PROBLEMAS DE LAS OLIMPIADAS INTERNACIONALES DE FÍSICA

Heurema

José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

18ª OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. REPÚBLICA DEMOCRÁTICA DE ALEMANIA . 1987

1.-Aire húmedo en ascenso

Una corriente de aire húmedo asciende por la ladera de una montaña, siendo la citada corriente adiabática. En la figura 1

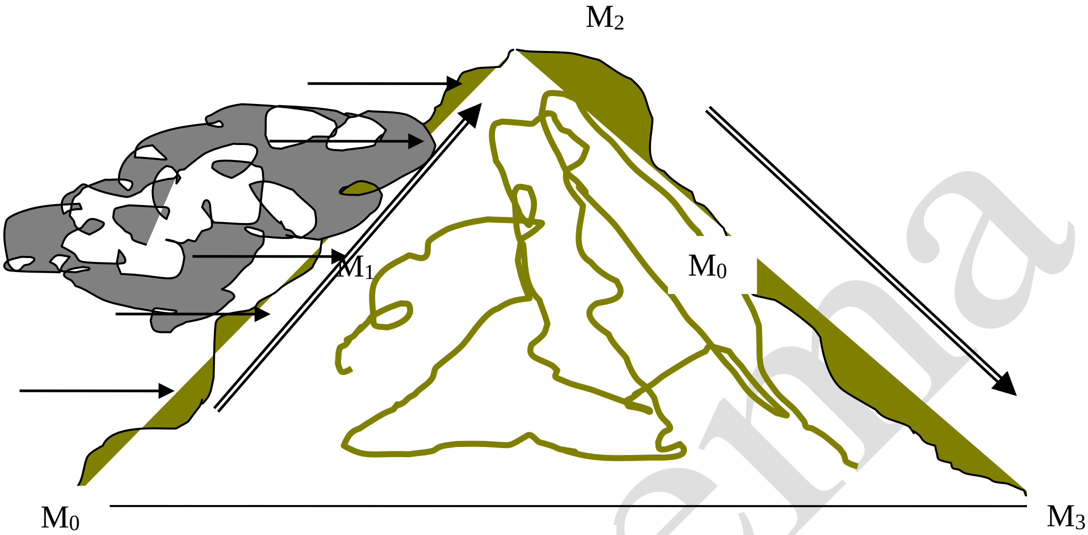


Fig. 1

las presiones en M_o y M_3 son 100 kPa y en M_2 70 kPa. La temperatura del aire en M_2 es de 20ºC. La formación de nubes se produce a una presión de 84,5 kPa.

Considerar una masa de aire ascendente de 2000 kg por metro cuadrado. El aire alcanza la cima de la montaña (M_2) después de 1500 segundos y cede bajo forma de lluvia 2,45 g de agua por kg de aire

a) Calcular la temperatura T_1 en M_1 lugar donde se forman las nubes

b) ¿Cuál es la altura h1 (M_1) por encima de M_o, admitiendo que la densidad del aire decrece linealmente con la altura?

c) Calcular la temperatura T_2 en la cima de la montaña

d) Determinar la altura de la columna de agua (nivel de precipitación) formada por la precipitación de la corriente durante tres horas, si se supone una caída de lluvia homogénea entre los puntos M_1 y M_2.

e) Calcular la temperatura T_3 en la otra ladera de la montaña (M_3)

Ayuda y datos

Heurema

Se considera a la atmósfera como un gas ideal. La influencia del vapor de agua en el calor específico y en la densidad del aire es despreciable. También se supone que el calor latente de condensación es independiente de la temperatura.

Cp = 1005 J$kg^{-1}K^{-1}$, densidad a p_o y T_o del aire ρ_o= 1,189 kg m^{-3} , calor latente de consdensación del agua L= 2500 kJ kg^{-1}.

