curva y el suelo:

$$A = \int_0^{x_M} y\,dx$$

Siendo x_M la distancia desde el punto de lanzamiento hasta dónde el proyectil choca contra el suelo

Vamos a obtener la ecuación que relaciona y con x

$$x = v_o(\cos\alpha)t \quad , \quad y = v_o(\text{sen}\,\alpha)t - \frac{1}{2}g\,t^2$$

Despejamos la variable t en la primera ecuación y la sustituimos en la segunda

$$y = v_o \frac{x}{v_o\cos\alpha}\text{sen}\,\alpha - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_o^2\cos^2\alpha} = x\,\text{tag}\,\alpha - \frac{g\,x^2}{v_o^2\cos^2\alpha}$$

Para calcular el valor de x_M tenemos en cuenta que cuando el proyectil choca contra el suelo y=0

$$0 = v_o(\text{sen}\,\alpha)t_M - \frac{1}{2}g\,t_M^2 \Rightarrow t_M = \frac{2v_o\text{sen}\,\alpha}{g} \Rightarrow x_M = v_o(\cos\alpha)\frac{2v_o\text{sen}\,\alpha}{g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_M = \frac{v_o^2\text{sen}\,2\alpha}{g}$$

Volviendo a la integral

$$A = \int_0^{x_M}\left(x\,\text{tag}\,\alpha - \frac{g}{v_o^2\cos^2\alpha}x^2\right)dx = \text{tag}\,\alpha\frac{x^2}{2} - \frac{g}{2v_o^2\cos^2\alpha}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{x_M} =$$

$$= \text{tag}\,\alpha\frac{v_o^4\text{sen}^2 2\alpha}{2g^2} - \frac{g}{6v_o^2\cos^2\alpha}\frac{v_o^6\text{sen}^3 2\alpha}{g^3} = \frac{v_o^4\text{sen}^2 2\alpha}{2g^2}\left(\text{tag}\,\alpha - \frac{\text{sen}\,2\alpha}{3\cos^2\alpha}\right) =$$

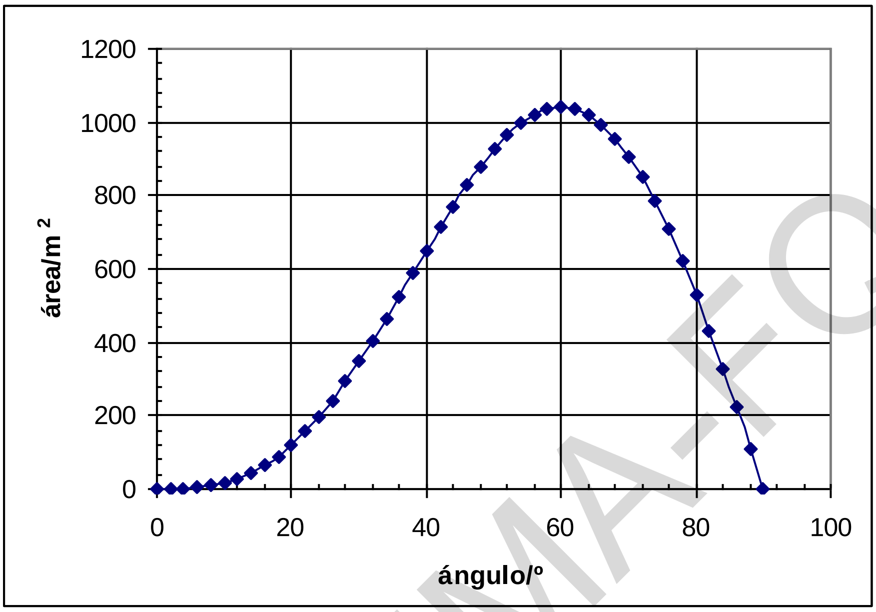
$$= \frac{v_o^4\text{sen}^2 2\alpha}{2g^2\cos\alpha}\left(\text{sen}\,\alpha - \frac{2\,\text{sen}\,\alpha}{3}\right) = \frac{v_o^4\,2\,\text{sen}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{g^2\cos\alpha}\frac{\text{sen}\,\alpha}{3} = \frac{2}{3}\frac{v_o^4}{g^2}\text{sen}^3\alpha\cdot\cos\alpha \quad (1)$$

Como nos piden el área máxima derivamos la ecuación (1) respecto de α e igualamos a cero.

$$\frac{dA}{d\alpha} = \frac{2v_o^4}{3g^2}\left[-\operatorname{sen}^4\alpha + \cos\alpha \cdot 3\operatorname{sen}^2\alpha \cdot \cos\alpha\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\cos^2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tag}\alpha = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60^\circ$$

b)



86.- Se considera a la Tierra como una esfera homogénea de masa M y radio R. Un cuerpo de masa m colocado en la superficie terrestre se lanza hacia el exterior de la Tierra en dirección radial con una velocidad inicial v_i, así se consigue que llegue al infinito con velocidad nula. a) Calcular el valor de v_i a partir de los datos suministrados. b) Determinar el tiempo que emplea la masa m en alcanzar una altura sobre la superficie terrestre igual a tres veces su radio.

