

Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

La ecuación matemática que relaciona la carga que existe en el interior de una superficie cerrada y el flujo que la atraviesa, es el teorema de Gauss y constituye la *primera ecuación de Maxwell* y su expresión matemática es:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q}{\epsilon_0} \quad (1)$$

Si dentro de la superficie cerrada no existen cargas eléctricas el flujo eléctrico es nulo, pero habiendo cargas de diferente signo también puede ser nulo si el sumatorio de las cargas es cero.

Una interpretación de la ecuación anterior es que las cargas eléctricas pueden existir libremente y además las líneas de fuerza del campo eléctrico no son líneas cerradas, sino que nacen en las cargas de signo positivo y finalizan en las cargas de signo negativo.

El flujo magnético que atraviesa una superficie cerrada siempre es nulo

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2)$$

La interpretación de dicha ecuación conduce a que no existen cargas magnéticas aisladas, no existe un polo norte separado de un polo sur. Las líneas de fuerza del campo magnético son líneas cerradas. Esta expresión constituye la llamada *segunda ecuación de Maxwell*.

La *tercera ecuación de Maxwell* es:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3)$$

La ecuación (3) tiene su fundamento en el hecho experimental, conocido como inducción magnética, y consiste en la posibilidad de crear una corriente eléctrica en una espira siempre que el flujo magnético que la atraviese varíe con el tiempo. Dado que el flujo magnético está dado por la expresión

$$d\Phi_M = B * dS * \cos\theta$$

Existen como mínimo tres posibilidades de crear la corriente eléctrica en una espira: a) haciendo variar B con el tiempo, haciendo variar la superficie de la espira, o cambiando el ángulo que forma el plano de la espira con el campo magnético.

Si nos fijamos en la ecuación (3) la integral del segundo miembro es el flujo magnético que atraviesa una superficie, que en el caso general puede ser real como una espira o una superficie cualquiera situada en el seno del campo magnético, y todo el segundo miembro nos dice que la variación del flujo con el tiempo cambiado de signo, por eso aparece d/dt, es igual a la circulación del campo eléctrico a lo largo de la línea que abarca la superficie.

La cuarta ecuación de Maxwell surge de una idea que abunda en la mente de los físicos y es la simetría. La tercera ecuación de Maxwell surge del hecho experimental de que un campo magnético variable engendra un campo eléctrico, una hipótesis atractiva es suponer que el fenómeno simétrico pueda existir, esto es, que un campo eléctrico variable engendre un campo magnético.

Vamos a explotar esta idea con un ejemplo concreto de campo eléctrico variable.

Supongamos que tenemos el circuito de la figura 1 que consiste en una batería, un interruptor, una resistencia y un condensador plano formado por dos armaduras circulares A y B. Inicialmente el condensador está descargado y el interruptor abierto.

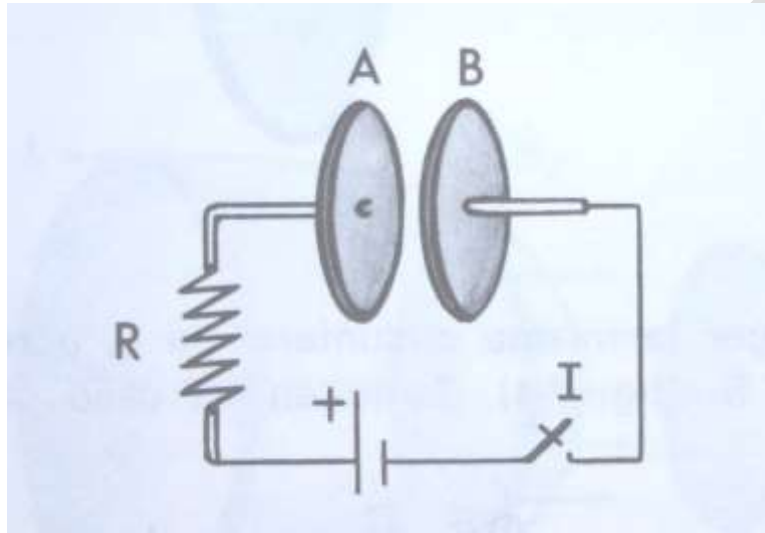


Fig. 1

Si se cierra el interruptor se produce una corriente transitoria de modo que las placas del condensador se van cargando, una con signo positivo, la otra con negativo. Durante ese tiempo el campo eléctrico en el interior del condensador, entre las placas A y B, es **variable**, comienza valiendo cero y aumenta su valor mientras dura la corriente transitoria.

Cuando por un hilo conductor circula una corriente eléctrica en sus alrededores aparece un campo magnético. Existe un teorema que nos permite relacionar la intensidad de la corriente con el campo magnético creado por ella, se conoce con el nombre de teorema de Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \Sigma I$$

cuyo significado es que la circulación de \vec{B} a lo largo de una línea cerrada es igual a la suma de las corrientes eléctricas abarcadas por esa línea. En la figura 2, escogemos como línea de circulación una circunferencia por cuyo centro pasa un cable que porta una corriente de intensidad I. En este caso la circunferencia abarca una superficie S_1 que es la correspondiente al círculo.

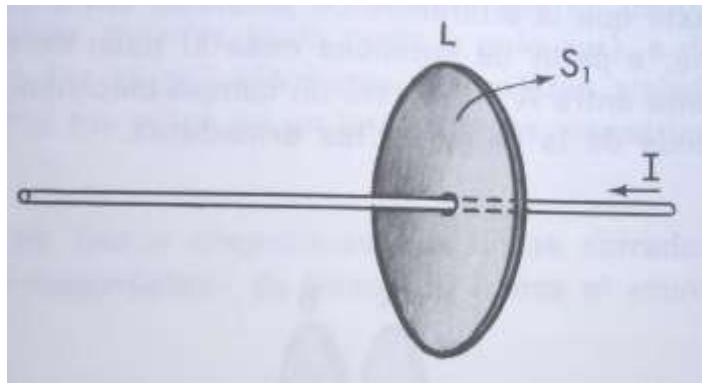


Fig.2

En lugar de la circunferencia es posible escoger una superficie en forma de copa S_2 (fig.3)

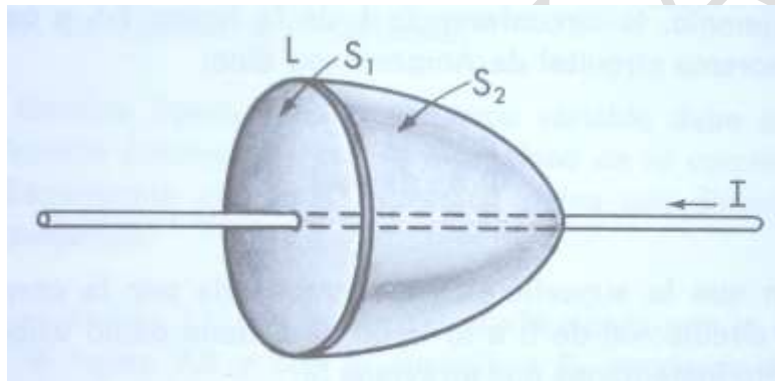


Fig.3

En ambos casos la línea de circulación es la misma, esto es, una circunferencia. Ambas superficies están abarcadas por la misma corriente y por ello la circulación de \vec{B} es la misma para los dos casos. El teorema de Ampère no nos impone ninguna limitación a la forma de la superficie que puede ser plana (como S_1) o de cualquier forma (como S_2).

