

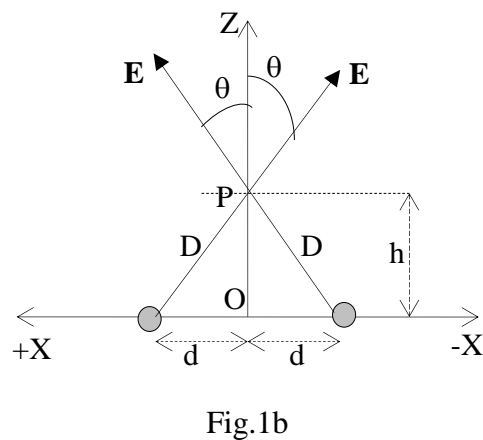
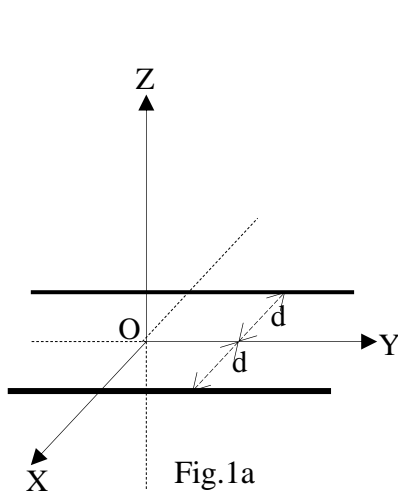
90.-(366).- Sobre el plano XY existen dos distribuciones rectilíneas de carga positiva, longitud infinita y densidad de carga lineal  $\lambda$ . Ambas son paralelas al eje Y siendo la distancia de cada una al origen de coordenadas  $d$ . Determinar:

- El módulo del campo eléctrico en puntos del eje Z cuya distancia al origen de coordenadas es  $+h$ .
- El valor de  $h$  para el que el módulo del campo es máximo.
- Un positrón se encuentra en la posición  $(0, 0, +h = 3 \text{ m})$  con una velocidad de  $v = -3,2 \cdot 10^7 \vec{k} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Calcular la ecuación de la velocidad de esa partícula en función de  $h$ , entre  $h = +3 \text{ m}$  y  $0$ . Construir la gráfica de la velocidad en función de  $h$ .

Datos: masa del positrón  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ , carga del positrón

$$q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \lambda = 10^{-8} \text{ C/m}, d = 1 \text{ m}. \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2},$$

- En la figura 1a existe un esquema de las distribuciones de carga y en la 1b visto el campo desde el eje Y.



Para calcular el módulo del campo creado por una de las distribuciones rectilíneas, hacemos uso del teorema de Gauss. Consideramos un cilindro de radio  $D$  y altura  $H$ , cuyo eje central es la distribución rectilínea (figura 2). Dada la simetría el flujo eléctrico solamente atraviesa el área lateral del cilindro y el vector campo es perpendicular en cada punto al eje.

La carga que está contenida en el cilindro es:  $\lambda H$ . El área lateral del cilindro es:  $2\pi DH$ . El campo en cada punto del área lateral tiene el mismo módulo. En la figura 2b se observa el cilindro visto desde una de sus bases se han dibujado varios vectores campo eléctrico, todos ellos son perpendiculares al eje que es la distribución rectilínea.

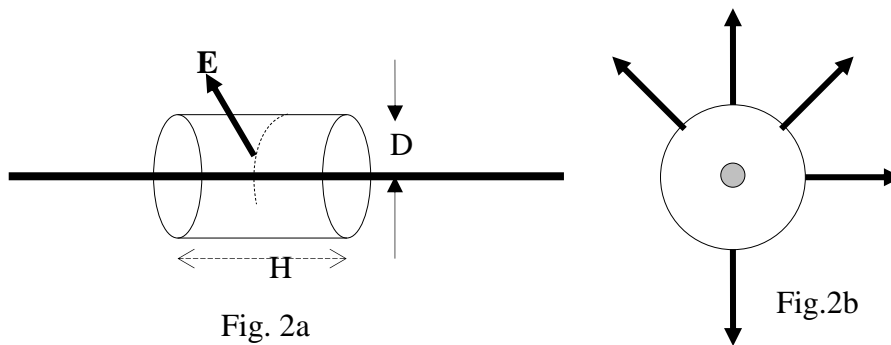


Fig. 2a

Fig.2b

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot S \cdot \cos 0^\circ = E \cdot 2\pi DH = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda H}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 D} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{h^2 + d^2}}$$

