Matemáticas elementales

para un curso de Física de

Iniciación a la Universidad.

Apéndice 1. Introducción al cálculo vectorial

Magnitudes físicas

Los cuerpos presentan ciertas propiedades que se pueden medir y que reciben el nombre de magnitudes. Así tenemos la masa, la longitud, la duración de un suceso, la velocidad, la fuerza, la energía, etc.

Sin embargo, algunas de estas magnitudes pueden quedar definidas con un valor numérico y una unidad, como por ejemplo al afirmar que la temperatura del aula es de 20 ºC. Se dice que son magnitudes escalares.

Por el contrario, otras magnitudes necesitan para quedar determinadas, además de un número y de una unidad, la dirección y el sentido en que actúan, se conocen como magnitudes vectoriales. Por ejemplo: la velocidad, la fuerza, la intensidad de los campos gravitatorio y eléctrico, etc.

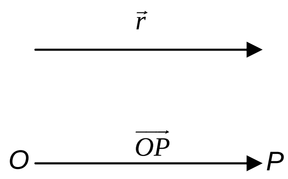


Fig.A1. Representación geométrica de un vector.

Magnitudes vectoriales

Las propiedades físicas que vienen medidas por magnitudes vectoriales, se representan mediante un elemento matemático designado como vector. Su representación gráfica es un segmento con una flecha situada en un extremo, fig. A.1., nombrándose mediante una letra y una flecha encima vector $\vec{r}$; o con dos letras, donde la primera indica el origen O y la segunda el extremo del vector punto *P*, se lee vector $\overrightarrow{OP}$.

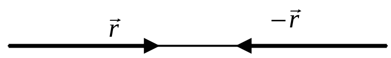


Fig.A.2. Representación de un vector y de su vector opuesto.

Los vectores se caracterizan por su módulo, dirección y sentido.

El módulo de un vector determina el valor de la magnitud física que representa, se simboliza por $|\vec{r}|$. Cuando se dibuja el vector gráficamente, su longitud se suele tomar proporcional al valor del módulo.

La dirección es la de la recta que contiene al vector.

El sentido dentro de la recta que contiene al vector, puede ser hacia uno o hacia otro lado. Así en la fig. A.2 los vectores representados tienen el mismo módulo y dirección, pero sentidos contrarios y para expresarlo se designan con vectores $\vec{r}$ y $-\vec{r}$. Este último vector se llama vector apuesto al primero.

Vectores unitarios

Se llaman vectores unitarios aquellos que tienen de módulo la unidad. Si tomamos un sistema de ejes cartesianos en las tres dimensiones del espacio, con origen en un punto O, sistema (O,X,Y,Z). Los vectores unitarios según estos tres ejes se llaman vectores unitarios principales y se designan respectivamente como: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, ver la fig.A.3.

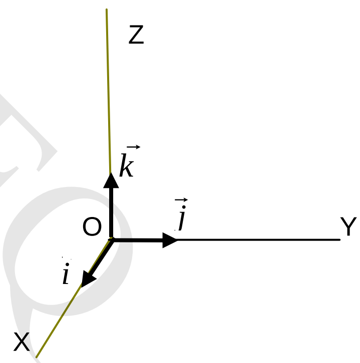


Fig.A.3. Vectores unitarios principales según tres ejes perpendiculares X, y, Z.

Se puede determinar un vector unitario en la dirección de cualquier vector $\vec{r}$, obteniéndose un vector unitario $\vec{u}_r$ (se lee vector unitario en la dirección del vector $\vec{r}$) que tiene de módulo la unidad, pero su dirección y sentido son los mismos que los del vector $\vec{r}$. Se determina el vector unitario, dividiendo el vector considerado entre su módulo.

$$\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

De la anterior ecuación se deduce, que un vector se puede expresar como el producto de su módulo por el vector unitario en su dirección, $\vec{r} = |\vec{r}|\vec{u}_r$.

Componentes de un vector

Consideremos un vector con origen en *O* y extremo en *P,* representado por $\overrightarrow{OP}=\vec{r}$ en la fig.A.4. Proyectando el vector sobre los ejes obtenemos los segmentos $x, y, z,$ llamados componentes del vector según los ejes.

Si el vector $\overrightarrow{OP}=\vec{r}$ forma con los ejes tres ejes ángulos respectivos: α, β , γ y su módulo es $|\vec{r}|$. De las relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo deducimos las siguientes ecuaciones:

$$x=|\vec{r}\,|\cos\alpha \;; \qquad y=|\vec{r}\,|\cos\beta \;; \qquad z=|\vec{r}\,|\cos\gamma$$

Donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, y $\cos\gamma$ se designan como cosenos directores.

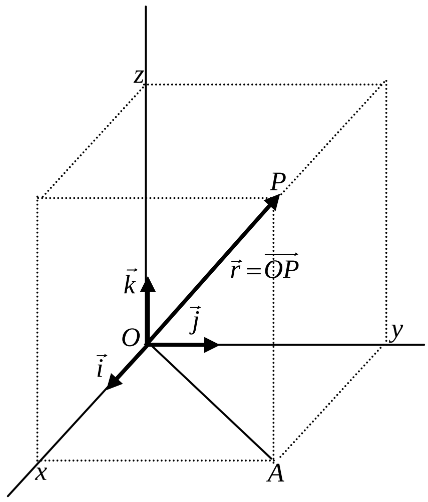


Fig.A.4. Representación de un vector y de sus componentes cartesianas.

Expresión de un vector en función de sus componentes y de los vectores unitarios. Como en las direcciones de los ejes están situados los vectores unitarios principales, se puede expresar un vector $\vec{r}$ en función de sus componentes y de los vectores unitarios en la forma.