Visto esto volvemos al circuito de la figura 1 en el que el condensador está cargándose y por tanto entre sus placas existe un campo eléctrico variable.

En un determinado instante la corriente que circula es I y vamos a aplicar el teorema de Ampère, eligiendo como línea de circulación la circunferencia L (ver fig. 4), en un caso abarcando la superficie plana S_1 y en un segundo caso la superficie curva S_2 .

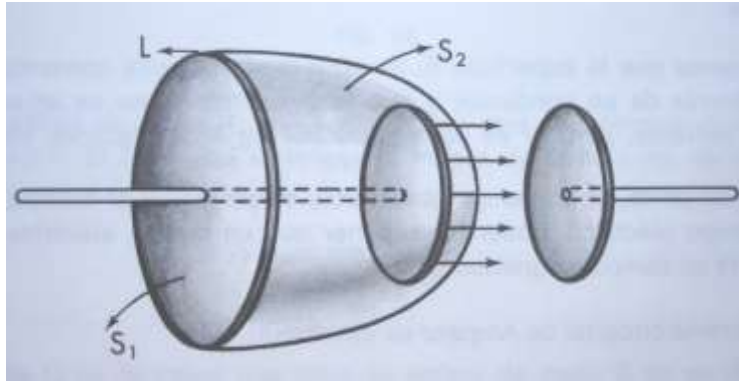


Fig. 4

Para la superficie plana, S_1

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

Para la superficie curva, S_2

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

Ambos resultados son incompatibles entre sí. Caben ahora dos posibilidades, una limitar la ley de Ampère a corrientes constantes donde tiene validez y, por tanto, establecer que no se puede aplicar a situaciones donde la corriente es transitoria, otra, es tratar de ampliar la citada ley para que tenga validez en ambas situaciones. La Física por medio de Maxwell, ha seguido esta última alternativa.

La idea central supone que si la superficie S_1 es atravesada por una corriente eléctrica a través de un conductor, la superficie S_2 es atravesada por un flujo eléctrico variable. El teorema circuital de Ampère se escribe ahora así

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (I + \text{un término ligado a un flujo eléctrico variable}) \quad (4)$$

La ecuación (4) exige a) que el término ligado al flujo eléctrico variable tenga las dimensiones de una intensidad de corriente b) que aplicada a la superficie S_1 y a la S_2 conduzca al mismo resultado

La condición a) se puede entender con el siguiente ejemplo. En la figura 5 la esfera de radio R está recibiendo de forma constante carga eléctrica, esto significa, que su carga es dependiente de la variable tiempo, La esfera que la rodea de radio r , $r > R$, está atravesada por un flujo eléctrico variable

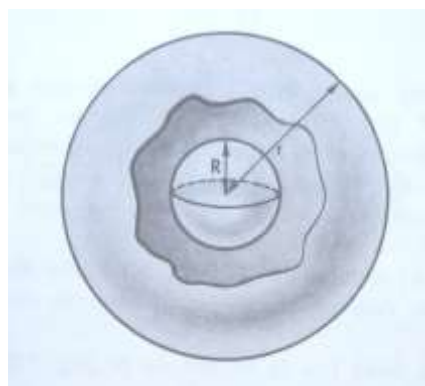


Fig. 5

$$\Phi_E(t) = \frac{Q(t)}{\epsilon_0}$$

De la expresión anterior se deduce que

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dQ}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$\frac{dQ}{dt}$, representa la corriente que fluye hacia la esfera de radio R, por tanto, el término $\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ es dimensionalmente homogéneo con la intensidad de corriente.

En principio podemos escribir el teorema circuital de Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) \quad (5)$$

Si aplicamos la ecuación (5) a la superficie S_1 resulta que $\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = 0$, ya que esa superficie no es atravesada por un flujo eléctrico variable, y el resultado es

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \quad (6)$$

Si ahora tomamos la misma línea de circulación L y la superficie S_2 , entonces $I=0$, ya que S_2 no es atravesada por la corriente eléctrica. S_2 está atravesada por un flujo eléctrico variable por la parte que está dentro de las armaduras del condensador (fig.6)

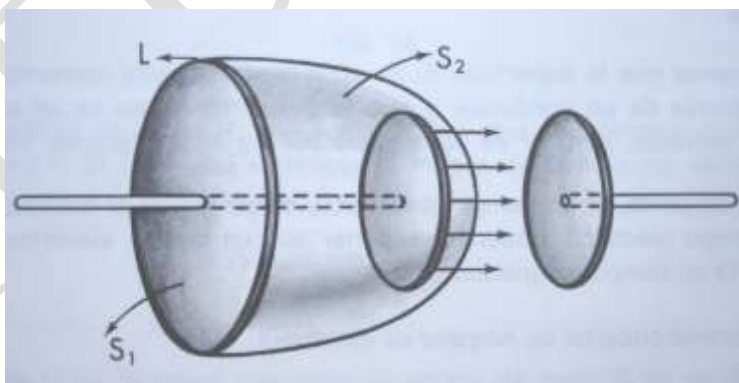


Fig.6

Para calcular ese flujo eléctrico variable supongamos una superficie cerrada S_G (ver fig. 7), la cual tiene en común con S_2 la parte que recibe un flujo eléctrico variable dentro del condensador , pero además engloba la placa A del condensador.

