**PÉNDULO SECTOR**
**SOLUCIONARIO**

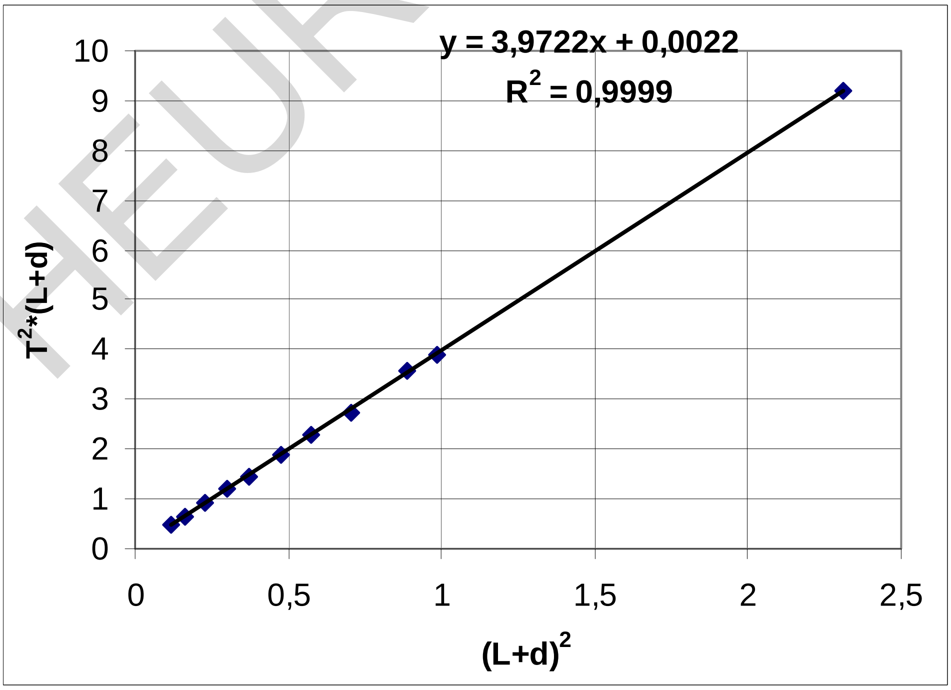
6) Calcule el valor de L a partir del radio de su sector, aplicando la ecuación (2). Complete la tabla 1.
Masa del péndulo =60,11 g , R=20,1 cm

$$L = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} R = 0{,}600\,R = 0{,}600 \cdot 20{,}1 = 12{,}06\,\text{cm} = 0{,}121\,\text{m}$$

Tabla 1

| λ/cm | h/cm | d/m $d = \sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}$ | Tiempo/s | Periodo T/s | $T^2(L+d)$ $s^2 \cdot m$ | $(L+d)^2$ $m^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 23,3 | 14 | 0,222 | 23,57 | 1,18 | 0,478 | 0,118 |
| 29,3 | 14 | 0,285 | 25,52 | 1,28 | 0,665 | 0,165 |
| 36,4 | 15 | 0,356 | 27,75 | 1,39 | 0,922 | 0,228 |
| 43,5 | 15 | 0,428 | 29,55 | 1,48 | 1,20 | 0,301 |
| 49,9 | 20 | 0,489 | 30,83 | 1,54 | 1,45 | 0,371 |
| 57,7 | 20 | 0,568 | 33,14 | 1,66 | 1,90 | 0,475 |
| 64,5 | 21 | 0,636 | 34,85 | 1,74 | 2,29 | 0,573 |
| 72,7 | 23 | 0,718 | 36,22 | 1,81 | 2,75 | 0,703 |
| 83,1 | 25 | 0,822 | 38,87 | 1,94 | 3,55 | 0,888 |
| 89,4 | 40 | 0,871 | 39,68 | 1,98 | 3,89 | 0,984 |
| 141,4 | 40 | 1,400 | 49,16 | 2,46 | 9,20 | 2,31 |

7) Represente $T^2(L+d)$ en el eje Y frente a $(L+d)^2$ en el eje X. Determine la pendiente de la recta y calcule el valor de g. Calcule el error relativo en % comparando el valor obtenido con el valor estandar 9,8 N/kg.