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$$

El módulo del vector $\overrightarrow{OP}=\vec{r}$, *es su longitud en el sistema cartesiano de referencia*. Aplicando primero el teorema de Pitágoras a las componentes del vector $x, e\; y$, se determina el valor de la diagonal $\overline{OA}$ del rectángulo que forma la base $\overline{OA}^2=x^2+y^2$. Aplicándolo de nuevo el teorema de Pitágoras al triángulo OAP, resulta finalmente para el módulo del vector.

$$|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Ejemplo

Dado el vector de posición, $\vec{r}=3\,\vec{i}+4\,\vec{j}-5\vec{k}$. *Determina su módulo, el vector unitario en su dirección y el ángulo que forma con cada uno de los ejes.*

$$|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{3^2+4^2+(-5)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

$$\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=\frac{3\vec{i}+4\,\vec{j}-5\vec{k}}{5\sqrt{2}}=\frac{3}{5\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{4}{5\sqrt{2}}\vec{j}-\frac{5}{5\sqrt{2}}\vec{k}$$

Comprueba calculando el módulo de $\vec{u}_r$ que vale la unidad.

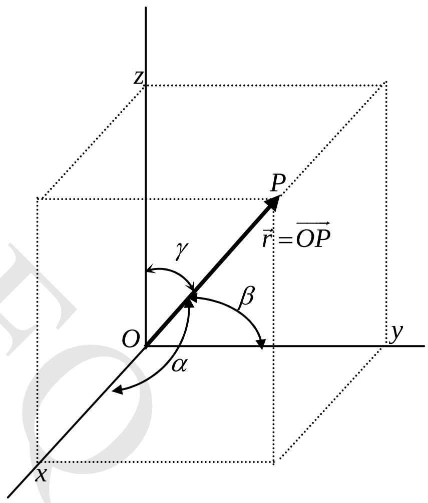


Fig.A.5. Los ángulos que forma un vector con los ejes de coordenadas, se designan respectivamente por α, β y γ.

Para hallar los ángulos que forma el vector $\vec{r}$ con los ejes, es necesario calcular antes los cosenos directores.

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{r}|}=\frac{3}{5\sqrt{2}} \;; \qquad \cos\beta=\frac{y}{|\vec{r}|}=\frac{4}{5\sqrt{2}} \;; \qquad \cos\gamma=\frac{z}{|\vec{r}|}=\frac{-5}{5\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Y los ángulos:

$$\alpha=arc\,\cos\frac{3}{5\sqrt{2}}=64{,}9º \;; \quad \beta=arc\,\cos\frac{4}{5\sqrt{2}}=55{,}6 \;; \quad \gamma=arc\cos\frac{-1}{\sqrt{2}}=135{,}0º$$

Operaciones con vectores

Los vectores son elementos matemáticos que se pueden sumar, restar, multiplicar por un número, y multiplicar entre sí, presentando dos tipos de producto, el producto escalar y el producto vectorial.

Suma de vectores

Cuando se trata de sumar dos vectores se emplea el método del paralelogramo, que consiste en formar un paralelogramo con los dos vectores como aristas, trazando paralelas a cada uno de ellos. La diagonal mayor es el vector suma y su módulo se obtiene de aplicar el teorema del coseno al triángulo formado por los dos vectores como lados, fig.A.6.

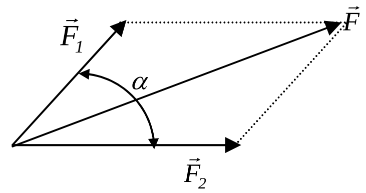


Fig.A.6. Suma de dos vectores por el método del paralelogramo.

$$\left|\vec{F}\right|^2 = \left|\vec{F}_1\right|^2 + \left|\vec{F}_2\right|^2 + 2\left|\vec{F}_1\right|\left|\vec{F}_2\right| \cos\alpha$$

Cuando el ángulo que forman los vectores es de 90º la relación anterior queda reducida al teorema de Pitágoras.

Cuando se tienen que sumar varios vectores y la propiedad física que representan no se altera al desplazarlos de un punto a otro, (se llaman vectores libres), entonces resulta más cómodo para sumarlos geométricamente emplear el método del polígono. Se sitúan unos vectores a continuación de otros y el vector suma $\vec{F}$, también llamado resultante, se obtiene uniendo el origen del primer vector con el extremo del último, fig.A.6

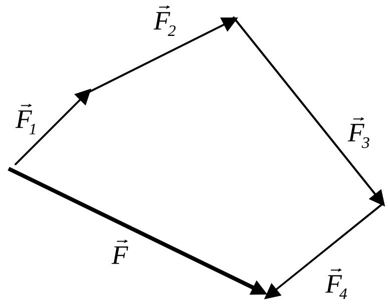


Fig.A.6. Sumando vectores por el método del polígono.

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i$$

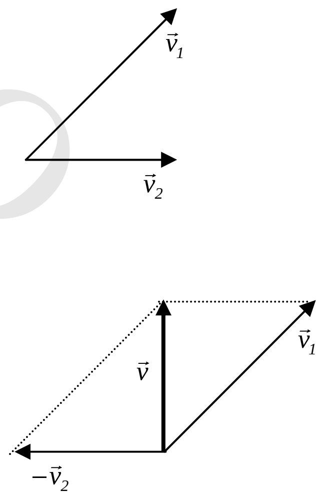
Cuando los vectores se expresan en función de sus componentes, entonces el vector resultante se obtiene sumando entre sí, todas las componentes correspondientes a cada uno de los vectores unitarios.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = F_{1x}\,\vec{i} + F_{1y}\,\vec{j} + F_{1z}\,\vec{k} + F_{2x}\,\vec{i} + F_{2y}\,\vec{j} + F_{2z}\,\vec{k}$$
$$\vec{F} = \left(F_{1x} + F_{2x}\right)\vec{i} + \left(F_{1y} + F_{2y}\right)\vec{j} + \left(F_{1z} + F_{2z}\right)\vec{k}$$

Resta o sustracción de vectores

Para restar dos vectores, se suma el primer vector con el opuesto al segundo. De este modo se transforma la operación de restar, en una suma del primer vector con el opuesto al segundo, fig.A.7.

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \left(-\vec{v}_2\right)$$



Para restar dos vectores cuando están en función de las componentes, se opera del siguiente modo.