Datos. Radio de la Tierra, R = 6370 km, intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra, g_s = 9,8 N/kg.

a) La masa m en el instante inicial, cuando se encuentra en la superficie de la Tierra posee energía cinética y potencial gravitatoria. Cuando alcance el infinito, su energía potencial se considera nula y como su velocidad es nula también lo es su energía cinética. Estos hechos y considerando el principio de conservación de la energía mecánica, puesto que la única fuerza que actúa es la gravitatoria que es conservativa, nos llevan a la ecuación:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 - G\frac{Mm}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_i = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (1)$$

Podemos relacionar GM con la intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre. El peso de la masa m es debido a la atracción gravitatoria que la Tierra ejerce sobre dicha masa

$$m g_S = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow GM = g_s R^2$$

Sustituyendo en la (1)

$$v_i = \sqrt{\frac{2g_S R^2}{R}} = \sqrt{2g_S R} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 6370.10^3} = 11{,}2.10^3 \frac{m}{s} = 11{,}2 \frac{km}{s}$$

b) Supongamos un lugar alejado del centro de la Tierra cuya distancia al centro de ella designamos con x, siendo; $R < x < 3R$. En el mencionado lugar la fuerza de atracción terrestre sobre la masa m es:

$$-G\frac{Mm}{x^2} = F = m a_x = m\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{x^2}$$

La última ecuación puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = -\frac{GM}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx}\cdot v = -\frac{GM}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \int v\,dv = -GM\int\frac{dx}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{2} = \frac{GM}{x} + Cte$$

Para calcular la constante recurrimos a las condiciones iniciales en las que la velocidad es v_i cuando x= R.

$$\frac{v_i^2}{2}=\frac{GM}{R}+Cte \Rightarrow Cte=\frac{v_i^2}{2}-\frac{GM}{R} \qquad \textit{Sustituyendo el valor de la Cte} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2}=\frac{GM}{x}+\frac{v_i^2}{2}-\frac{GM}{R} \quad \Rightarrow v^2=v_i^2+2GM\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R}\right)=v_i^2+2g_S R^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2=v_i^2+v_i^2 R\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R}\right)=v_i^2\left(1+\frac{R}{x}-1\right)\Rightarrow v=v_i\sqrt{\frac{R}{x}} \quad (1)$$

De la ecuación (1)

$$\frac{dx}{dt}=v_i\sqrt{\frac{R}{x}}\Rightarrow \int x^{\frac{1}{2}}\,dx=v_i\sqrt{R}\int dt \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=v_i\sqrt{R}\,t+Cte$$

Cuando x = R la variable t es cero, por tanto, $Cte=\frac{2}{3}R^{\frac{3}{2}}$

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=v_i\sqrt{R}\,t+\frac{2}{3}R^{\frac{3}{2}}\Rightarrow v_i\sqrt{R}\,t=\frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}-R^{\frac{3}{2}}\right) \quad \Rightarrow \quad t=\frac{2}{3v_i}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{R}}-R\right)=$$

Cuando x= 3R, designamos ese tiempo con la letra τ.

$$\tau=\frac{2}{3\cdot 11{,}2.10^3}\left(\frac{3^{\frac{3}{2}}\cdot R^{\frac{3}{2}}}{R^{\frac{1}{2}}}-R\right)=\frac{2\cdot R}{3\cdot 11{,}2.10^3}\left(3^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{2\cdot 6370}{3\cdot 11{,}2}\cdot\left(3^{\frac{3}{2}}-1\right)=1591\,s=26{,}5\,min$$