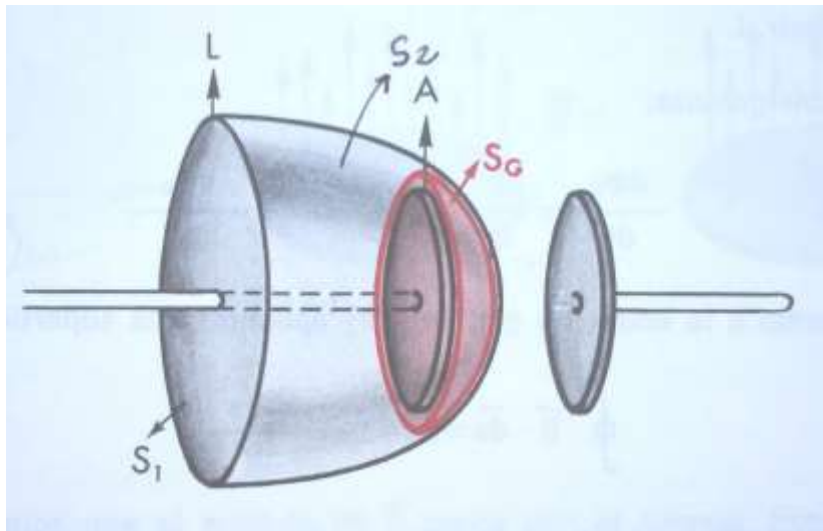


Fig.7

El flujo que atraviesa S_G es el mismo que S_2 . Al ser S_G una superficie cerrada podemos aplicarle el teorema de Gauss

$$\Phi_E (\text{a través de } S_G) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Siendo q la carga eléctrica que en ese instante posee la armadura A del condensador. Teniendo en cuenta que q varía con el tiempo

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dq}{dt}$$

$\frac{dq}{dt}$, representa la variación que experimenta la carga de la armadura por unidad de tiempo y es precisamente la intensidad de la corriente que circula por el circuito en ese instante

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} I \quad \Rightarrow \quad I = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (7)$$

Volviendo a la ecuación (5) y sustituyendo en ella (7) resulta:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) = \mu_0 (0 + I) = \mu_0 I \quad (8)$$

Si comparamos (6) con (8) vemos que el resultado es igual, esto es, la ecuación (5) es dimensionalmente homogénea y conduce a los mismos resultados para la superficie S_1 y S_2 .

Lo importante de la ecuación (5) (cuarta ecuación de Maxwell) no está en resolver la paradoja que surge con el teorema de Ampère, sino en la aplicación y predicción de las ondas electromagnéticas.

Ondas electromagnéticas planas

A partir de ahora, y por las dificultades matemáticas que conlleva, nos vamos a limitar a ondas planas cuyas ecuaciones se pueden representar mediante la función seno o coseno, expresiones análogas a las que se estudian en las ondas mecánicas.

Se demostrará que si un campo eléctrico está representado por una ecuación como

$$\vec{E} = E_0 \text{sen} \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) \vec{j} \Rightarrow E_y = E_0 \text{sen} \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (9)$$

y un campo magnético por

$$\vec{B} = B_0 \text{sen} \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) \vec{k} \Rightarrow B_z = B_0 \text{sen} \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (10)$$

Ambas ecuaciones son compatibles con las cuatro ecuaciones de Maxwell.

Observe que ambas ecuaciones dependen de dos variables de t y x , v representa la velocidad de propagación.

La figura 8 representa a \vec{B} y \vec{E} en distintos planos a lo largo del eje X.

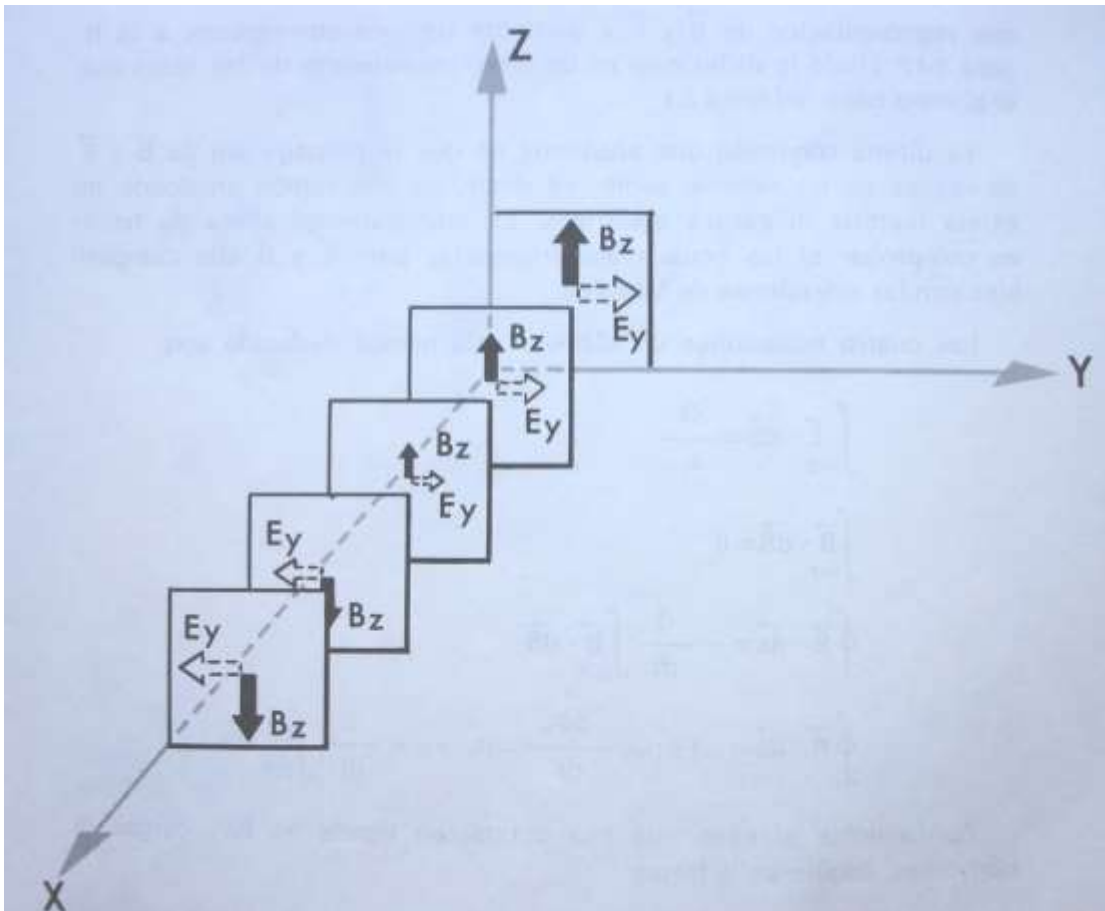
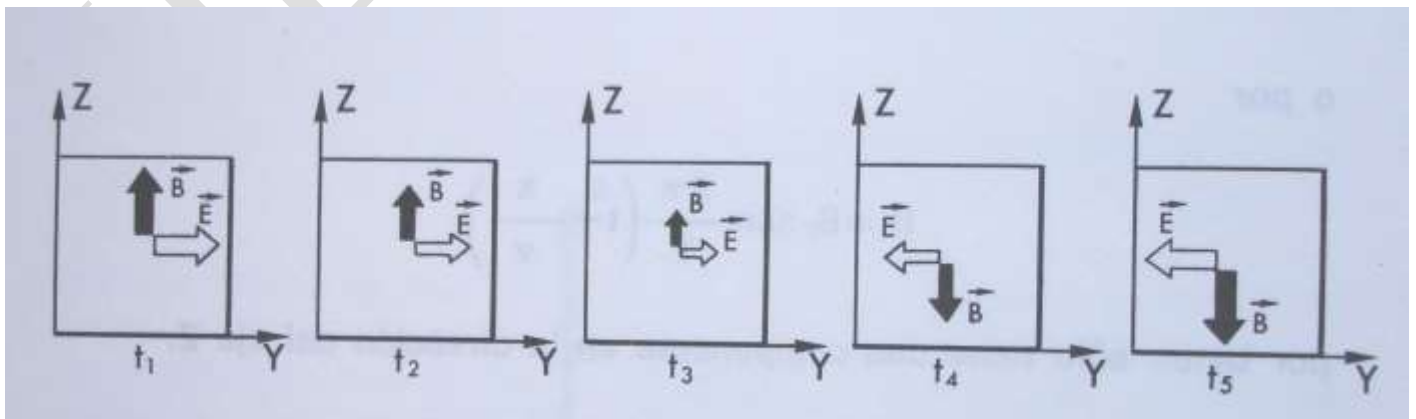