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = v_{1x}\vec{i} + v_{1y}\,\vec{j} + v_{1z}\,\vec{k} - \left(v_{2x}\vec{i} + v_{2y}\,\vec{j} + v_{2z}\,\vec{k}\right)$$
$$\vec{v} = \left(v_{1x} - v_{2x}\right)\vec{i} + \left(v_{1y} - v_{2y}\right)\vec{j} + \left(v_{1z} - v_{2z}\right)\vec{k}$$

Un ejemplo de suma vectorial, lo constituye *el principio de superposición*, que se aplica para componer campos vectoriales, como el electrostático $\vec{E}$, el magnético $\vec{B}$ o el gravitatorio $\vec{g}$.

Fig.A.7. Resta de dos vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$

Producto de un escalar por un vector

El producto de un escalar m por un vector $\vec{v}$, es un nuevo vector $\vec{p}$ cuyas componentes quedan multiplicadas por este número, $m \cdot \vec{v} = \vec{p}$ En consecuencia, el vector $\vec{p}$ tiene su módulo m veces mayor, la dirección la misma que la del vector $\vec{v}$ y el sentido puede ser el mismo o el contrario, según que m sea un número positivo o negativo.

Ejemplos de este producto, lo constituyen el momento lineal, en el que m es la masa del cuerpo y $\vec{v}$ el vector velocidad, o también la fuerza del campo eléctrico $\vec{E}$ sobre una carga, $\pm q$ que vale $\vec{F} = \pm\, q\vec{E}$

Producto escalar de dos vectores

Se define el producto escalar de dos vectores $\vec{F}$ y $\vec{r}$; como un número, obtenido mediante el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

$$\vec{F} \cdot \vec{r} = \left|\vec{F}\right| \left|\vec{r}\right| \cos\ \alpha$$

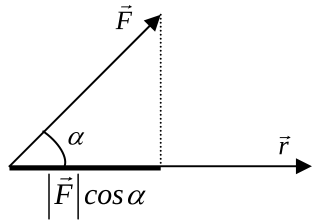


Fig.A.8. La proyección del vector $\vec{F}$ sobre el vector $\vec{r}$ vale $\left|\vec{F}\right| \cos\alpha$.

Observa en la fig.A.8, que $\left|\vec{F}\right| \cos\,\alpha$ es la proyección del vector $\vec{F}$ sobre el vector $\vec{r}$, de modo que el producto escalar de dos vectores puede también definirse, como el producto del módulo de uno de los vectores por la proyección del otro sobre él.

El valor del producto escalar de dos vectores es distinto, si se va variando el ángulo α que forman los dos vectores entre sí:

- Si son perpendiculares el producto escalar nulo, pues *cos* $\pi/2 = 0$.
- Si tienen la misma dirección y sentido dan un producto escalar máximo, pues forman un ángulo $\alpha = 0^o$ y $\cos 0^o = 1$.
- Si teniendo la misma dirección sus sentidos son contrarios, el producto escalar es mínimo, porque forman 180^o y $\cos 180^o = -1$.

1. *El producto escalar de los vectores unitarios principales, toma un valor que es la unidad o cero.* Se determina estos números, aplicando la definición del producto escalar a todas las parejas formadas.

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1; \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1; \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1; \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0; \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = 0\ ; \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

2. *Si dos vectores están expresados en función de sus componentes y de los vectores unitarios principales,* se demuestra fácilmente que el producto escalar se calcula mediante la ecuación.

$$\vec{F} \cdot \vec{r} = \left(F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}\right) \cdot \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = F_x\ x + F_y\ y + F_z\ z$$

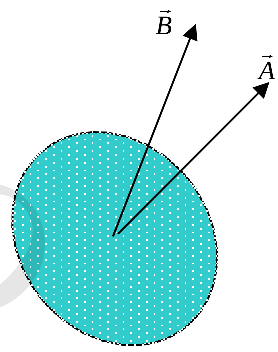


Fig.A.9. Una superficie se representa mediante un vector $\vec{A}$, de dirección perpendicular a la misma y de módulo igual al área de la superficie.

El flujo de un campo vectorial como por ejemplo el campo magnético $\vec{B}$, a través de una superficie $\vec{A}$, es otro ejemplo de aplicación del producto escalar de dos vectores, pues se define como $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A}$

Si el vector $\vec{F}$ es una fuerza y el vector $\vec{r}$ un desplazamiento, entonces el producto escalar representa el trabajo físico. Otro ejemplo es la potencia instantánea, que resulta de multiplicar escalarmente la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre un móvil, por el vector velocidad instantánea $\vec{v}$.

También es un producto escalar el flujo de un campo vectorial a través de una superficie: así el flujo del campo magnético $\vec{B}$ a través de la superficie $\vec{A}$, fig. A.9. el flujo del campo eléctrico o el del campo gravitatorio.

El producto escalar tiene la propiedad distributiva del producto respecto de la suma: $\vec{r}\cdot\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right)=\vec{r}_1\cdot\vec{F}_1+\vec{r}_2\cdot\vec{F}_2$

Producto vectorial de dos vectores

El producto vectorial de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es un nuevo vector $\vec{c}$. La operación se indica de dos maneras, situando un angulito $\wedge$ o un aspa x, entre los dos vectores.

$$\vec{c}=\vec{a}\wedge\vec{b}\ ; \qquad \vec{c}=\vec{a}\ x\ \vec{b}$$

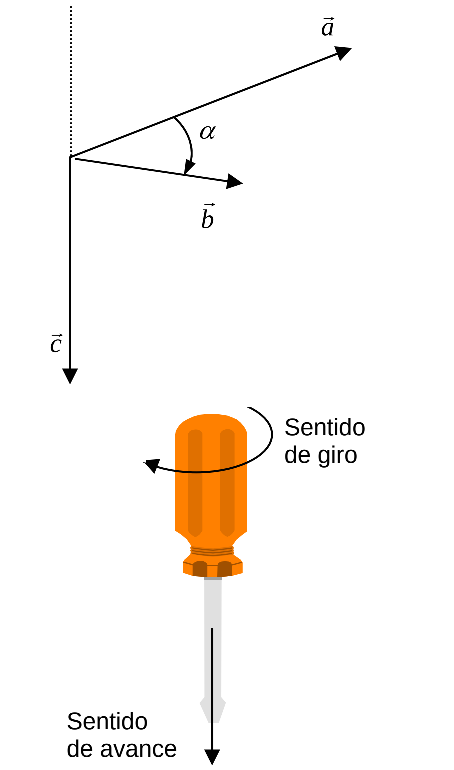


Fig.A.10. El producto vectorial de dos vectores es un nuevo vector perpendicular al plano formado por ellos y cuyo sentido es el de avance de un tornillo que al girar lleve al primero de los vectores, sobre el segundo con el giro más corto.