Coeficiente adiabático γ = 1,4

a) La ecuación de una transformación adiabática es: $P_o V_o^{\gamma} = P_1 V_1^{\gamma}$. La ecuación de los gases perfectos

$$P_o V_o = nRT_o ; P_o V_o = nRT_o \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{V_o} = \frac{P_o T_1}{P_1 T_o}$$

De ambas se deduce:

$$\frac{P_o}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_o}\right)^{\gamma} = \left(\frac{P_0 T_1}{P_1 T_o}\right)^{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{P_o}{P_1}\right)^{1-\gamma} = \left(\frac{T_1}{T_o}\right)^{\gamma} \Rightarrow \quad T_1 = T_0 \left(\frac{P_o}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad \Rightarrow$$

$$T_1 = 293 * \left(\frac{100}{84,5}\right)^{\frac{1-1,4}{1,4}} = 279 \text{ K}$$

b) La variación de presión entre dos puntos separados por una distancia dh situados entre M_o(ho=0) y M_1 (h=h_1)es:

$$-dp = \rho \, g \, dh$$

Según el enunciado del problema la densidad varía linealmente con la altura (ver figura 2)

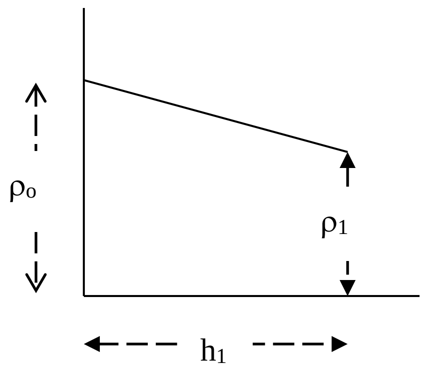


Fig.2

La ecuación de la recta es:

Heurema

$$\rho = \rho_o - \frac{\rho_o - \rho_1}{h_1} h$$

Por tanto:

$$\int_{p_o}^{p_1} dp = -\int_0^{h_1} \left[\rho_o - \frac{\rho_o - \rho_1}{h_1} h \right] g \ dh \quad ; \quad p_1 - p_o = -\int_0^{h_1} \rho_o g \ dh + \int_0^{h_1} \frac{\rho_o - \rho_1}{h_1} hg \ dh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_1 - p_o = -\rho_o g h_1 + \frac{\rho_o g h_1}{2} - \frac{\rho_1 g h_1}{2} \Rightarrow \quad p_o - p_1 = \frac{g h_1 (\rho_o + \rho_1)}{2} \Rightarrow$$

$$h_1 = \frac{2(p_o - p_1)}{g(\rho_o + \rho_1)}$$

Por otra parte, a partir de la ecuación de los gases tenemos ρ_1 en función de las presiones y temperaturas conocidas lo que permite llegar al valor de h_1.

$$p_o = \frac{\rho_o R T_o}{M}, p_1 = \frac{\rho_1 R T_1}{M} \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = \frac{\rho_o p_1 T_o}{p_o T_1}$$

$$h_1 = \frac{2(p_o - p_1)}{g\left(\rho_o + \frac{\rho_o p T_o}{p_o T_1}\right)} = \frac{2(100 - 84{,}5)10^3}{9{,}8 * 1{,}189\left(1 + \frac{84{,}5 * 293}{100 * 279}\right)} = 1398 \ \text{m}$$

c) En el proceso adiabático del ascenso del aire éste se enfría, al mismo tiempo se condensa vapor de agua y cede el calor latente.

$$2000\text{kg} * 2{,}45 \frac{\text{g agua}}{\text{kg}} = 4900 \ \text{g agua} \Rightarrow \quad Q = L * m_{agua} = 2500\text{kJ} * 4{,}9\text{kg} = 12250 \ \text{kJ}$$

El aumento de temperatura debido a esta condensación es:

$$12250 \ \text{kJ} = 2000\text{kg} * 1{,}005 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} * \Delta T \quad \Rightarrow \quad \Delta T = 6{,}1 \ \text{K}$$