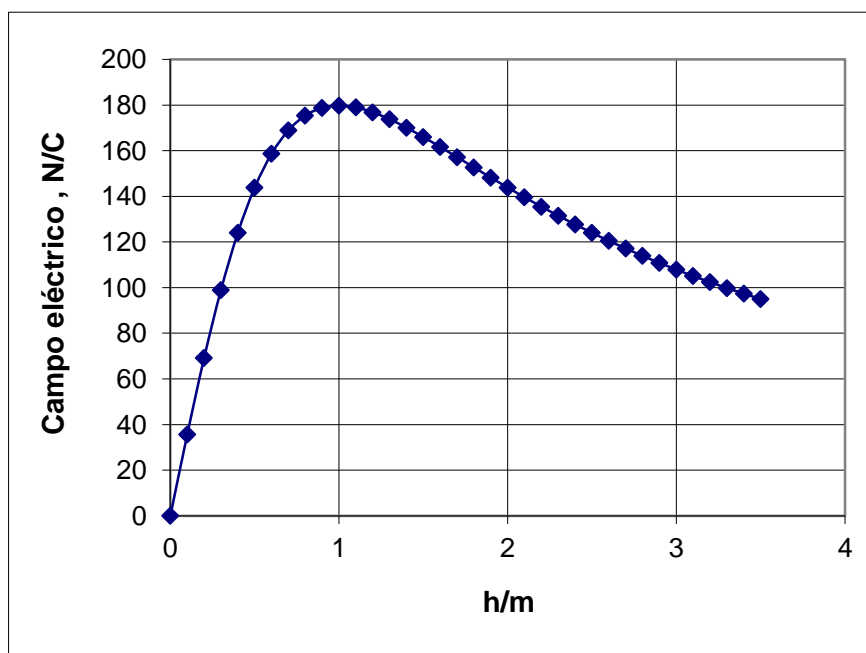
El módulo del campo total en el punto P es la suma de los dos vectores campo. Las componentes sobre el eje X se anulan y se suman las del eje Z.

$$E_p = 2 \cdot \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{h^2 + d^2}} \cos\theta = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 \sqrt{h^2 + d^2}} \cdot \frac{h}{D} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 \sqrt{h^2 + d^2}} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + d^2}} = \frac{\lambda h}{\pi\epsilon_0 (h^2 + d^2)}$$

El vector campo es:

$$\vec{E}_p = \frac{\lambda h}{\pi\epsilon_0 (h^2 + d^2)} \vec{k}$$

La representación del módulo del campo eléctrico frente a h es la grafica siguiente:



b) Para determinar cuál es el valor de h en el cual el módulo del campo es máximo, derivamos la ecuación anterior respecto de la variable h, e igualamos a cero.

$$\frac{dE_p}{dh} = \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0} \frac{(h^2 + d^2) \cdot 1 - h \cdot 2h}{(h^2 + d^2)^2} = 0 \Rightarrow h^2 + d^2 - 2h^2 = 0 \Rightarrow h = d$$

El módulo del campo máximo vale:

$$E_{p(\max)} = \frac{\lambda d}{\pi \epsilon_0 2d^2} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 d} = \frac{10^{-8}}{2\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1^2} = 179,8 \frac{N}{C}$$

c) El campo ejerce sobre el positrón una fuerza  $q\vec{E}_p$  de módulo  $q E_p$ , dirigida según el eje positivo de  $Z$ , en consecuencia, el campo hace disminuir la velocidad del positrón, ya que la aceleración está dirigida en el sentido de la fuerza:  $q\vec{E}_p = m\vec{a}$