$$\frac{4\pi^2}{g} = 3{,}97 \quad \Rightarrow \quad g = \frac{4\pi^2}{3{,}97} = 9{,}9\,\frac{N}{kg}$$

$$\frac{9{,}9-9{,}8}{9{,}8}\cdot 100 \approx +1\%$$

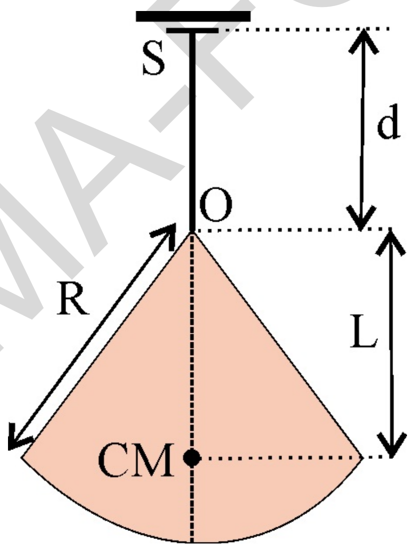
Nota para el Profesor

La ecuación (3) indica que hay una ordenada en el origen de valor

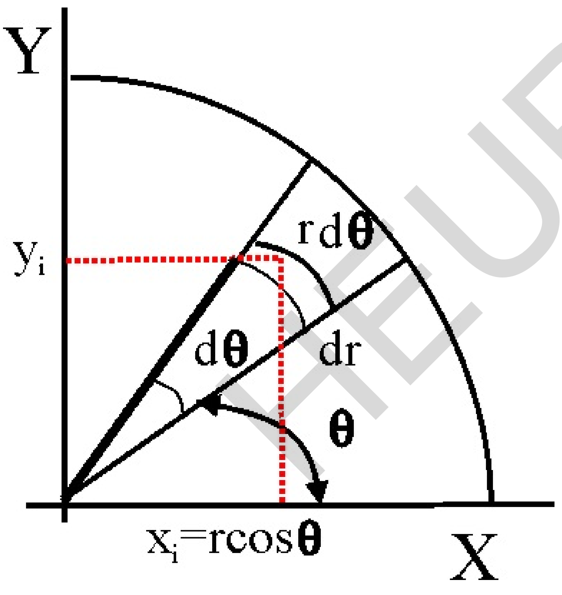
$$\frac{4\pi^2 \cdot 0{,}14R^2}{g}$$

En principio podría utilizarse el valor experimental obtenido de la gráfica para el cálculo de g pero esto nos es acertado ya que el valor experimental puede ser muy diferente al esperado. Basta en la gráfica obligar a que la recta tenga ordenada en el origen nulo y sin embargo el valor de la pendiente apenas varía, vale 3,9741 en lugar de 3,9722.En definitiva obtener valores a partir de la ordenada en el origen da lugar a resultados inapropiados y en general no debe utilizarse para calcular un valor experimental.

Deducción de las ecuaciones-




CM = centro de masas del sector




En primer lugar hay que hallar la posición del c.d.m. de la figura, que estará por simetría sobre la línea del hilo. En la figura de la izquierda se ha cambiado de posición y se ha tomado un elemento de área de lados dr y rdθ; siendo la masa de ese elemento, si σ es la densidad superficial, $dm = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot dr \cdot r d\theta$. La $X_{CM}$ será:

$$X_{CM} = \frac{\iint x_i\, dm}{M} = \frac{\iint r\cos\theta \cdot \sigma\, dr \cdot r\, d\theta}{M} = \sigma \frac{\int_0^R r^2 dr \int_0^{90} \cos\theta\, d\theta}{\sigma \pi R^2/4} = \frac{4R}{3\pi}$$

Por simetría la $Y_{CM}$ valdrá igual, sin embargo la distancia L al vértice será.

$$L = \sqrt{X_{CM}^2 + Y_{CM}^2} = \sqrt{\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 + \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2} = \frac{4R}{3\pi}\sqrt{2}$$

El momento de inercia del elemento respecto de un eje perpendicular que pase por el vértice O, vale $dI_o=r^2\,dm$ (ver segunda figura).

$$I_O = \iint r^2 dm = \iint r^2 \sigma\, dS = \sigma \iint r^2\, r d\theta\, dr = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} d\theta = \sigma \frac{R^4}{4}\frac{\pi}{2} = \sigma \frac{\pi R^2}{4}\frac{R^2}{2} \Rightarrow$$

$$I_o = \frac{1}{2} M_E R^2$$

Aplicando el teorema de Steiner se puede calcular el m.d.i respecto del eje que pasa por el c.d.m.

$$I_O = I_{CM} + ML^2; \qquad I_{CM} = \frac{1}{2}M\ R^2 - M\left[\frac{4R}{3\pi}\sqrt{2}\right]^2 = \frac{1}{2}M\ R^2 - 0{,}36MR^2 = 0{,}14M\ R^2$$

Aplicando de nuevo el teorema de Steiner hallaremos el momento de inercia respecto del centro de suspensión.