El enfriamiento adiabático da una temperatura de

$$T_2' = T_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 279 \left(\frac{84{,}5}{70} \right)^{\frac{1-1{,}4}{1{,}4}} = 264 \ \text{K}$$

$$T_2 = 264 + 6{,}1 \approx 270 \ \text{K}$$

d) La masa de agua precipitada por metro cuadrado durante tres horas es:

Heurema

$$\frac{4{,}9\ \text{kg}}{1500\ \text{s}} * 3 * 3600\text{s} = 35{,}3\ \text{kg}$$

El volumen de agua y la altura alcanzada son:

$$V = \frac{m}{d} = \frac{35{,}3\ \text{kg}}{1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 3{,}53.10^{-2}\ \text{m}^3 \Rightarrow h = \frac{V}{S} = \frac{3{,}53.10^{-2}\ \text{m}^3}{1\ \text{m}^2} = 3{,}53.10^{-2}\ \text{m} = 35{,}3\ \text{mm}$$

$$\text{e)}\ T_3 = T_2\left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 270\left(\frac{70}{100}\right)^{\frac{1-1{,}4}{1{,}4}} = 299\ \text{K}$$

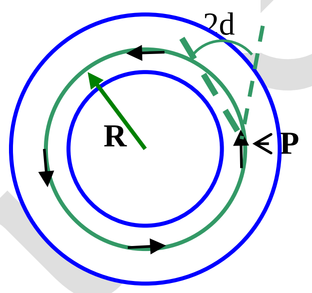
Heurema

2.-Electrones en un campo magnético

Un haz de electrones se emite a partir de una fuente puntual P y penetra en un Campo magnético de un toroide en la dirección de las líneas de fuerza. El ángulo de apertura del haz es $2\alpha_o$ y se supone que $2\alpha_o \ll 1$. La inyección del haz se verifica en el radio medio R del toroide siendo al voltaje de aceleración de los electrones V_o.
Se desprecia cualquier interacción entre los electrones y el módulo del campo magnético B se considera constante.

a) Para guiar a los electrones en el campo magnético toroidal es necesario un campo magnético de deflexión B_1. Calcular el valor de B_1 para un electrón que se mueve en una órbita circular de radio R en el toroide.

b) Determinar el valor del campo B el cual proporciona cuatro puntos de enfoque separados entre sí $\pi/2$, tal como indica la figura inferior

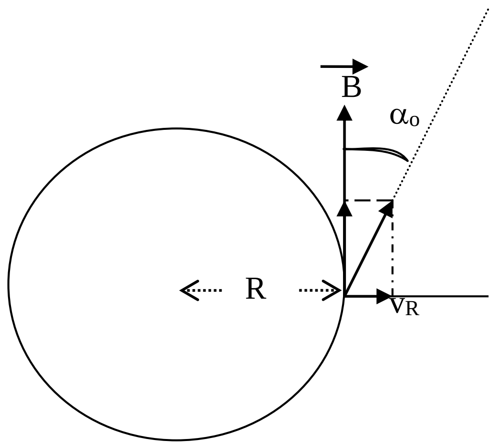


c) El haz de electrones no puede permanecer en le toroide sin la presencia de un campo de deflexión B_1, sino que lo abandonará con un movimiento de deriva perpendicular al plano del toroide.
c_1) Mostrar que la desviación radial de los electrones a partir del radio de inyección es finita.
c_2) Determinar la dirección de la velocidad de deriva.

Nota. Se desprecia el ángulo de apertura del haz electrónico .Utilice las leyes de conservación de la energía y del momento angular.