87.- Se considera a la Tierra como una esfera homogénea de masa M y radio R y fija en el espacio. Un satélite de masa m se coloca en orbita en un punto P, a una altura 2R respecto del centro de la Tierra, formando un ángulo β=60º con la dirección radial en ese punto, siendo el módulo de su velocidad $v=\sqrt{\dfrac{GM}{1{,}8R}}$

a) Calcular el apogeo y perigeo de la orbita y sus velocidades en esos lugares.
b) Si el mismo satélite se coloca en las mismas condiciones anteriores pero con una velocidad tal que en el perigeo la distancia a la Tierra es prácticamente igual a su radio, determinar esa velocidad.
c) Calcular la velocidad en el punto Q de la orbita. Este punto se obtiene trazando una perpendicular al eje mayor de la elipse desde el foco y donde corta a la elipse es el punto Q. La distancia se denomina semi-latus-rectum.
d) Calcular el periodo del satélite

a) En la figura 1 se indica la posición del satélite en el punto P

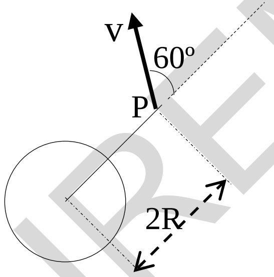


Fig.1

Aplicamos el principio de conservación del momento angular, designando v_A y r_A, las velocidades y radios vector en el apogeo o perigeo. Recuérdese $\vec{l}=\vec{r}\times m\vec{v}=Cte$

$$m\,r\,v\,\mathrm{sen}\,60^{o}=m\cdot 2R\cdot\sqrt{\frac{GM}{1{,}8R}}\cdot\mathrm{sen}\,60^{o}=mv_A r_A\;\Rightarrow\;\sqrt{\frac{GM}{1{,}8R}}\cdot 2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=v_A r_A\;\Rightarrow\;v_A=\frac{\sqrt{3GMR}}{r_A\sqrt{1{,}8}}\quad(1)$$

El principio de conservación de la energía mecánica nos conduce a:

$$\frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{GM}{1{,}8R}}\right)^2-\frac{GMm}{2R}=\frac{1}{2}mv_A^2-\frac{GMm}{r_A}\Rightarrow\frac{1}{2}m\frac{GM}{1{,}8R}-\frac{GMm}{2R}=\frac{1}{2}m\frac{3GMR}{1{,}8r_A^2}-\frac{GMm}{r_A}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{3{,}6R}-\frac{1}{2R}=\frac{3R}{3{,}6r_A^2}-\frac{1}{r_A}\Rightarrow-\frac{0{,}8}{3{,}6R}=\frac{R}{1{,}2r_A^2}-\frac{1}{r_A}\Rightarrow-\frac{2}{9R}=\frac{R-1{,}2r_A}{1{,}2r_A^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-2{,}4r_A^2=9R^2-10{,}8r_aR\Rightarrow r_A=\frac{10{,}8R\pm\sqrt{10{,}8^2R^2-4\cdot2{,}4\cdot9R^2}}{4{,}8}=\frac{10{,}8R\pm5{,}5R}{4{,}8}$$

Las dos soluciones son: una para el apogeo 3,4 R y la otra para el perigeo 1,1 R.

b) A partir de la ecuación (1)

Velocidad en el apogeo

$$v_A=\sqrt{\frac{3R\cdot g_SR^2}{1{,}8}\cdot\frac{1}{3{,}4R}}=\sqrt{\frac{3R\cdot g_S}{1{,}8}\cdot\frac{1}{3{,}4}}=\sqrt{\frac{3\cdot6370.10^3\cdot9{,}8}{1{,}8}\cdot\frac{1}{3{,}4}}=3.10^3\ \frac{m}{s}$$

Velocidad en el perigeo

$$v_P=\sqrt{\frac{3R\cdot g_SR^2}{1{,}8}\cdot\frac{1}{1{,}1R}}=\sqrt{\frac{3R\cdot g_S}{1{,}8}\cdot\frac{1}{1{,}1}}=\sqrt{\frac{3\cdot6370.10^3\cdot9{,}8}{1{,}8}\cdot\frac{1}{1{,}1}}=9{,}3.10^3\ \frac{m}{s}$$

b) Siguiendo los pasos anteriores y designando con v a la velocidad pedida:

$$m\,v\;2R\,\mathrm{sen}\,60º=m\,v_P\,r_P=m\,v_P\,R\;\Rightarrow\;v\sqrt{3}=v_P$$

