PROBLEMAS DE

LAS OLIMPIADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

1ª OLIMPIADA DE FÍSICA. POLONIA . 1967

1.- Una pelota de masa m = 0,2 kg está apoyada sobre una columna vertical de altura h = 5 m . Una bala de masa m = 0,01 kg y velocidad paralela al suelo v_o = 500 m/s, atraviesa la pelota y ésta toca el suelo a una distancia s = 20 m de la base de la columna. a) Calcular la distancia entre el impacto de la bala con el suelo y la base de la columna b) ¿qué fracción de la energía cinética de la bala se transfiere como calor a la propia bala? 1ª Olimpiada de Física. Polonia 1967

a) Consideremos el sistema formado por la bala y la pelota. Antes del impacto y después de él, se conserva la cantidad de movimiento:
Antes: mv_o , después : m v + MV ; $mv_o = mv + MV$ (1)
v es la velocidad de la bala inmediatamente después de atravesar la pelota, V es la velocidad de la pelota justamente después de ser atravesada por la bala.
Cuando la pelota abandona la columna describe una trayectoria parabólica. Tomando como origen de referencia la columna y el eje Y en sentido vertical y dirigido hacia abajo, las ecuaciones de la trayectoria de la pelota son:

$$\left.\begin{array}{l} x = Vt \\ y = \frac{1}{2} g t^2 \end{array}\right\} \quad y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V^2} \quad (2)$$

Cuando la pelota llegue al suelo su coordenada y es igual a h = 5 m, siendo x = s = 20 m
De la ecuación (2) se deduce el valor de V

$$V = \sqrt{\frac{gx^2}{2y}} = \sqrt{\frac{9{,}8 * 20^2}{2 * 5}} = 19{,}8 \ \frac{m}{s}$$

Sustituyendo valores numéricos en la ecuación (1)

$$0{,}01*500 = 0{,}01\, v + 0{,}2*19{,}8 \ ; \ v = 104 \text{ m/s}$$

Aplicando la ecuación (2) para la bala

$$x = \sqrt{\frac{2yv^2}{g}} = \sqrt{\frac{2*5*104^2}{9{,}8}} = 105 \ \text{m}$$

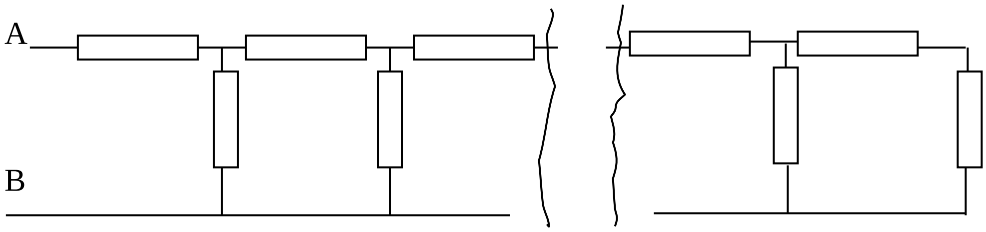
b) La energía cinética de la bala antes y después del impacto con la pelota son:

$$E_{c1} = ½ * 0{,}01*500^2 = 1250 \text{ J} \quad ; \quad E_{c2} = ½ * 0{,}01*104^2 = 54 \text{ J}$$

La energía cinética de la pelota es Ec = ½* $0{,}2*19{,}8^2$ = 40 J

En otras formas de energía aparecen 1250 – (54+40) = 1156 J, que supone el
(1156*100/1250) = 93% de la energía

2.- En la figura inferior tenemos una malla formada por infinitas resistencias, cada una de valor r ¿Cuál es la resistencia resultante entre A y B? 1ª Olimpiada de Física. Polonia 1967



Supongamos que la malla no es infinita sino que consta de 8 resistencias en total. En la terminación de la malla las dos últimas resistencias se encuentran en serie, por tanto su resistencia equivalente es 2r, a su vez esta resistencia equivalente se encuentra en paralelo con otra resistencia r , con lo cual la equivalente es :

$$\frac{1}{r_e} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2r} \quad ; \qquad r_e = \frac{2}{3} r$$

Esta resistencia equivalente se encuentra en serie con otra de valor r y la equivalente es 2/3 r + r = 5/3 r, ésta se encuentra en paralelo con otra de valor r y la equivalente es .

$$\frac{1}{r_e} = \frac{1}{r} + \frac{3}{5r} = \frac{8}{5r} \quad ; \qquad r_e = \frac{5r}{8}$$

Siguiendo el cálculo tenemos ahora una resistencia 5/8 r + r = 13/8 r, que se encuentra en paralelo con otra r

$$\frac{1}{r_e} = \frac{1}{r} + \frac{8}{13r} = \frac{21}{13r} \quad ; \qquad r_e = \frac{13r}{21}$$

Finalmente la resistencia entre A y B sería

$$R_{AB} = r + \frac{13}{21} r \quad = \quad r\left(1 + \frac{13}{21}\right)$$

Observemos la secuencia de cálculo: 2/3 ; 5/8 ; 13/21 ..... El numerador de una fracción se obtiene sumando el numerador y denominador de la anterior y el denominador se obtiene sumando el numerador obtenido con el denominador de la anterior, esto nos permite escribir que si x_{n-1} es el numerador del penúltimo término e y_{n-1} el denominador, el último término es:

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{(x_{n-1} + y_{n-1}) + y_{n-1}} = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{x_{n-1} + 2y_{n-1}}$$

Si la serie obtenida tiene un límite la diferencia entre los dos últimos términos debe ser nula

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} = 0 \quad ; \quad \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{x_{n-1} + 2y_{n-1}} - \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} = 0 \quad ; \quad \frac{\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} + 1}{\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} + 2} - \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} = 0$$

Si en la ecuación anterior hacemos $\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} = a$, resulta.

$$a = \frac{a+1}{a+2} \quad , \quad a^2 + a - 1 = 0 \quad , \quad \text{resolviendo} \quad : a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

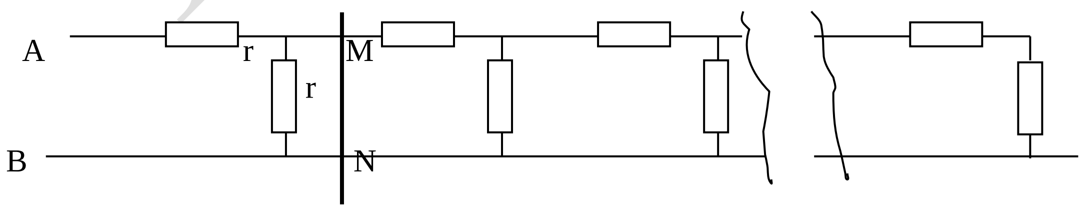
Si se considera la solución positiva resulta para el último término

$$\frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2} = \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

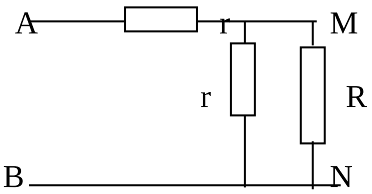
$$R_{AB} = r\left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right) = r\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Una manera más rápida de resolver este problema se basa en que en un circuito de infinitos términos no se altera el valor de su resistencia al añadir uno más o quitarlo.

.



Sea R la resistencia equivalente a todas las que están a la derecha de la línea MN. El circuito equivalente es el inferior, que también tiene una resistencia R



La resistencia del circuito inferior es:

$$R = r + \frac{rR}{r+R} \quad \Rightarrow \quad R^2 - rR - r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R = r\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$