$e/m = 1{,}76.1011\ C.kg^{-1}$, $V_o = 3\ kV$, $R = 50\ mm$

En figura inferior R es el radio del toroide y la vista es por encima del mismo, mirando de arriba hacia abajo. La velocidad de los electrones v, que forman un ángulo α_o con el campo magnético tiene una componente radial y otra tangencial



La componente tangencial de la velocidad no interacciona con el campo. La componente radial lo hace

$$F = -ev_R B$$

Esta fuerza es perpendicular al plano del círculo de radio R y dirigida hacia dentro del plano del papel. Como $\vec{F}$ y $\vec{v}_R$ son perpendiculares aparece un movimiento circular pero como existe también una velocidad tangencial de avance, los electrones describen una espiral de modo que la fuerza magnética es la centrípeta

$$ev_R B = \frac{mv_R^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv_R}{eB}$$

El tiempo que emplea el electrón en describir una vuelta completa vale:

$$T = \frac{2\pi\ r}{v_R} = \frac{2\pi \frac{mv_R}{eB}}{v_R} = \frac{2\pi\ m}{eB}$$

En ese mismo tiempo T el electrón avanza una distancia $b = v_t * T$. Teniendo en cuenta que el ángulo α_o es muy pequeño podemos aproximar $v_t = v$. Por otra parte el problema nos pide el valor del campo cuando los electrones recorren una distancia b que es igual, según el enunciado, a

$$b = \frac{2\pi\ R}{4}$$

Dado que los electrones son acelerados por una diferencia de potencial V_o, la energía cinética que adquiere es la que le comunica el campo eléctrico, lo cual nos permite tener v

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV_o \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eV_o}{m}}$$

$$b = v * T = \frac{2\pi\ R}{4} = \sqrt{\frac{2eV_o}{m}} * \frac{2\pi\ m}{eB} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{32mV_0}{e}} = \frac{1}{50.10^{-3}}\sqrt{\frac{32 * 3.10^3}{1,76.10^{11}}} \Rightarrow$$

$$B = 1,48.10^{-2}\ \ T$$

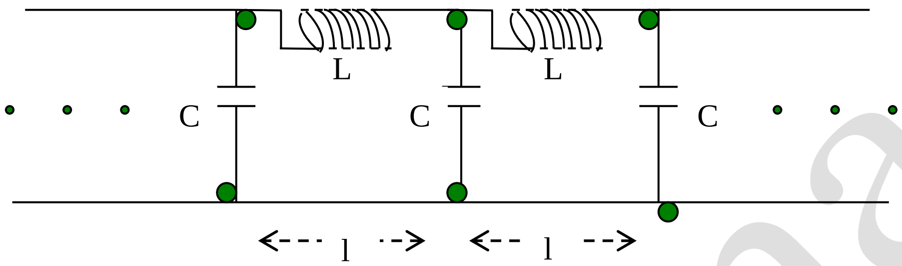
Para el campo deflector se cumple que

$$\frac{mv^2}{R} = evB_1 \Rightarrow B_1 = \frac{mv}{Re} = \frac{m\sqrt{\frac{2eV_o}{m}}}{Re} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2mV_o}{e}} = \frac{1}{50}\sqrt{\frac{2 * 3.10^3}{1,76.10^{11}}} = 0,37.10^{-2}\ \ T$$

Heurema

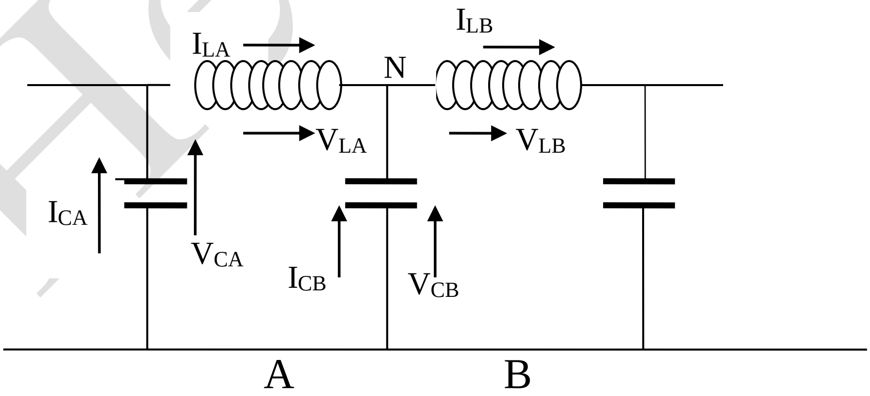
3.-Rejilla infinita LC

Cuando por una rejilla infinita L-C se propaga una onda senoidal la fase de la corriente alterna a través de dos condensadores sucesivos difiere en el valor ϕ.