El módulo de la aceleración es:

$$a = \frac{q}{m} \frac{\lambda h}{\pi \epsilon_0 (h^2 + d^2)} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} \Rightarrow \int \frac{q}{m} \frac{\lambda h}{\pi \epsilon_0 (h^2 + d^2)} dh = \int v dv \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{q\lambda}{m\pi \epsilon_0} \int \frac{h}{(h^2 + d^2)} = \frac{v^2}{2} + Cte \quad (1)$$

Para resolver la integral anterior hacemos un cambio de variables:

$$h^2 + d^2 = p^2 \Rightarrow h dh = p dp$$

$$\int \frac{h dh}{h^2 + d^2} = \int \frac{p dp}{p^2} = \int \frac{dp}{p} = \ln p = \ln \sqrt{h^2 + d^2}$$

Llevando el valor de la integral a (1)

$$\frac{q\lambda}{m\pi \epsilon_0} \ln \sqrt{h^2 + d^2} = \frac{v^2}{2} + Cte \quad (2)$$

Para determinar el valor de la constante de la ecuación (2) recurrimos a las condiciones iniciales: cuando  $v=3,2 \cdot 10^7$  m/s ,  $h=+3$  m

$$\frac{q\lambda}{m\pi\epsilon_0} \ln\sqrt{3^2 + d^2} = \frac{(3,2 \cdot 10^7)^2}{2} + \text{Cte} \Rightarrow \text{Cte} = \frac{q\lambda}{m\pi\epsilon_0} \ln\sqrt{3^2 + d^2} - 5,12 \cdot 10^{14} \Rightarrow$$

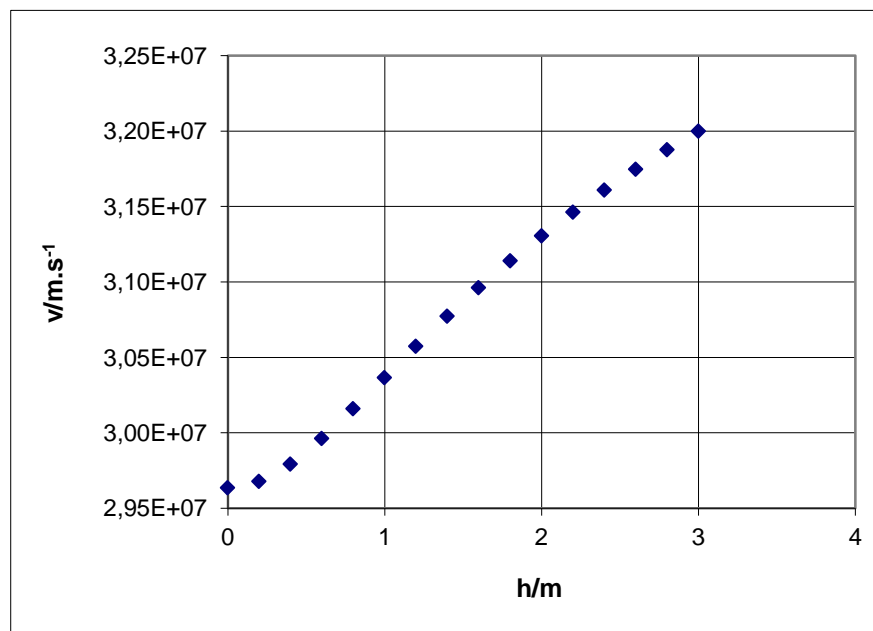
$$\Rightarrow \frac{q\lambda}{m\pi\epsilon_0} \ln\sqrt{h^2 + d^2} - \frac{q\lambda}{m\pi\epsilon_0} \ln\sqrt{3^2 + d^2} + 5,12 \cdot 10^{14} = \frac{v^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2q\lambda}{m\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{h^2 + d^2}}{\sqrt{10}} + 10,24 \cdot 10^{14} = v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2q\lambda}{m\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{h^2 + d^2}}{\sqrt{10}} + 10,24 \cdot 10^{14}}$$

Sustituyendo los valores numéricos resulta para la velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-8}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \ln \sqrt{\frac{h^2 + 1^2}{10}} + 10,24 \cdot 10^{14}} = \sqrt{1,265 \cdot 10^{14} \cdot \ln \sqrt{\frac{h^2 + 1^2}{10}} + 10,24 \cdot 10^{14}} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La representación de la velocidad frente a h es:



Observe que la velocidad disminuye a medida que el valor de h se acerca al origen de coordenadas.