Fig. 8

Debemos tener presente que los valores de E_Y y de B_Z son los mismos en todos los puntos de un mismo plano y además que como E_Y y B_Z dependen de la variable tiempo, la figura 8 es una imagen en un determinado instante, posteriormente, en cualquiera de los planos, los módulos de los vectores cambian. Por ejemplo si escogemos el plano $X=0$, las variaciones con el tiempo de E_Y y B_Z están representadas en la figura 9



Finalmente añadimos que tanto el campo eléctrico como el magnético se propagan en el vacío, una región, del espacio donde no existe ni cargas eléctricas ni materia.

Vamos ahora a comprobar que dichas ecuaciones de ondas satisfacen las ecuaciones de Maxwell y deducir cuál es la velocidad de propagación de esos campos.

Las cuatro ecuaciones de Maxwell adquirirían la forma siguiente, teniendo presente que no hay cargas eléctricas, ni corrientes eléctricas

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad ; \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad ; \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad ; \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Las dos primeras ecuaciones se satisfacen de inmediato puesto que al considerar una superficie cerrada en el espacio donde no hay cargas, el flujo eléctrico y el magnético son nulos.

Para aplicar la tercera ecuación de Maxwell consideramos una superficie ABCD (siendo Δx y Δy muy pequeños) en el plano XY (fig. 10)

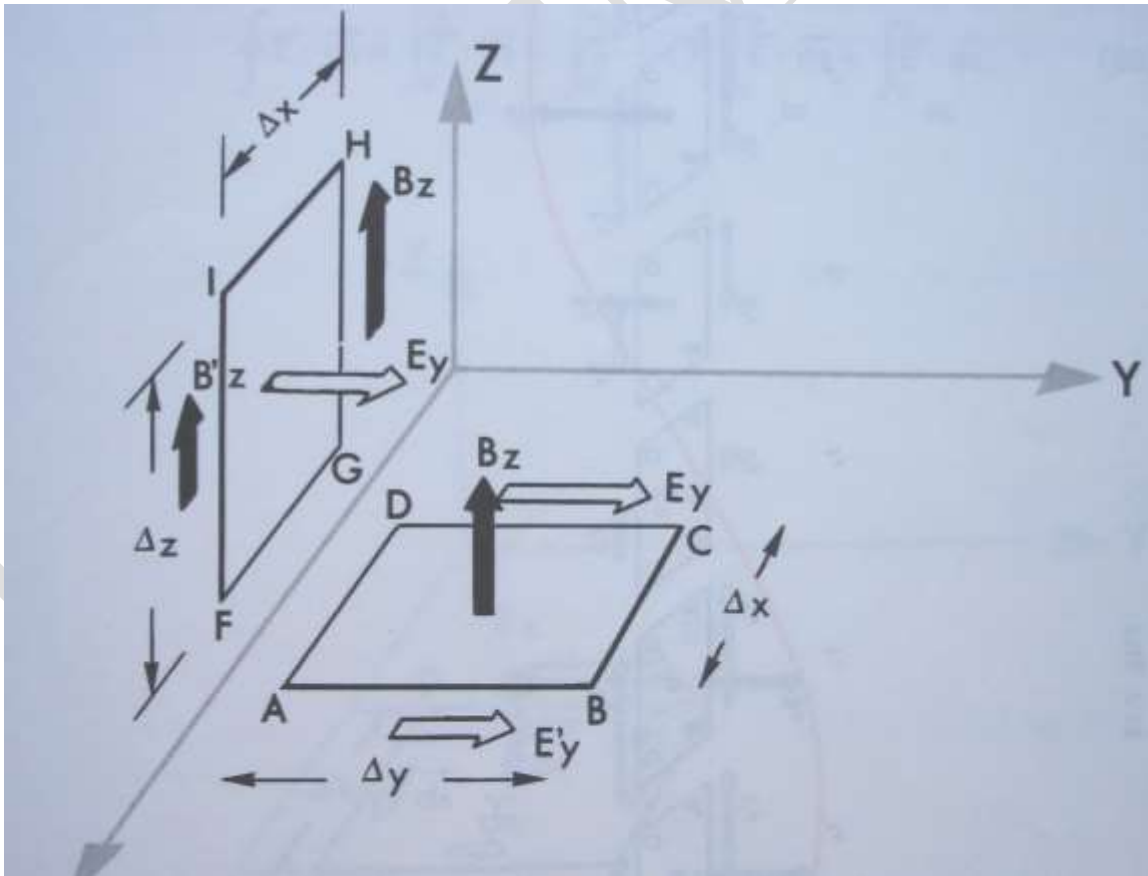


Fig. 10

En un instante determinado el campo magnético es B_z , el campo eléctrico en el lado DC es E_y y en el lado AB E'_y , $E_y \neq E'_y$ ya que el valor del campo \vec{E} depende de la variable x . Insistimos en que tanto \vec{B} como \vec{E} son dependientes del tiempo. En la figura 11 se representa cómo variarán los valores de los campos en el rectángulo ABCD al transcurrir el tiempo