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{2R}=\frac{1}{2}m\left(\sqrt{3}v\right)^2-\frac{GMm}{R}\Rightarrow\frac{1}{2}3v^2-\frac{1}{2}v^2=\frac{GM}{R}-\frac{GM}{2R}\Rightarrow\;v=\sqrt{\frac{GM}{2R}}$$

c) En la figura 2 se ha representado una elipse con la situación del punto Q

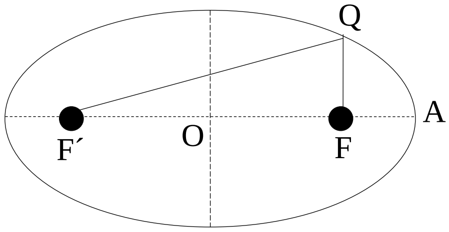


Fig.2

OA=a es el semieje mayor de la elipse. La distancia FQ es la semi-latus-rectum y la designamos con r_l. F´Q = r´. Según las propiedades de la elipse:

$$r' + r_l = 2a \ ; \quad \varepsilon = \frac{OF}{OA} \Rightarrow OF = \varepsilon \cdot a = a - 1{,}1\,R \Rightarrow \ ; \ (r')^2 - (2OF)^2 = (r_l)^2$$

ε es la excentricidad de la elipse y FA = 1,1 R(es el perigeo de la elipse)

Operando con las ecuaciones anteriores

$$(2a - r_l)^2 - 4\varepsilon^2 a^2 = r_l^2 \ \Rightarrow \ 4a^2 + r_l^2 - 4a\,r_l - 4\varepsilon^2 a^2 - r_l^2 = 0 \Rightarrow \quad r_l = a\left(1 - \varepsilon^2\right)$$

El semieje mayor de la elipse lo calculamos a partir de las distancias al apogeo y al perigeo

$$a = \frac{3{,}4\,R + 1{,}1R}{2} = 2{,}25\,R$$

La excentricidad de la elipse es:

$$\varepsilon = \frac{OF}{OA} = \frac{a - 1{,}1R}{a} = \frac{2{,}25R - 1{,}1R}{2{,}25R} = 0{,}51$$

Calculamos r_l.

$$r_l = a\left(1 - \varepsilon^2\right) = 2{,}25R\left(1 - 0{,}51^2\right) = 1{,}66\,R$$

Según el principio de conservación de la energía mecánica.

$$\frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{G\,M}{1{,}8\,R}}\right)^2 - \frac{GM\,m}{2\,R} = \frac{1}{2}mv_S^2 - \frac{G\,Mm}{1{,}66\,R} \Rightarrow \frac{1}{2}m\frac{G\,M}{1{,}8\,R} - \frac{GM\,m}{2\,R} = \frac{1}{2}mv_S^2 - \frac{G\,Mm}{1{,}66\,R} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_S^2 = \frac{G\,M}{1{,}8\,R} - \frac{GM}{R} + \frac{G\,M}{0{,}83\,R} \Rightarrow v_S = \sqrt{\frac{GM - 1{,}8GM + 2{,}17GM}{1{,}8R}} = \sqrt{\frac{1{,}37GM}{1{,}8R}} = \sqrt{\frac{GM}{1{,}31R}}$$

d) Para calcular el periodo del satélite vamos a seguir un procedimiento que resulta fácil de recordar. Supongamos una órbita circular de radio r y calculemos el periodo de un satélite que describiese esa órbita

Igualamos la fuerza centrípeta con la atracción gravitatoria

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \ \Rightarrow \ v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

El periodo es:

$$T = \frac{2\pi\,r}{v} = \frac{2\pi\,r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}} = \frac{2\pi\,r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{g_S R^2}}$$

Si la órbita es elíptica basta sustituir r en la ecuación anterior por el semieje mayor de la elipse a = 2,25 R

$$T=\frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{g_S R^2}}=\frac{2\pi(2{,}25R)^{\frac{3}{2}}}{R\sqrt{g_S}}=\frac{6{,}75\pi R^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{g_S}}=\frac{6{,}75\pi\cdot\sqrt{6370.10^3}}{\sqrt{9{,}8}}=1{,}71.10^4\,\mathrm{s}=4{,}75\,\mathrm{horas}$$

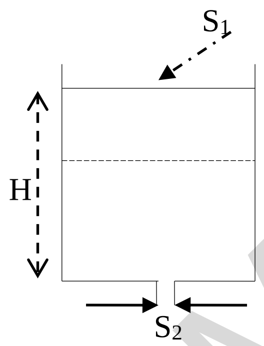
Otra alternativa es emplear directamente la Tercera Ley de Kepler:

$$\frac{a^2}{T^2}=Cte=G\frac{M}{4\pi^2}\quad\Rightarrow\quad T=2\pi\sqrt{\frac{a^2}{GM}}=2\pi\sqrt{\frac{a^2}{g_S R^2}}$$

;
Que como se puede comprobar conduce al mismo resultado.