91.-<sup>(371)</sup>.-Los átomos de muchos elementos químicos poseen una energía de ionización pequeña y pierden con facilidad sus electrones más externos. En cambio otros átomos de otros elementos tienen facilidad para aceptar electrones. Los iones positivos y negativos dependiendo de su tamaño pueden unirse dando lugar a estructuras cristalinas estables. Muchos sólidos exhiben estructuras cristalinas en las cuales los iones se disponen de forma ordenada dando lugar a disposiciones periódicas en el espacio. En un cristal ideal existe una ordenación llamada celdilla unidad que se repite a través del espacio.

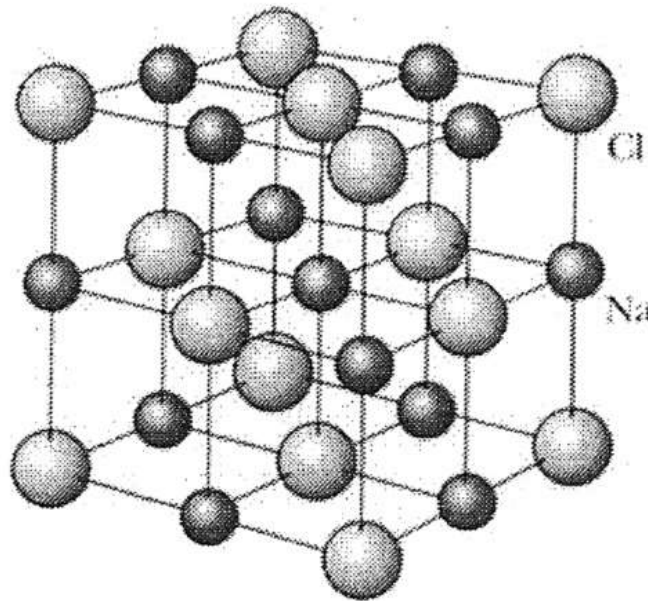


Fig.1.- El cloruro de sodio (NaCl) cristaliza en una red cúbica centrada en el espacio. La distancia entre los centros de dos iones contiguos es  $r_0$ .

La principal contribución a la energía de enlace de un cristal iónico está dada por la energía potencial electrostática de los iones.

La interacción coulombiana entre dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  situadas a una distancia  $R$ , se expresa mediante

$$U_C(R) = k \frac{q_1 q_2}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R} = 9 \cdot 10^9 \frac{q_1 q_2}{R}$$

Si  $U_C(R)$  es negativa indica que la fuerza entre los iones es de atracción. Los iones del cloruro de sodio tienen la misma carga (El ión sodio  $+e$  y el ión cloruro  $-e$ ). Si determinamos la energía de un cristal de tamaño infinito resulta:  $U_{at} = \alpha U_C(r)$ . En donde  $\alpha$  es una constante, llamada de Madelung, que depende de la geometría del

*crystal y no de la naturaleza de los iones. Para el cristal de cloruro de sodio  $\alpha = 1,7475$  y se utiliza para determinar la energía de un ión único en un cristal.*

*Al acercarse los iones de un cristal aparece una repulsión entre las nubes electrónicas de los iones, dando lugar a una energía de signo contrario a la electrostática.. Esta energía comparada con la coulombiana es de corto alcance. Existen dos modelos diferentes para describir esta repulsión*