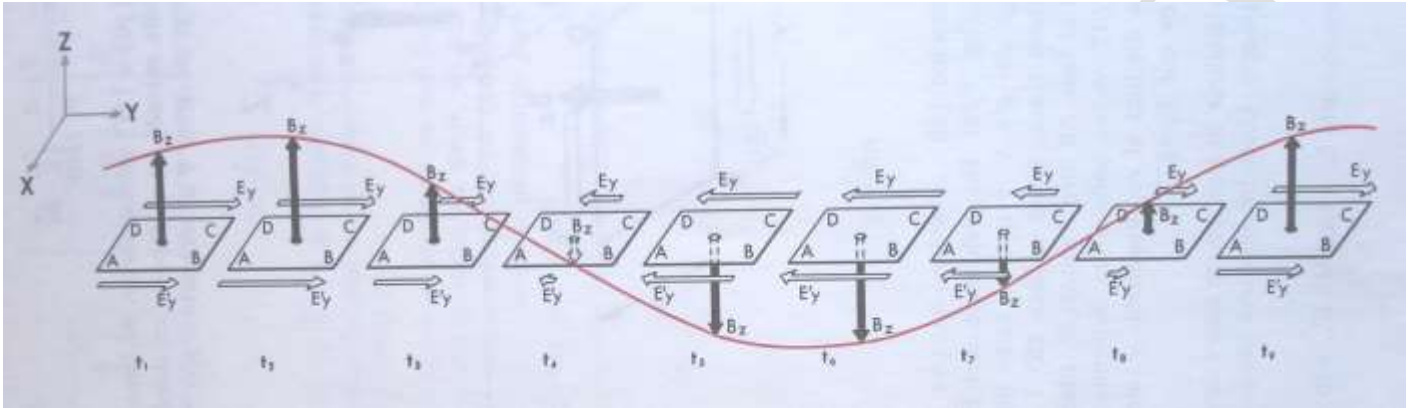


Fig.11

En la figura 12 se ha vuelto a representar una parte de la figura 10 y vamos a calcular el valor de la circulación de \vec{E} a lo largo de la línea ABCD

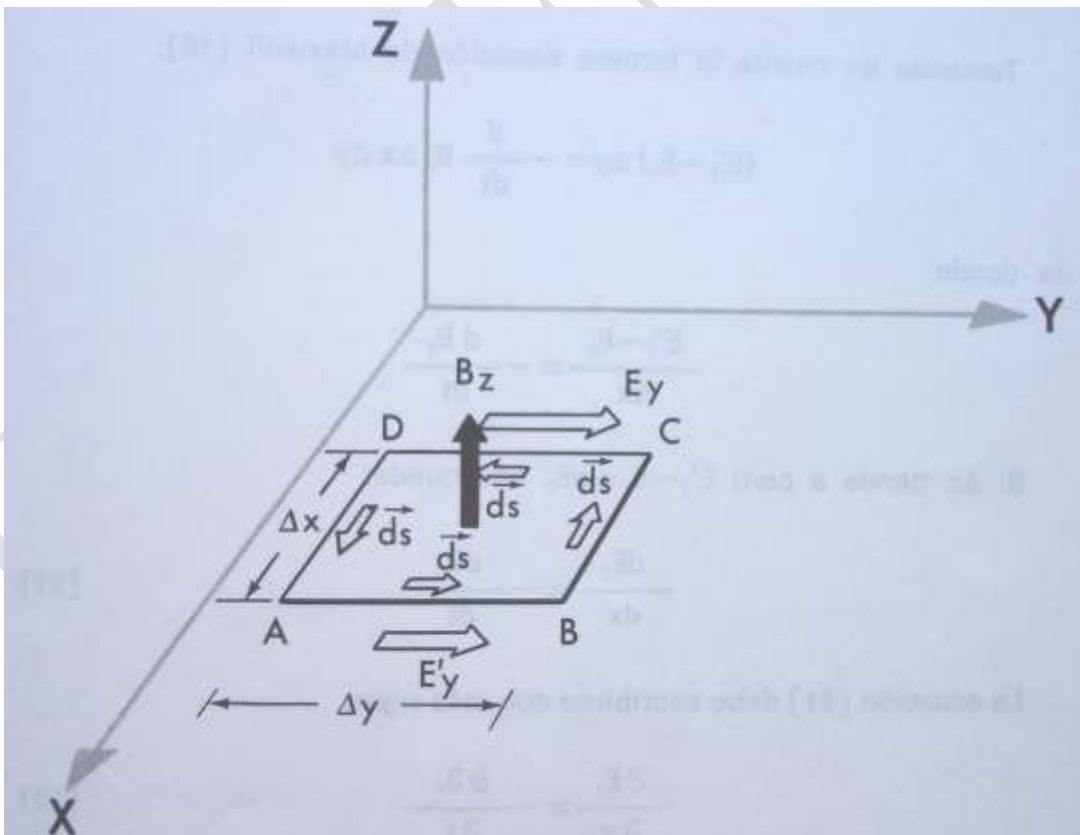


Fig.12

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_D^A \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (11)$$

(1) (2) (3) (4)

Las integrales (2) y (4) son nulas puesto que los vectores $d\vec{s}$ y \vec{E} son perpendiculares y en consecuencia el producto escalar es nulo. La ecuación (11) queda reducida a

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Sobre el lado AB, \vec{E} y $d\vec{s}$ forman un ángulo de cero grados y sobre el lado CD de 180°

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = E'_y \Delta y - E_y \Delta y = (E'_y - E_y) \Delta y$$

El ángulo que forman el vector superficie del rectángulo ABCD y el vector B_z es de cero grados, por tanto,

$$-\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} (B_z \Delta x \Delta y)$$

De acuerdo con la tercera ecuación de Maxwell

$$(E'_y - E_y) \Delta y = -\frac{dB_z}{dt} \cdot \Delta x \Delta y \quad \Rightarrow \quad \frac{(E'_y - E_y)}{\Delta x} = -\frac{dB_z}{dt}$$

Dado que Δx es muy pequeño, $\Delta x = dx$ y $E'_y - E_y = dE_y$

$$\frac{dE_y}{dx} = -\frac{dB_z}{dt}$$

Puesto que \vec{E} y \vec{B} son funciones que dependen de dos variables (posición x y tiempo), la ecuación anterior debe escribirse con mayor rigor como

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (12)$$

La interpretación de la ecuación (12) es que si existe una variación de \vec{E} con respecto a la coordenada x conlleva que exista una variación del campo \vec{B} con respecto del tiempo. Esta ecuación muestra que existe una relación entre los campos eléctrico y magnético.

Vamos ahora con la cuarta ecuación de Maxwell y volvemos a la figura 10, en la que consideramos el rectángulo GHIF, paralelo al plano XZ y cuyas dimensiones Δx y Δz son muy pequeñas. Siguiendo el mismo razonamiento que para el rectángulo ABCD, recordamos que \vec{B} sólo tiene componentes sobre el eje Z y que lo dibujado en la figura 10 corresponde a un determinado instante puesto que \vec{B} depende del tiempo. Una representación de cómo varían \vec{B} y \vec{E} con el transcurso del tiempo se indica en la figura 13.