Al vector $\vec{c}$ por definición, se le asigna una dirección, un sentido y un módulo.

- La dirección es perpendicular al plano formado por los dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. En la fig.A.10. (parte superior) tiene la dirección de la recta perpendicular a este plano.
- El sentido es el de avance de un destornillador que al girar lleve al primer vector $\vec{a}$ sobre el segundo $\vec{b}$, con el giro más corto. En la fig.A.10, el sacacorchos giraría a derechas, con lo que avanzaría hacia abajo.
- El módulo de $\vec{c}$, se determina multiplicando los módulos de los dos vectores por el seno del ángulo que forman.

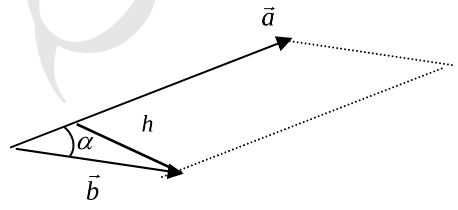
$$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\ sen\ \alpha$$

Observa en la fig.A.11. que el módulo del producto vectorial de dos vectores es igual al valor del área del paralelogramo formado por los dos vectores como lados.

En efecto, $|\vec{b}|\,sen\ \alpha=h$, es la altura del paralelogramo, por lo que el módulo del producto vectorial se puede poner.

$$|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot h$$

Que no es otra cosa que el producto de la base por la altura del paralelogramo cuyos lados valen $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$. Por lo tanto $|\vec{c}|$ es igual a su área.



En la fig.A.11. el segmento h es perpendicular a los dos lados de longitud $|\vec{a}|$ por lo tanto es la altura del paralelogramo.

Propiedades

- El producto vectorial no goza de la propiedad conmutativa.

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{c}\ ; \qquad \vec{b}\wedge\vec{a}=-\vec{c}$$

Al conmutar dos vectores resultan vectores opuestos.

- Propiedad distributiva del producto respeto de la suma.

$$\vec{a}\wedge(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\vec{c}$$

- El producto vectorial de dos vectores de igual dirección es nulo, porque forman 0º ó 180º cuyo seno vale cero. Inversamente, cuando el producto vectorial de dos vectores es nulo, podemos asegurar que los vectores son paralelos.

Producto vectorial de los vectores unitarios

Si se multiplican vectorialmente entre sí, vectores unitarios principales $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, distintos, resulta que por tener de módulo la unidad y formar 90º, se obtiene el otro unitario que falta. Comprueba con la fig.A.12 y la definición de producto vectorial, que se verifica:

$$\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}\ ;\quad \vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}\ ;\quad \vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}\ ;\quad \vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}\ ,\quad \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}\ ;\quad \vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i}$$

$$\vec{i}\wedge\vec{i}=0\ ;\qquad \vec{j}\wedge\vec{j}=0\ ;\qquad \vec{k}\wedge\vec{k}=0$$

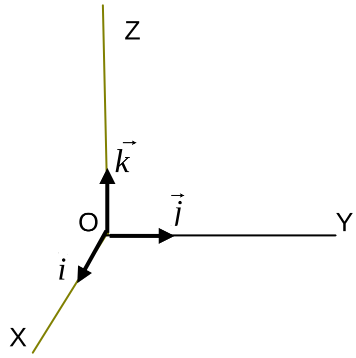


Fig.A.12. Producto vectorial de los tres vectores unitarios principales. Observa como para llevar a $\vec{i}$ sobre $\vec{j}$ con el giro más corto, giras a derechas y obtienes el vector unitario $\vec{k}$, etc.

Determinación del producto vectorial en función de las componentes

Si los vectores vienen expresados en función de sus componentes y de los vectores unitarios principales, el producto vectorial se puede determinar teniendo en cuenta la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y los valores del producto vectorial de los vectores unitarios. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores que se multiplican vectorialmente resulta:

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\wedge\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)$$

Realizando los productos vectoriales se obtiene.

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}$$

Algunas magnitudes que se definen con un producto vectorial de dos vectores son:

- El momento angular o cinético, $\vec{L}=\vec{r}\wedge\vec{p}$, que es el producto vectorial del vector de posición por el momento lineal, $\vec{p}=m.\vec{v}$;

- El momento de una fuerza respecto de un punto, fig.A.13, es el producto vectorial del vector de posición por el vector fuerza, $\vec{M}_o=\vec{r}\wedge\vec{F}$

- En la rotación alrededor de un eje, la velocidad a lo largo de la trayectoria, es el producto vectorial de la velocidad angular $\vec{\omega}$ por el radio vector, se expresa $\vec{v}=\vec{\omega}\wedge\vec{r}$

- La fuerza que actúa sobre una carga eléctrica en movimiento dentro de un campo magnético, $\vec{F}=q\vec{v}\wedge\vec{B}$

- La fuerza sobre un conductor de longitud L, recorrido por una intensidad I, y situado en un campo magnético, $\vec{B}$ tiene de valor, $\vec{F}=I\,\vec{L}\wedge\vec{B}$.
- El momento sobre una espira de área $\vec{S}$ recorrida por una corriente I y situada en un campo magnético $\vec{B}$, tiene de valor, $\vec{M}=I\,\vec{S}\wedge\vec{B}$

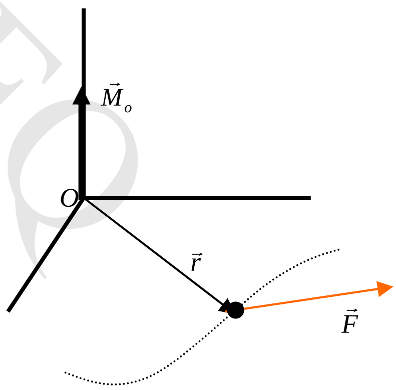


Fig. A.13. Momento de una fuerza respecto de un punto.