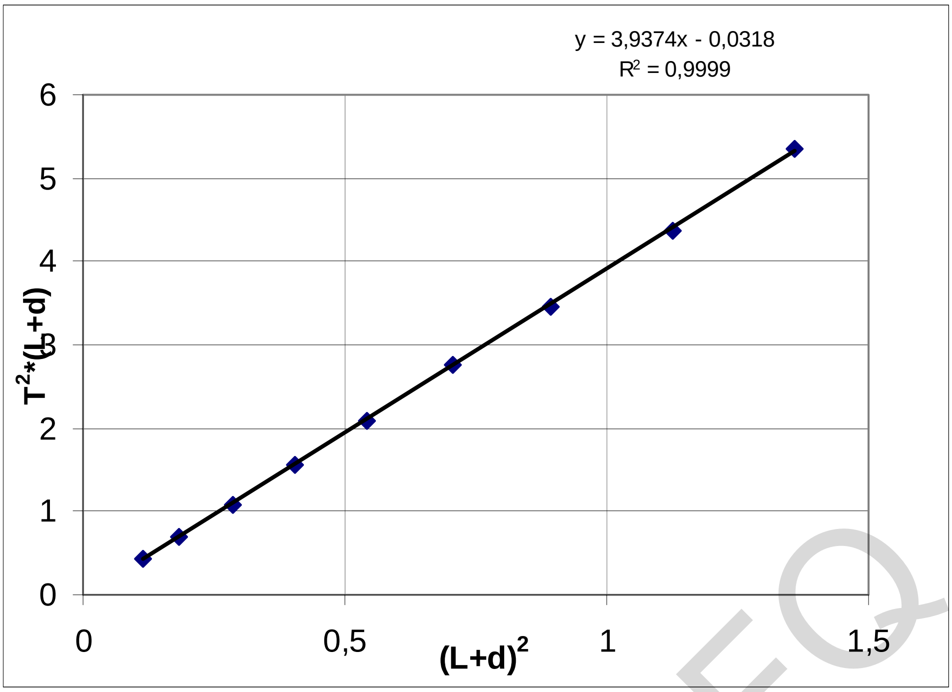
$$I = I_{CM} + M\ (L+d)^2 = 0{,}14MR^2 + M(L+d)^2$$

El periodo de oscilación $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{Mg(L+d)}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{0{,}14MR^2 + M(L+d)^2}{Mg(L+d)}}$

Péndulo cuadrante hecho con cartulina (masa 12,50 g), R= 10,3 cm

$$L\ = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}R = 0{,}600\,R = 0{,}600\cdot 10{,}3 = 6{,}18\,cm = 0{,}0618\,m$$

| $\lambda$/cm | h/cm | d/m $d=\sqrt{\lambda^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2}$ | Periodo T/s T=t/20 | $T^2(L+d)$ $s^2$*m | $(L+d)^2$ $m^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 111,4 | 29 | 1,105 | 2,14 | 5,34 | 1,51 |
| 100,9 | 29 | 0,995 | 2,03 | 4,35 | 1,12 |
| 89,6 | 29 | 0,884 | 1,91 | 3,45 | 0,89 |
| 79,3 | 29 | 0,780 | 1,81 | 2,76 | 0,71 |
| 68,9 | 29 | 0,674 | 1,68 | 2,08 | 0,54 |
| 59,2 | 29 | 0,574 | 1,57 | 1,55 | 0,40 |
| 49,4 | 29 | 0,472 | 1,43 | 1,09 | 0,29 |
| 39,3 | 29 | 0,365 | 1,28 | 0,70 | 0,18 |
| 29,6 | 20 | 0,258 | 1,13 | 0,41 | 0,11 |




$$\frac{4\pi^2}{g} = 3{,}94 \quad \Rightarrow \quad g = \frac{4\pi^2}{3{,}94} = 10{,}0\,\frac{N}{kg}$$