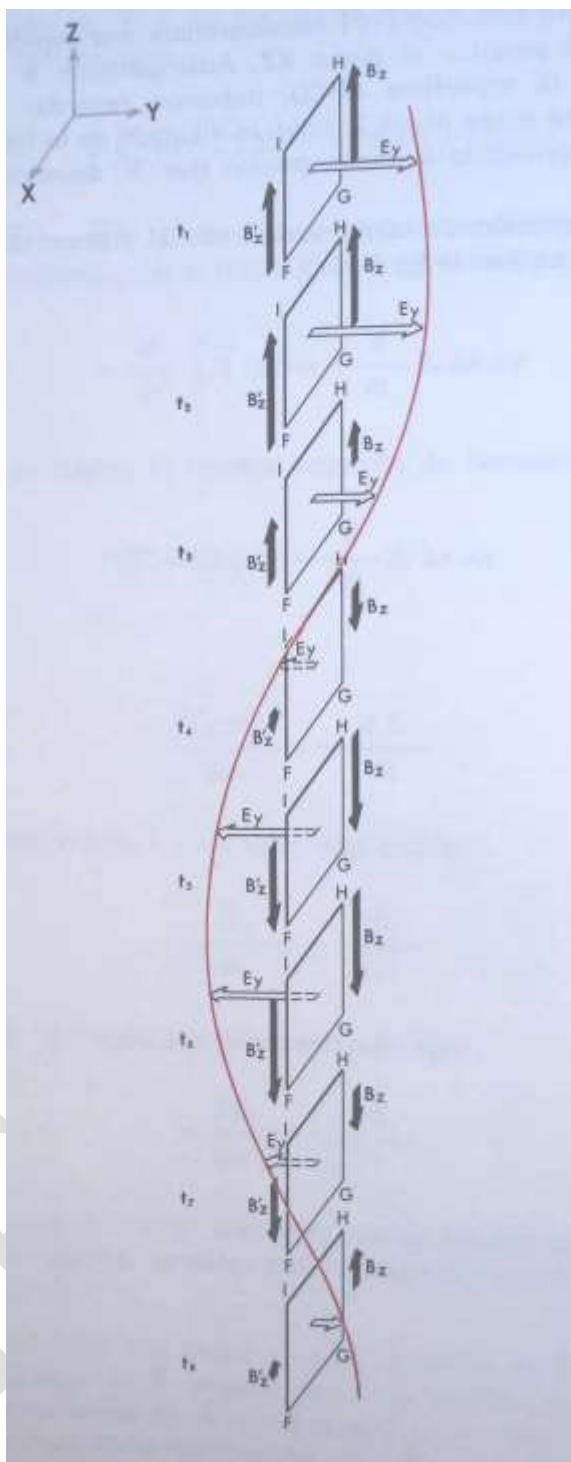


Fig.13

Para aplicar la cuarta ecuación de Maxwell dibujamos de nuevo parte de la figura 10 en la figura 14

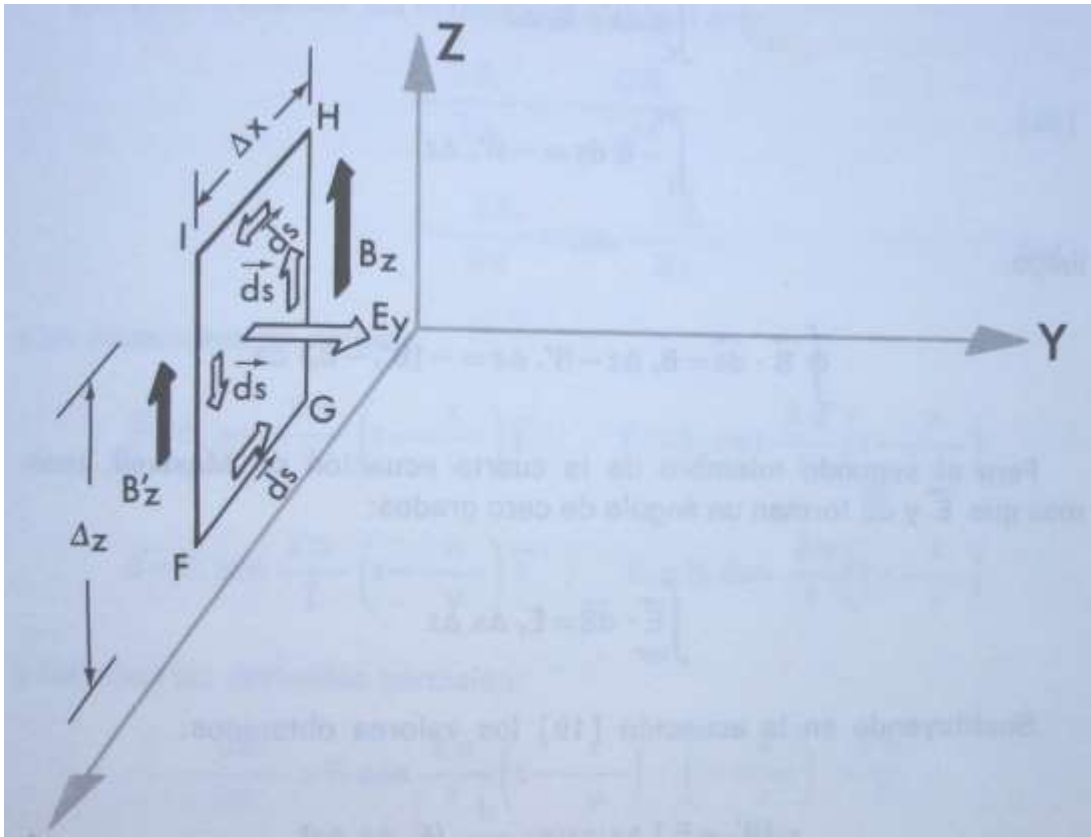


Fig. 14

La cuarta ecuación de Maxwell antes descrita es

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (13)$$

La circulación a lo largo de GHIF

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_G^H \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_H^I \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_I^F \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_F^G \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

Las integrales (2) y (4) son nulas por ser perpendiculares los vectores \vec{B} y $d\vec{s}$, por tanto, al integral anterior se reduce a

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_G^H \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_I^F \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

En el tramo GH el ángulo que forman \vec{B} y $d\vec{s}$ es de 0° y en el tramo IF de 180°

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B_z \Delta z - B'_z \Delta z = -(B'_z - B_z) \Delta z$$

Para el segundo miembro de la cuarta ecuación de Maxwell, observamos que \vec{E} y $d\vec{S}$ forman un ángulo de cero grados

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_y \Delta x \Delta z$$

Llevando estos valores a la ecuación (13)

$$-(B'_z - B_z) \Delta z = \mu_o \epsilon_o \frac{dE_y}{dt} \Delta x \Delta z$$

cuando Δx tiende a cero

$$-\frac{dB_z}{dx} = \mu_o \epsilon_o \frac{dE_y}{dt}$$

Por razones que se apuntaron anteriormente esta última ecuación debe escribirse con rigor como

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_o \epsilon_o \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (14)$$

La interpretación de (14) es que la variación del campo magnético con respecto a x conlleva que el campo eléctrico varíe con respecto del tiempo.