Producto mixto

Se llama producto mixto, al producto de tres vectores que combina los productos, vectorial y escalar.

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \cdot \vec{d}$$

El resultado del producto mixto es un número, obtenido del modo siguiente. Se efectúa primero el producto vectorial de $\vec{a}$ y de $\vec{b}$, que proporciona un nuevo vector, $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$, para después realizar el producto escalar $\vec{c} \cdot \vec{d}$ cuyo resultado es un valor numérico. En definitiva:

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \cdot \vec{d} = \vec{c} \cdot \vec{d} \;=\; \textit{un número}$$

En el texto, lo utilizaremos únicamente para calcular la fuerza electromotriz inducida $\mathcal{E}$, producida por el movimiento de un conductor en el seno de un campo magnético $\vec{B}$. Si el conductor de longitud $\vec{L}$ se desplaza con velocidad $\vec{v}_c$ en el seno de un campo magnético, entonces la fuerza electromotriz inducida vale.

$$\varepsilon = \left(\vec{v}_c \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{L}$$

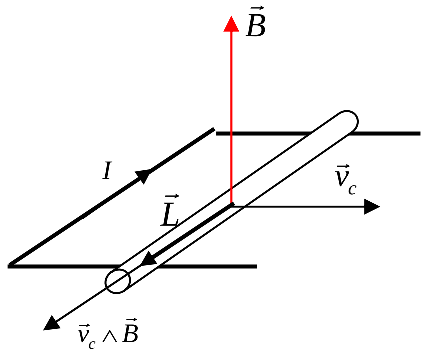


Fig.A.14. Producto mixto de tres vectores.
Observa en la figura que primero hemos realizado el producto vectorial de dos vectores. Después el vector que ha resultado se ha multiplicado escalarmente por el tercero.

Observa los vectores en la fig.A.14. El vector $\vec{L}$ tiene la dirección del conductor, y al campo magnético $\vec{B}$ lo hemos situado perpendicular al conductor y al vector velocidad $\vec{v}_c$. El vector que resulta del producto vectorial de $\vec{v}_c \wedge \vec{B}$, tiene de módulo.

$$\left|\vec{v}_c \wedge \vec{B}\right| = \left|\vec{v}_c\right|\left|\vec{B}\right| \, sen\, \alpha = \left|\vec{v}_c\right|\left|\vec{B}\right| \, sen\, 90^o = \left|\vec{v}_c\right|\left|\vec{B}\right|$$

La dirección de este vector está sobre la de la barra conductora, en el mismo sentido de $\vec{L}$, de modo que forma con éste un ángulo de 0^o. En consecuencia el producto escalar de estos dos vectores $\left(\vec{v}_c \wedge \vec{B}\right)$ y $\vec{L}$ vale:

$$\left(\vec{v}_c \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{L} = \left|\vec{v}_c \wedge \vec{B}\right| \left|\vec{L}\right| \cos 0^o = \left|\vec{v}_c \wedge \vec{B}\right| \left|\vec{L}\right| = \left|\vec{v}_c\right|\left|\vec{B}\right|\left|\vec{L}\right|$$

Función vectorial

Consideremos una variable escalar como puede ser el tiempo t y hagamos corresponder a cada valor del mismo, un valor bien determinado de un vector $\vec{r}$. Definimos así la función vectorial $\vec{r}(t)$ como aquella que proporciona un vector distinto, en cada instante de tiempo considerado.

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

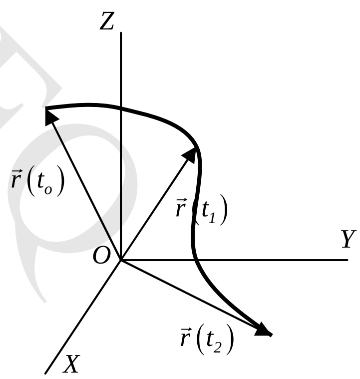


Fig.A.15. La línea que describe el extremo del vector $\vec{r}(t)$ se llama trayetoria.

Si todos los vectores tienen el mismo origen en un punto fijo O, sus extremos describen una curva llamada trayectoria, fig.A.15. En un sistema de coordenadas cartesiano la función vectorial se expresa en función de sus componentes y de los vectores unitarios principales.

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

La derivada de una función vectorial

Consideremos un valor fijo de t, y una variación alrededor del mismo Δt de esta variable. La variación que sufre la función vectorial es $\Delta\vec{r}$, fig. A.16, sin embargo, si establecemos el cociente incremental resulta, $\Delta\vec{r}/\Delta t$

Si se calcula el límite del cociente incremental cuando el intervalo Δt tiende a cero, entonces si existe un vector límite, se llama derivada de $\vec{r}(t)$ respecto de t.

$$lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

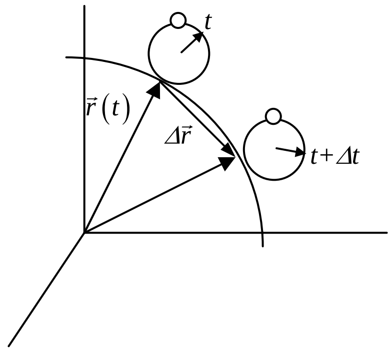


Fig.A.16. $\Delta\vec{r}$ es la variación que sufre la función vectorial $\vec{r}(t)$ en un intervalo de la variable Δt.

Geométricamente, la derivada de la función vectorial, $d\vec{r}/dt$ en un instante t, es un vector tangente a la trayectoria, fig.A.17.