88.- Un depósito de forma cilíndrica tiene agua hasta una altura de H=4 m, siendo el área de la base S_1= 3 m^2. En el fondo del mismo existe una válvula que al abrirla ofrece una sección S_2. Se abre la válvula del fondo y el depósito se vacía completamente en media hora.
Calcular:
a) el valor de S_2
b) La variación del nivel del agua con el tiempo.
c) La variación de la velocidad de salida del agua con el tiempo

Designamos con t a la variable tiempo y tomamos t=0 en el instante cuando se abre la válvula y por tanto la altura del agua en el depósito es H= 4m.La altura del agua en el depósito es h en cualquier instante posterior al de apertura de la válvula



Sea v_1 la velocidad con que desciende el nivel del agua cuando está a la altura h y v_2 la velocidad de salida del agua por el fondo. Aplicamos el teorema de Bernoulli.

$$p_{atm}+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g h = p_{atm}+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g 0 \Rightarrow \quad 2\,gh = v_2^2 - v_1^2$$

Según al ecuación de continuidad: $S_1\,v_1=S_2\,v_2$; $\quad v_1=\frac{S_2}{S_1}v_2$

$$2\,gh = v_2^2-\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 v_2^2 \Rightarrow v_2^2\left[1-\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right] \Rightarrow v_2=\sqrt{\frac{2\,gh}{1-\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}}=\sqrt{\frac{2\,ghS_1^2}{S_1^2-S_2^2}} \quad (1)$$

Cuando transcurre un tiempo dt posterior a t, el nivel del depósito disminuye en dh y el volumen disminuye en dV y por este motivo hay que introducir un signo menos en la ecuación diferencial $dV=-S_1\,dh$ .Las variaciones de volumen y de altura en el depósito se relacionan con la variable tiempo del siguiente modo.

$$dV=-S_1dh \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt}=S_1\left(-\frac{dh}{dt}\right)=S_1v_1 \;\Rightarrow\; v_1=-\frac{dh}{dt}$$

Como $v_1 = \frac{-dh}{dt} = \frac{S_2}{S_1} v_2 \Rightarrow v_2 = -\frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{dh}{dt}$

Sustituyendo en (1)

$$-\frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{dh}{dt} = S_1 \sqrt{\frac{2g}{S_1^2 - S_2^2}} \cdot \sqrt{h} \Rightarrow \quad \int \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\sqrt{\frac{2gS_2^2}{S_1^2 - S_2^2}} \int dt \quad \sqrt{h} = -\sqrt{\frac{2gS_2^2}{S_1^2 - S_2^2}} \cdot t + Cte$$

Cuando t =0 , h=H , por tanto la constante vale: $Cte = \sqrt{H}$

$$\sqrt{h} = -\sqrt{\frac{2gS_2^2}{S_1^2 - S_2^2}} \cdot t + \sqrt{H} \quad ; \quad t = \frac{\sqrt{H} - \sqrt{h}}{\sqrt{\frac{2gS_2^2}{S_1^2 - S_2^2}}} = \sqrt{\frac{S_1^2 - S_2^2}{2gS_2^2}} \cdot \left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right)$$

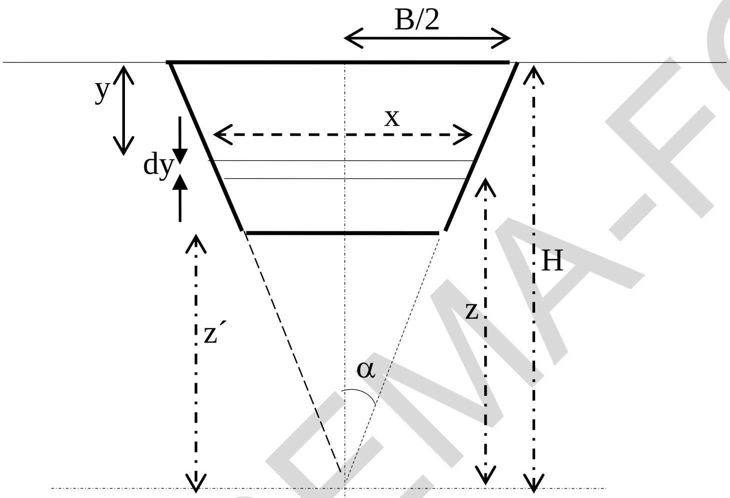
Cuando el depósito se vacía completamente t = 0,5 horas = 1800s y h=0