Recordemos las ecuaciones de partida

$$\vec{E} = E_o \text{sen} \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) \vec{j} \Rightarrow E_y = E_o \text{sen} \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (9)$$

$$\vec{B} = B_o \text{sen} \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) \vec{k} \Rightarrow B_z = B_o \text{sen} \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (10)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = E_o \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) * \left(-\frac{1}{v} \right) * \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = B_o \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) * \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = B_o \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) * \left(-\frac{1}{v} \right) * \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = E_o \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) * \frac{2\pi}{T}$$

Sustituimos estos valores en las ecuaciones (12) y (14)

$$\begin{aligned} E_o \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) * \left(-\frac{1}{v} \right) * \frac{2\pi}{T} &= -B_o \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) * \frac{2\pi}{T} \Rightarrow E_o = v B_o \\ -B_o \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) * \left(-\frac{1}{v} \right) * \frac{2\pi}{T} &= \mu_o \epsilon_o E_o \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) * \frac{2\pi}{T} \Rightarrow B_o = v \mu_o \epsilon_o E_o \end{aligned} \quad (15)$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera

$$E_o = v^2 \mu_o \epsilon_o E_o \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \epsilon_o}} \quad (16)$$

La ecuación (16) nos permite calcular la velocidad de propagación del campo eléctrico y magnético

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} * 4\pi \cdot 10^{-7}}} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Anteriormente a Maxwell se había medido la velocidad de la luz y lo interesante de la teoría electromagnética es que la velocidad experimental está de acuerdo con la obtenida teóricamente.

En el razonamiento que se ha hecho no se ha puesto ninguna condición a la frecuencia de la onda que representa tanto a \vec{E} como a \vec{B} . Luego son compatibles con las ecuaciones de Maxwell soluciones en donde existan diferentes frecuencias, con la particularidad de que todas ellas, en el vacío, se propagan a la misma velocidad de $3 \cdot 10^8$ m/s.

La gama de frecuencias de las ondas electromagnéticas abarca aproximadamente desde 10^3 Hz a 10^{22} Hz o con longitudes de onda desde $3 \cdot 10^5$ m a $3 \cdot 10^{-14}$ m, dando lugar a lo que se conoce con el nombre de espectro de las ondas electromagnéticas (fig.15).

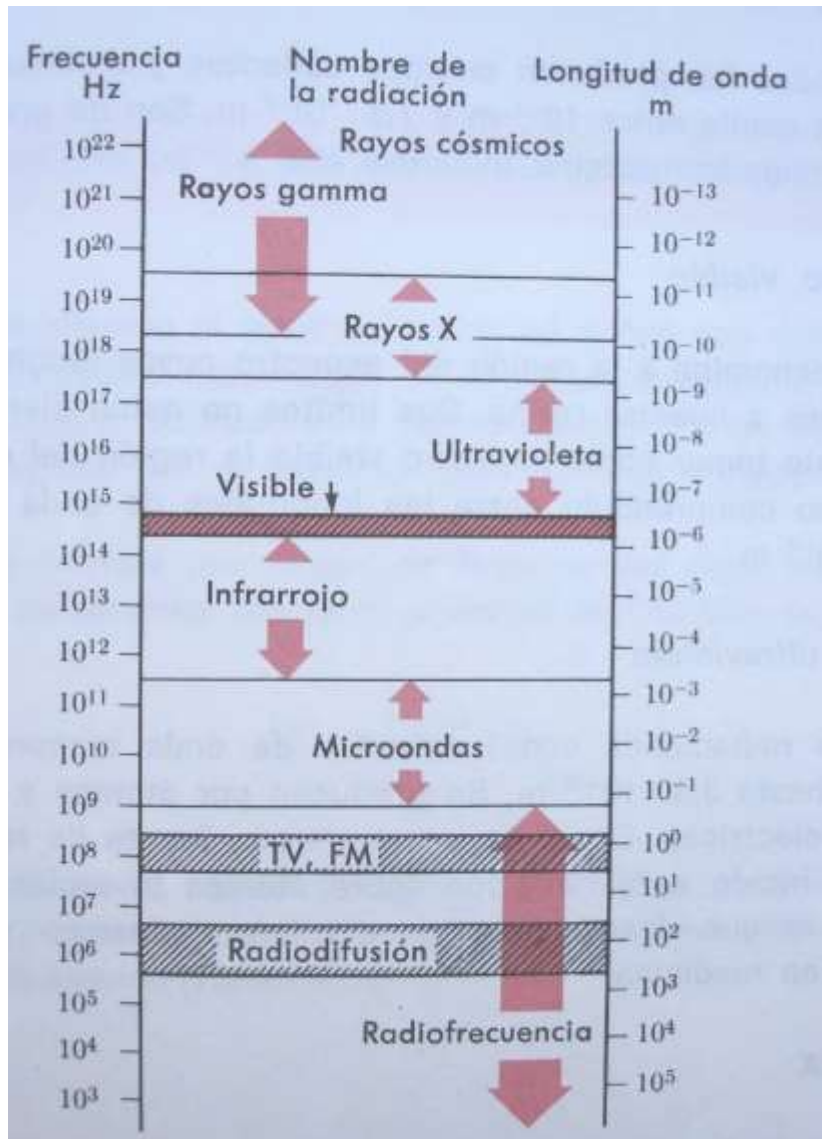


Fig. 15

En los libros de Física elemental se suele encontrar la figura 16 que corresponde a una onda electromagnética que se propaga en la dirección del eje X. Los campos \vec{E} y \vec{B} son perpendiculares a la dirección de propagación, por tanto, las ondas electromagnéticas siguen un modelo de ondas transversales y por ello pueden polarizarse. De hecho la representación de la figura 16 es una onda electromagnética polarizada linealmente.