Si el vector $\vec{r}$ viene expresado por sus componentes cartesianas, *entonces las componentes del vector derivada, son las derivadas de las componentes del vector dado.*

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\,x(t)}{dt}\vec{i}+\frac{d\,y(t)}{dt}\vec{j}+\frac{d\,z(t)}{dt}\vec{k}$$

Algunos ejemplos de aplicación de la derivada:

- La velocidad $\vec{v}=d\vec{r}/dt$
- La aceleración $\vec{a}=d\vec{v}/dt$
- La fuerza, como derivada del momento lineal respecto del tiempo $\vec{F}=d\vec{p}/dt$
- El momento de una fuerza, como derivada del momento angular respecto del tiempo $\vec{M}=d\vec{L}/dt$
- La velocidad areolar, como la derivada del área barrida por el radio vector respecto del tiempo, $\vec{V}_A=d\vec{A}/dt$
- La fuerza electromotriz inducida, como derivada del flujo magnético (función escalar), respecto del tiempo $\varepsilon=-d\Phi_m/dt$
- La actividad de una muestra radiactiva como derivada del número de partículas (función escalar) respecto del tiempo $A=-dN/dt$

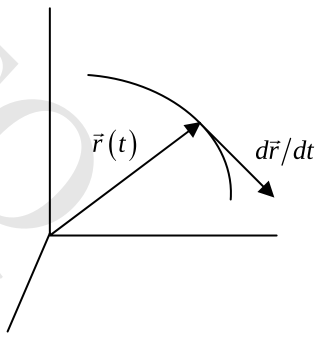


Fig.A.17. El vector $d\vec{r}/dt$ es tangente a la trayectoria.

Ejemplo

Dada la función vectorial $\vec{r}=3t^2\,\vec{i}-4t\,\vec{j}+6\,\vec{k}$ determinar su función derivada y el valor de la derivada cuando *t = 2.*

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}3t^2\,\vec{i}+\frac{d}{dt}(-4t)\,\vec{j}+\frac{d}{dt}6\,\vec{k}=6t\,\vec{i}-4\,\vec{j}$$

Cuando *t = 2 ;* $\qquad \frac{d\vec{r}}{dt}=6\cdot\,2\vec{i}-4\,\vec{j}=12\vec{i}-4\,\vec{j}$

Operaciones con las derivadas de las funciones vectoriales

- La derivada de un vector cuyas componentes son constantes, es nula.

- La derivada de una suma de funciones vectoriales, es la suma de las derivadas de cada una de las funciones.

$$\vec{r}(t)=\vec{u}(t)+\vec{v}(t)$$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\frac{d\vec{u}(t)}{dt}+\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

- Derivada del producto escalar de dos funciones vectoriales $\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)\right]=\frac{d\,\vec{u}(t)}{dt}\cdot\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\cdot\frac{d\,\vec{v}(t)}{dt}$$

- Derivada del producto vectorial de dos funciones vectoriales $\vec{u}(t)\wedge\vec{v}(t)$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{u}(t)\wedge\vec{v}(t)\right]=\frac{d\,\vec{u}(t)}{dt}\wedge\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\wedge\frac{d\,\vec{v}(t)}{dt}$$

Aplicaciones

- La potencia instantánea como derivada del trabajo respecto del tiempo:

$$P=\frac{dW}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\vec{F}\cdot\vec{r}\right)=\frac{d\vec{F}}{dt}\cdot\vec{r}+\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{F}}{dt}\cdot\vec{r}+\vec{F}\cdot\vec{v}$$

En el caso de que la $\vec{F}$ aplicada sea constante, su derivada es nula y resulta para la potencia la ecuación, $P=\vec{F}\cdot\vec{v}$

- La derivada del momento angular respecto del tiempo que es el momento de una fuerza:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\vec{r}\wedge m\vec{v}\right]=\frac{d\vec{r}}{dt}\wedge m\vec{v}+\vec{r}\wedge\frac{d(m\vec{v})}{dt}=\vec{v}\wedge m\vec{v}+\vec{r}\wedge\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{r}\wedge\vec{F}=\vec{M}$$

El producto vectorial $\vec{v}\wedge m\vec{v}=0$; por tener estos dos vectores la misma dirección.

Integración de una función vectorial

Si tenemos dos funciones vectoriales que designamos respectivamente por $\vec{v}(t)$ y $\vec{r}(t)$ tal que verifican, que la derivada $\frac{d\,\vec{r}(t)}{dt}=\vec{v}(t)$. Diremos entonces que $\vec{r}(t)$ es la función primitiva de $\vec{v}(t)$.

La integración de una función vectorial, consiste en buscar la función primitiva de la función vectorial integrando $\vec{v}(t)$ y requiere la integración de cada una de sus componentes. En efecto:

$$\int \vec{v}(t)\,dt = \int v_x(t)\,dt\,\vec{i} + \int v_y(t)\,dt\,\vec{j} + \int v_z(t)\,dt\,\vec{k}$$

Cada uno de los tres integrandos, se integra igual que cualquier función escalar, a la que hay únicamente hay que acompañar del correspondiente vector unitario.

Se presentan dos casos de integración:

a) La integral indefinida. Entonces a la función primitiva hay que añadirle una constante de integración.

$$\int \vec{v}(t)\,dt = \vec{r}(t) + C$$

La constante C se determina conociendo los valores iniciales que toma la función $\vec{r}(t)$, para un valor particular de $t = t_o$

b) La integral es definida. En este caso está comprendida entre dos límites llamados límite inferior t_1 y límite superior t_2.

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\,dt = \left[\vec{r}(t)\right]_{t_1}^{t_2} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

Ejemplo

Calcula la integral de la función vectorial $\vec{v} = 3t\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 4t^2\,\vec{k}$ *. Sabiendo que se trata de la velocidad de un móvil, que se encuentra en la posición* $\vec{r}(0) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ *cuando* $t = 0$.