$$1800^2 = \frac{9 - S_2^2}{2 \cdot 9{,}8 \cdot S_2^2} \cdot \sqrt{4} \Rightarrow 6{,}35.10^7\, S_2^2 = 18 - 2S_2^2 \Rightarrow S_2 = \sqrt{\frac{18}{6{,}35.10^7}} = 5{,}3.10^{-4}\, m^2$$

$$S_2 = 5{,}3\, cm^2$$

89.- Una compuerta metálica tiene forma de trapecio isósceles de base mayor B, menor b y altura h. Se encuentra sumergida en agua de manera que la base mayor está justamente sobre la superficie del agua. Calcular la fuerza que soporta dicha compuerta por la presión ejercida por el agua y determinar la posición del centro de presiones.
Realizar los cálculos numéricos para B = 2 m , b= 1m y h =0,80 m.

En a figura se representa la compuerta y sobre ella se establece una superficie elemental dS, de espesor dy y longitud x. que dista de la superficie del agua una distancia y. Tanto y como x son variables ya que depende del lugar de la compuerta donde se elija colocar la superficie dS.



La presión que actúa sobre la superficie dS vale : p=ρ g y, siendo ρ la densidad del agua. La fuerza que obra sobre la superficie dS es:

$$dF = pdS = \rho\, g\, y \cdot x\, dy$$

La fuerza sobre toda la compuerta es: la suma de todas las fuerzas elementales que actúan sobre toda la compuerta de altura h , y se calcula mediante una integral

$$F_T = \int_0^h \rho\, g\, x\, y dy$$

Como se observa en la figura las dos variables x e y están relacionadas por la ecuación de una recta y para resolver la integral hemos de poner la variable x en función de y. En la figura se han prolongado los lados iguales de la compuerta y se ha trazado la vertical que pasa por la mitad de las distancias: B, b y x.

$$\tan\alpha = \frac{B}{2H} = \frac{b}{2z'} = \frac{x}{2z} \Rightarrow ; \frac{B}{H} = \frac{b}{z'} = \frac{b}{H-h} \quad \frac{B}{H} = \frac{x}{z} = \frac{x}{H-y} \Rightarrow \quad x = \frac{B(H-y)}{H}$$

$$\Rightarrow BH - Bh = bH \Rightarrow H = \frac{Bh}{B-b} \Rightarrow x = \frac{B\left(\frac{Bh}{B-b} - y\right)}{\frac{Bh}{B-b}} = B\left(1 - \frac{y(B-b)}{Bh}\right) = B - \frac{y(B-b)}{h}$$

$$\Rightarrow \quad x = B - \frac{y(B-b)}{h} (2)$$

Llevando la ecuación (2) a la integral, resulta

$$F_T = \rho g \int_0^h \left[B - \frac{y(B-b)}{h}\right] y\,dy = \rho g B \frac{h^2}{2} - \rho g \frac{B-b}{h} \cdot \frac{h^3}{3} = \rho g B \frac{h^2}{2} - \rho g \frac{B-b}{3} \cdot h^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_T = \rho g h^2 \left(\frac{B}{2} - \frac{B-b}{3}\right) = \rho g h^2 \left(\frac{B+2b}{6}\right) = 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}8^2 \left(\frac{2+2\cdot 2}{6}\right) = 6{,}27.10^3 \text{ N}$$

Designamos con d la distancia desde la superficie al centro de empuje. El momento de la fuerza resultante debe ser igual a la suma de los momentos de cada elemento que consideremos de superficie.

$$F_T d = \rho g h^2 \left(\frac{B+2b}{6}\right) \cdot d = \int_0^h (\rho g x y\,dy) y = \int_0^h \rho g \left[B - \frac{(B-b)y}{h}\right] y^2\,dy =$$

$$= \rho g B \frac{h^3}{3} - \rho g \frac{B-b}{h} \cdot \frac{h^4}{4} \Rightarrow \frac{B+2b}{6} \cdot d = \frac{Bh}{3} - \frac{B-b}{4} \cdot h = h\left(\frac{B+3b}{12}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{\frac{B+3b}{12}}{\frac{B+2b}{6}} = \frac{B+3b}{2(B+2b)} = \frac{2+3\cdot 1}{2(2+2\cdot 1)} = 0{,}625\,\text{m}$$