a) Determinar cómo depende ϕ de ω , L y C, (ω es la frecuencia angular de la onda semoidal)
b) Determinar la velocidad de propagación de las ondas si la longitud de cada unidad es l
c) Establecer bajo qué condiciones la velocidad de propagación de las ondas es casi independiente de ω. Calcular la velocidad en este caso.

Escogemos dos unidades de la rejilla contiguas y las designamos con las letras A y B y establecemos las caídas de tensión y las intensidades de la corriente



Al nudo N llegan las corrientes I_{LA} y I_{CB} y sale I_{LB}, por tanto,

$$I_{LA}+I_{CB}-I_{LB} = 0 \quad (1)$$

Para la malla A

$$V_{CA}+V_{LA}-V_{CB} = 0 \quad (2)$$

Heurema

La intensidad que circula por un condensador está adelantada 90º respecto a la caída de tensión. Si la caída de tensión en el condensador A vale

$$V_{CA} = V_o \operatorname{sen}\left(\omega t + \varphi_A\right)$$

La intensidad vale:

$$I_{CA} = V_o C\, \omega \cos\left(\omega t + \varphi_A\right)$$

Para el condensador B se cumple

$$V_{CB} = V_o \operatorname{sen}\left(\omega t + \varphi_B\right) \;;\quad I_{CB} = V_o C\, \omega \cos\left(\omega t + \varphi_B\right)$$

Por otra parte $V_{LA} = I_{LA} L\omega$

De acuerdo con la ecuación (2)

$$V_o \operatorname{sen}\left(\omega t + \varphi_A\right) + V_{LA} - V_0 \operatorname{sen}\left(\omega t + \varphi_B\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{LA} = 2V_o \cos\frac{2\omega\, t + \varphi_A + \varphi_B}{2} \operatorname{sen}\frac{\varphi_A - \varphi_B}{2}$$

Dado que $\varphi_A - \varphi_B = \Phi$, la ecuación anterior queda así:

$$V_{LA} = 2V_o \cos\left(\omega\, t + \frac{2\varphi_A - \Phi}{2}\right) \operatorname{sen}\frac{\Phi}{2}$$

En una autoinducción la intensidad está retrasada 90º respecto a la caída de tensión

$$I_{LA} = \frac{2V_o}{L\omega} \operatorname{sen}\left(\omega\, t + \frac{2\varphi_A - \Phi}{2}\right) \operatorname{sen}\frac{\Phi}{2}$$

Para la intensidad I_{LB}

$$I_{LB} = \frac{2V_o}{L\omega} \operatorname{sen}\left(\omega\, t + \frac{\varphi_B + \varphi_C}{2}\right) \operatorname{sen}\frac{\varphi_B - \varphi_C}{2}$$

De acuerdo con la relación entre los ángulos $\varphi_A - \varphi_B = \Phi \;\Rightarrow\; \varphi_B = \varphi_A - \Phi$

$$\varphi_B - \varphi_C = \Phi \Rightarrow \varphi_C = \varphi_B - \Phi = \varphi_A - \Phi - \Phi \quad \Rightarrow \varphi_C + \varphi_B = \varphi_A - 2\Phi + \varphi_A - \Phi = 2\varphi_A - 3\Phi$$