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)\,dt = \int 3t\,dt\,\vec{i} - \int 2\,dt\,\vec{j} + \int 4t^2\,dt\,\vec{k} = \frac{3}{2}t^2\,\vec{i} - 2t\,\vec{j} + \frac{4}{3}t^3\,\vec{j} + C$$

Para hallar C sustituimos $\vec{r}(t)$ por $\vec{r}(0)$ y hacemos $t = 0$

$$\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = 0 + C$$

Llevando el valor de C y sumando las componentes de los mismos vectores unitarios

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{3}{2}t^2 + 1\right)\vec{i} + (-2t + 1)\,\vec{j} + \left(\frac{4}{3}t^3 + 1\right)\vec{k}$$

Empleando la integral definida resultaría:

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(0) = \int_0^t \vec{v}(t)\,dt = \int_0^t 3t\,dt\,\vec{i} - \int_0^t 2dt\,\vec{j} + \int_0^t 4t^2\,dt\,\vec{k}$$

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(0) = \frac{3}{2}t^2\,\vec{i} - 2t\,\vec{j} + \frac{4}{3}t^3\,\vec{k}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \frac{3}{2}t^2\,\vec{i} - 2t\,\vec{j} + \frac{4}{3}t^3\,\vec{j} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} + \frac{3}{2}t^2\,\vec{i} - 2t\,\vec{j} + \frac{4}{3}t^3\,\vec{j}$$

$$\vec{t}(t) = \left(1 + \frac{3}{2}t^2\right)\vec{i} + (1 - 2t)\,\vec{j} + \left(1 + \frac{4}{3}t^3\right)\vec{j}$$

Campo escalar

Si una propiedad física que podemos medir mediante una magnitud escalar, se encuentra definida en cada punto de una región y además existe una función V, que asigna en cada punto, el valor de la propiedad física allí medida, diremos que en la región existe un campo escalar. La función V que dependerá en general de las coordenadas del punto, $V = f(x,y,z)$.

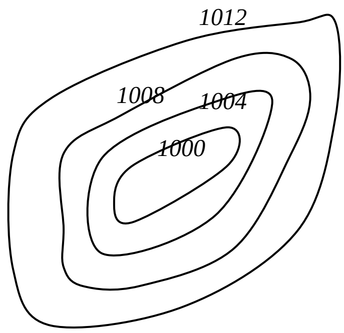


Fig.A.18. Conjunto de puntos que tienen igual presión en milibares, (mbar). Son las líneas isobaras empleadas en los mapas para la predicción del tiempo. El conjunto de las presiones de una región constituye un campo escalar.

Son ejemplos de campos escalares, el conjunto de temperaturas o de presiones de una región, ya que en cada instante y en cada punto, toman un valor y solo uno.

Superficie equiescalar. Existen distintos puntos en los que la función escalar toma valores iguales. El lugar geométrico de esos puntos es una *superficie equiescalar o isoescalar,* siendo su ecuación de la forma *V (x,y,z) = cte.* Si se corta la superficie por un plano, tenemos las líneas equiescalares o isolíneas, lugar geométrico de los puntos de un plano en los que la función escalar vale lo mismo. Su ecuación es *V (x,y) = cte.* fig.A.18.

Campo vectorial

Si en cada punto de una región existe una propiedad física medible, que para su correcta determinación necesita de un valor numérico, de una dirección y de un sentido, y además, existe una función vectorial que a cada punto le asigna un vector, que coincide con el de la propiedad física medida, diremos entonces que en la región existe un *campo vectorial* $\vec{A}$.

Cada una de las componentes del vector $\vec{A}$, es a su vez función del punto del espacio, fig.A.19. Como ejemplos podemos citar: el conjunto de las velocidades de todas las partículas del viento, el campo gravitatorio terrestre, el campo electrostático, el campo magnético, etc.

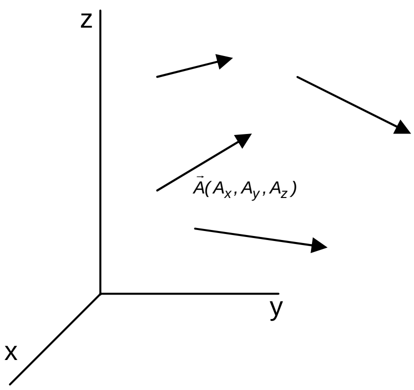


Fig.A.19. En un campo vectorial en general, el vector campo es distinto en cada punto de la región.

Circulación de un vector a lo largo de una línea

Si en una región del espacio en la que cada punto está definido un campo vectorial $\vec{A}$, tomamos una trayectoria a lo largo de una línea, que lleva desde un punto *M* hasta otro *N.* Se define la circulación del vector $\vec{A}$ entre estos dos puntos, como el valor de la integral a lo largo de esta línea, del producto escalar del campo $\vec{A}$ por la diferencial del camino $d\vec{r}$, fig.A.20. Donde limitándonos al plano, éste vector es $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$.

$$C_{M\rightarrow N} = \int_M^N \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{x_M}^{x_N} A_x dx + \int_{y_M}^{y_N} A_y\, dy$$

Ejemplos de circulación son el trabajo, el potencial gravitatorio y el eléctrico.

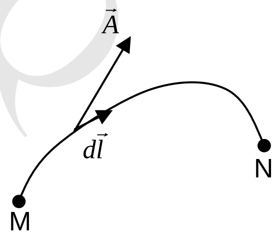


Fig.A.20. Para calcular la circulación de un vector $\vec{A}$ entre dos puntos, a lo largo de una línea, hay que llevarlo por ella desde el primer punto *M,* hasta el segundo *N.*

Ejemplo: *Un vector* $\vec{A} = 3xy\,\vec{i} - 4y^2\,\vec{j}$ *; se desplaza a lo largo de la curva* $y = x^2$ *desde M(0,0) hasta el N(2,4). Determina la circulación del vector entre esos puntos.*

$$C_{M\rightarrow N} = \int_M^N \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{(0,0)}^{(2,4)} (3xy\vec{i} - 4y^2\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) =$$

$$= \int_0^2 3xy \quad dx \quad + \quad \int_0^4 -4y^2 dy$$

Para resolver la primera integral, donde también está *y (*cuando la variable es *x),* hay que relacionarla usando la ecuación de la curva $y = x^2$ por la que circula.

$$C_{M\rightarrow N} = \int_0^2 3x \cdot x^2\, dx - \int_0^4 4y^2 dy = \frac{3}{4}\left[x^4\right]_0^2 - \frac{4}{3}\left[y^3\right]_0^4 = \frac{3}{4}2^4 - \frac{4}{3}4^3 = \frac{-880}{12}$$