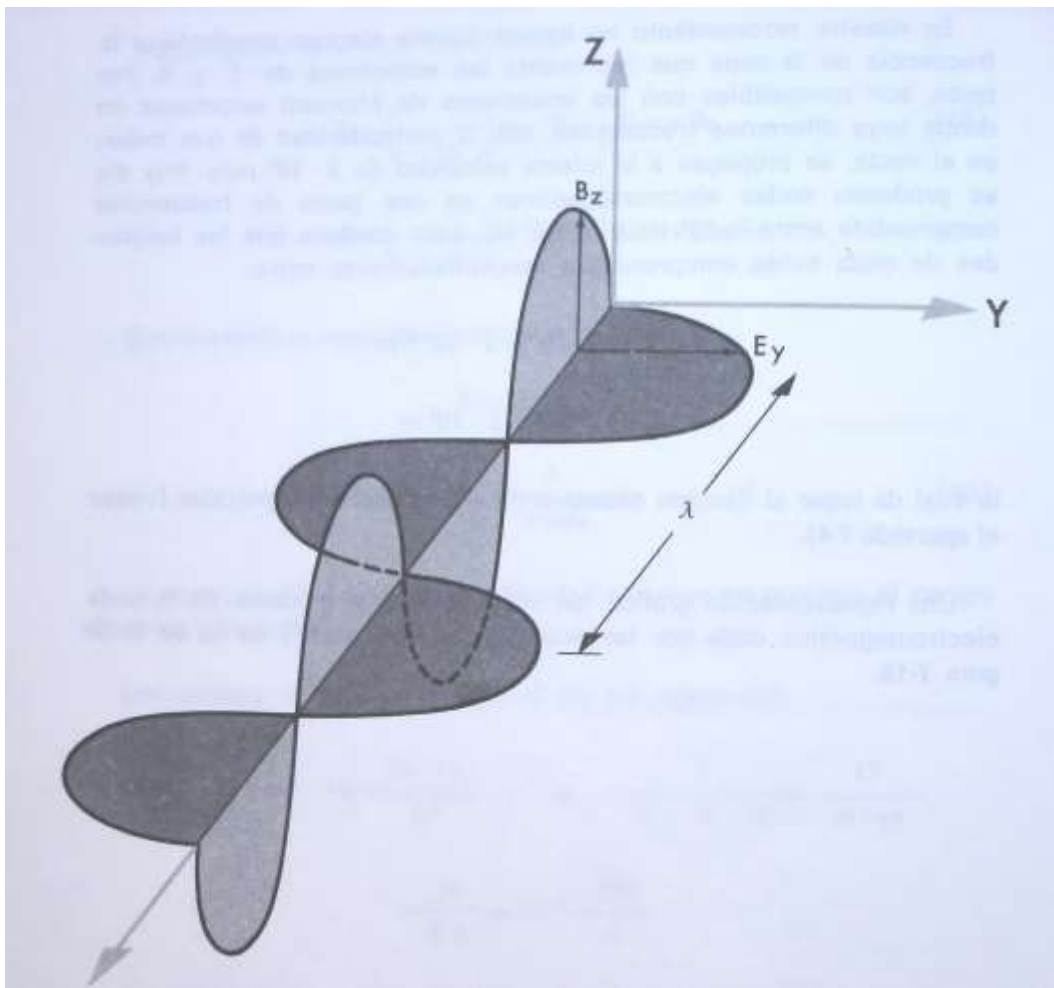


Fig. 16

Analogías y diferencias entre las ondas mecánicas y electromagnéticas

Ondas mecánicas

Pueden ser longitudinales y transversales

Necesitan un medio material (no se propagan en el vacío)

Ondas electromagnéticas

Son sólo transversales

Se propagan en el vacío

Su velocidad de propagación depende del medio y del tipo de onda

Su velocidad de propagación en el vacío es siempre la de la luz

Varía regularmente una sola magnitud (densidad del medio, amplitud de vibración)

Varían dos magnitudes el campo eléctrico y magnético

Las dos clases de ondas transportan energía

Ambas se reflejan, refractan , difractan y producen interferencias

Propagación de la energía. Vector de Poynting

El flujo de energía instantáneo de una onda electromagnética se caracteriza mediante el vector de Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

Para la onda plana que hemos tratado anteriormente \vec{S} es un vector perpendicular al plano de la onda y que tiene su mismo sentido de propagación (Fig 17)

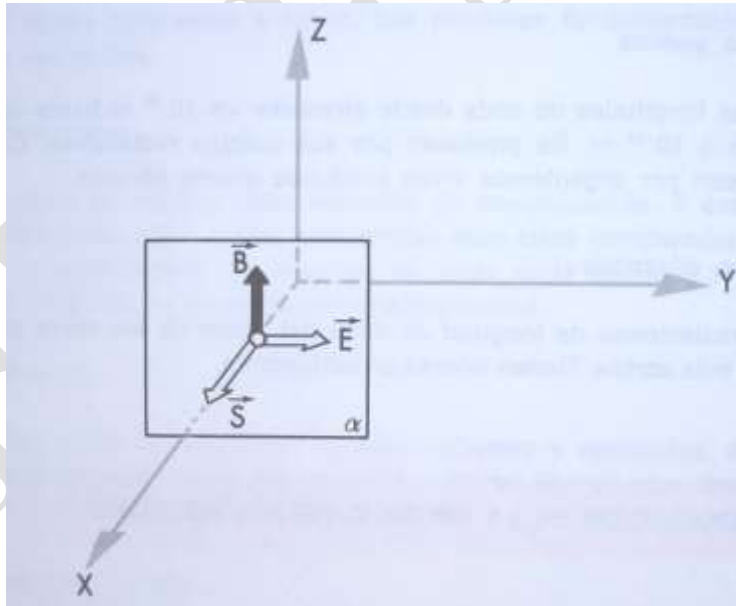


Fig. 17

$$\vec{E} = E_o \text{sen} \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) \vec{j} \quad ; \quad \vec{B} = B_o \text{sen} \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) \vec{k}$$

El valor instantáneo de \vec{S} es:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_o} E_o B_o \text{sen}^2 \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) (\vec{j} \times \vec{k}) = \frac{1}{\mu_o} E_o B_o \text{sen}^2 \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) \vec{i}$$

Para calcular el valor promedio de \vec{S} debemos calcular el valor promedio de la función seno al cuadrado durante un periodo

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T \text{sen}^2 \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[1 - \cos^2 \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] dt = 1 - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \left[1 + \cos \frac{4\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] dt$$

Se ha utilizado la relación matemática $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$$\bar{S} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2T} \int \cos \frac{4\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2T} \left[\text{sen} \frac{4\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) * \frac{T}{4\pi} \right]_0^T = \frac{1}{2}$$

El término entre paréntesis es nulo ya que la función seno tiene el mismo valor para $t=T$ que para $t=0$

$$\bar{S} = \frac{1}{\mu_o} E_o B_o * \bar{P} = \frac{1}{2\mu_o} E_o B_o$$

Teniendo en cuenta que $E_o = vB_o$ y que v es la velocidad de la luz en el vacío y que se representa por la letra c , resulta finalmente

$$\bar{S} = \frac{1}{2\mu_o c} E_o^2$$

Las dimensiones de \bar{S} son $\frac{W}{m^2}$ y significa un flujo de energía por unidad de área y unidad de tiempo.