Luego

$$I_{LB} = \frac{2V_o}{L\omega} \operatorname{sen}\left(\omega\, t + \frac{2\varphi_A - 3\Phi}{2}\right) \operatorname{sen}\frac{\Phi}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación (1) de las intensidades

$$\frac{2V_o}{L\omega}\,\text{sen}\left(\omega\ t+\frac{2\varphi_A-\Phi}{2}\right)\text{sen}\,\frac{\Phi}{2}+V_oC\ \omega\ \cos\ (\omega t+\varphi_B)-$$
$$-\frac{2V_o}{L\omega}\,\text{sen}\left(\omega\ t+\frac{2\varphi_A-3\Phi}{2}\right)\text{sen}\,\frac{\Phi}{2}=0$$

$$\frac{2V_o}{L\omega}\,\text{sen}\,\frac{\Phi}{2}\left[sen\left(\omega\ t+\frac{2\varphi_A-\Phi}{2}\right)-sen\left(\omega\ t+\frac{2\varphi_A-3\Phi}{2}\right)\right]+V_oC\omega\ \cos(\omega t+\varphi_B)=0$$

La diferencia de los dos senos del paréntesis cuadrado es:

$$\text{sen}A-\text{sen}B=2\cos\frac{A+B}{2}\,\text{sen}\,\frac{A-B}{2}$$

$$\text{sen}\left(\omega\ t+\frac{2\varphi_A-\Phi}{2}\right)-\text{sen}\left(\omega\ t+\frac{2\varphi_A-3\Phi}{2}\right)=$$
$$=2\cos\left(\frac{\omega\ t+\frac{2\varphi_A-\Phi}{2}+\omega\ t+\frac{2\varphi_A-3\Phi}{2}}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\omega\ t+\frac{2\varphi_A-\Phi}{2}-\omega\ t-\frac{2\varphi_A-3\Phi}{2}}{2}\right)=$$
$$=+2\ \cos(\omega\ t-\Phi+\varphi_A)\ \text{sen}\left(-\frac{\Phi}{2}\right)$$

Con esto queda la ecuación de las intensidades en la forma:

$$\frac{4V_o}{L\omega}\,\text{sen}\,\frac{\Phi}{2}\left[\cos(\omega t-\Phi+\varphi_A)\right]\ \text{sen}\left(-\frac{\Phi}{2}\right)+V_oC\omega\ \cos(\omega t-\Phi+\varphi_A)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{4V_o}{L\omega}\,\text{sen}\,\frac{\Phi}{2}\,\text{sen}\left(-\frac{\Phi}{2}\right)+V_oC\omega=0\Rightarrow-\text{sen}\,\frac{\Phi}{2}\,\text{sen}\,\frac{\Phi}{2}=-\frac{LC\omega^2}{4}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\text{sen}^2\Phi=\frac{LC\omega^2}{4}\quad\Rightarrow\quad\text{sen}\Phi=\frac{\omega}{2}\sqrt{LC}$$

El máximo valor de sen Φ es la unidad y entonces el máximo valor de la frecuencia angular es: $\omega=\frac{2}{\sqrt{LC}}$

b) Designamos con Δt el tiempo que tarda la onda en recorrer la distancia l. La velocidad de la onda es $v=\frac{l}{\Delta t}$. En el tiempo Δt se produce un cambio de fase Φ, a un periodo T le corresponde 2π.

Heurema

$$\frac{T}{2\pi} = \frac{\Delta t}{\Phi} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{T\Phi}{2\pi}$$

Como

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Phi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\omega l}{\Phi}$$

d) Supongamos que sen Φ se puede confundir con el ángulo, entonces $\Phi = \frac{\omega\sqrt{LC}}{2}$

$$v = \frac{2l}{\sqrt{LC}}$$

Para que el seno se pueda aproximar al ángulo es porque el ángulo es muy pequeño y para que esto ocurra ω también ha de ser muy pequeño. Cuanto mayor sea $\sqrt{LC}$ menor ha de ser ω para poder hacer la aproximación del seno con el ángulo, y en consecuencia v será tanto menor.

Heurema