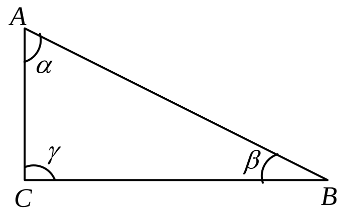
Apéndice 2. Tabla de derivadas y de integrales inmediatas

Función	***Derivada***
$y = a\,f(x)$	$y´ = a\,f´(x)$
$y = f(x) + g(x)$	$y´ = f´/x) + g´(x)$
$y = = f(x) \cdot g(x)$	$y´ = f´/x)\cdot g(x) + g´(x)\cdot f(x)$
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$y´ = \frac{f´(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g´(x)}{g^2(x)}$
$y = f(v)$ con $v = f(x)$	$y´ = \frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$
$y = x^n$	$y´ = n\,x^{n-1}$
$y = \frac{1}{x}$	$y´ = \frac{-1}{x^2}$
$y = \ln x$	$y´ = \frac{1}{x}$
$y = \sqrt{x}$	$y´ = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = a^x$	$y´ = a^x \ln a$
$y = e^x$	$y´ = e^x$
$y = \operatorname{sen} x$	$y´ = \cos x$
$y = \cos x$	$y´ = - \operatorname{sen} x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y´ = \frac{1}{\cos^2 x}$

Integral
$\int a\cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ a = constante
$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ con $n \neq -1$
$\int \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x}$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x$
$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$
$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$
$\int e^x\,dx = e^x$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$

Apéndice 3. Ecuaciones de la trigonometría

- **Resolución de un triángulo rectángulo**



Por definición:

$$sen = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}\ ;\quad cos = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}\ ;\quad tag = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

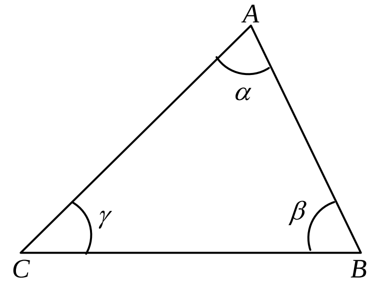
$$sen\,\alpha = \frac{CB}{AB}\ \textbf{;}\quad cos\,\alpha = \frac{AC}{AB}\ ;\quad tg\,\alpha = \frac{CB}{AC}\ ;\quad sen\,\beta = \frac{AC}{AB}\ ;\quad cos\,\beta = \frac{CB}{AB}\ ;\quad tg\,\beta = \frac{AC}{AB}$$

Cateto adyacente = hipotenusa por coseno del ángulo que forman: $\overline{CB} = \overline{AB}\cos\beta$

Cateto opuesto = hipotenusa por seno del ángulo opuesto: $\overline{CA} = \overline{AB}\ sen\,\beta$

$\alpha + \beta + \gamma = 180 = \pi$ *rad ;* $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$

- **Resolución de un triángulo cualquiera**

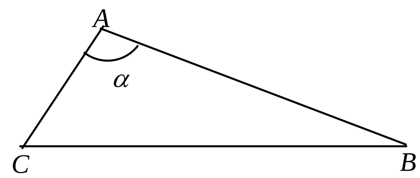


Cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido, se puede usar la ley de los cosenos para calcular el otro lado opuesto.

Si el ángulo α es agudo: $\overline{CB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,\overline{AC}\cdot\overline{AB}\cos\alpha$

Si el ángulo α es obtuso: $\overline{CB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + 2\,\overline{AC}\cdot\overline{AB}\cos\alpha$

Ley de los senos: $\dfrac{\overline{CB}}{sen\,\alpha} = \dfrac{\overline{AC}}{sen\,\beta} = \dfrac{\overline{AB}}{sen\,\gamma}$



- **Relaciones trigonométricas de interés general**

$sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$; $tg\,\alpha = sen\,\alpha / cos\,\alpha$

$sen\,(-\alpha) = -\,sen\,\alpha$ $\quad cos\,(-\alpha) = cos\,\alpha$ $\quad tg\,(-\alpha) = -\,tg\,\alpha$

$sen\,\alpha = cos\,(\alpha - 90º)$; $\quad cos\,\alpha = -\,sen\,(\alpha - 90º)$

$sen\,(90º - \alpha) = cos\,\alpha$; $\quad cos(90º - \alpha) = sen\,\alpha$; $\quad tg(90º - \alpha) = ctg\,\alpha$

$sen\,(180º - \alpha) = sen\,\alpha$; $\quad cos(180º - \alpha) = -\,cos\,\alpha$; $\quad tg(180º - \alpha) = -tg\,\alpha$

$sen\,(90º + \alpha) = cos\,\alpha$; $\quad cos(90º + \alpha) = -\,sen\,\alpha$

$sen\,(180º + \alpha) = sen\,(-\alpha) = -\,sen\,\alpha$; $\quad cos\,(180º + \alpha) = -\,cos\,\alpha$

180º = π rad

$$\mathbf{90º = \frac{\pi}{2}\,rad}$$

$sen(\alpha \pm \beta) = sen\,\alpha\ cos\,\beta \pm cos\,\alpha\ sen\,\beta$; $\quad cos(\alpha \pm \beta) = cos\,\alpha\ cos\,\beta \mp sen\,\alpha\ sen\,\beta$

$sen\,2\alpha = 2\,sen\,\alpha\cdot cos\,\alpha$; $\quad cos\,2\alpha = cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha$

$sen\,\alpha/2 = \sqrt{(1 - cos\,\alpha)/2}$ **;** $\quad cos\,\alpha/2 = \sqrt{(1 + cos\,\alpha)/2}$

$$sen\,\alpha + sen\,\beta = 2\,sen\,\frac{(\alpha+\beta)}{2}\cdot cos\,\frac{(\alpha-\beta)}{2}\ ;\quad cos\,\alpha + cos\,\beta = 2\,cos\,\frac{(\alpha+\beta)}{2}\cdot cos\,\frac{(\alpha-\beta)}{2}$$