**Modelo 1.-** *Una aproximación razonable es utilizar una función exponencial que describe la interacción de un ión seleccionado con la totalidad de la red cristalina*

$$U_{rp} = \lambda e^{-\frac{r}{\rho}} \quad , (\lambda, \rho > 0)$$

**Modelo 2.-** *Otra buena aproximación es*

$$U_{rp} = \frac{b}{r^n} \quad , \quad b > 0$$

*n representa el exponente de Born*

**Datos experimentales para el cristal de cloruro de sodio:**  
 $r_0 = 0,282 \text{ nm}$ ,

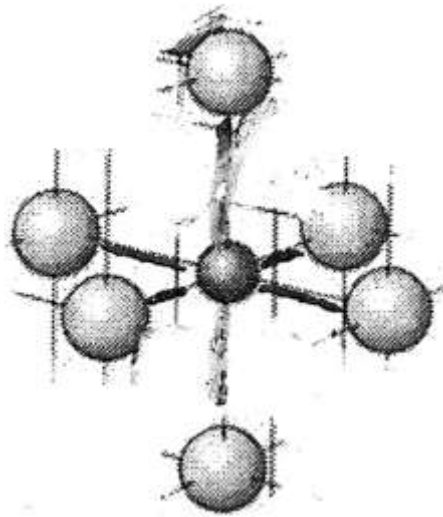
**energía de disociación de la red,  $E_{\text{dis}} = -764,4 \text{ kJ/mol}$**

$k = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$  ;  $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

**Propuesto en las Olimpiadas Asiáticas de Física**

**1.-** *Determinar  $U_C(\mathbf{R})$  para un ión localizado en el centro de la red cúbica ( fig.1), si solamente interactúa con los vecinos más próximos (incluyendo los que están a la distancia  $r = \sqrt{3} r_0$ ). Calcular el valor de la constante de Madelung con la aproximación anterior.*

1.- Nos fijamos en la figura 1 del enunciado y en el catión  $\text{Na}^+$  que ocupa el centro de la red. Este catión se encuentra rodeado de 6 iones  $\text{Cl}^-$  a una distancia  $r$  de cada uno de ellos. En la figura 2 hemos suprimido los iones que por ahora no interesan y nos hemos quedado con los seis que está a una distancia  $r$ . Compare la figura 1 con la 2.

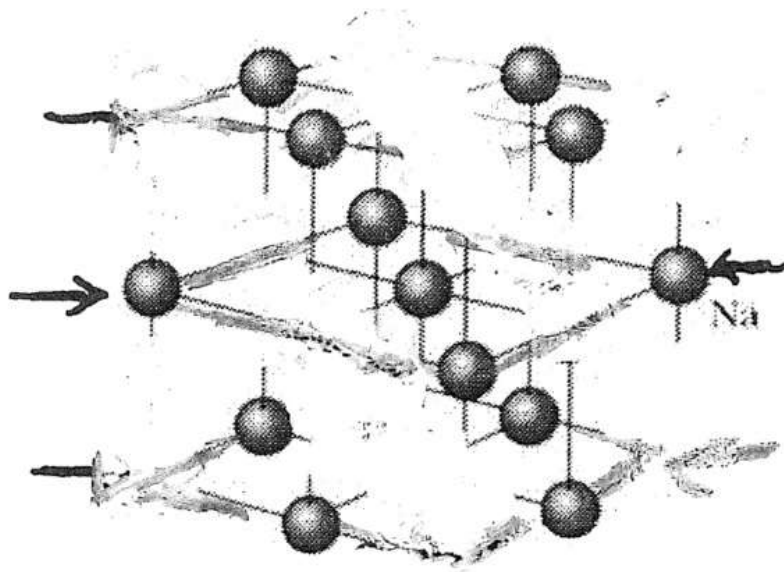


**Fig.2.- El catión central se encuentra rodeado a una distancia  $r$  de seis iones cloro**

$$U_1 = -6k \frac{e^2}{r}$$

El signo negativo significa que la fuerza entre el ión central y sus seis vecinos es una fuerza de atracción. Desde el punto de vista de la energía significa que si a partir de a figura 2 llevásemos los seis iones  $\text{Cl}^-$  al infinito deberíamos aportar un trabajo cuyo valor está dado por la expresión anterior.

Volvamos a la figura 1. El catión central está rodeado por 12 cationes del mismo signo a una distancia  $\sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2} r$ . Vea la figura 3 y compare con la 1.



**Fig.2.- El catión central se encuentra rodeado por 12 cationes, siendo la distancia  $\sqrt{2} r$ .**

$$U_2 = 12k \frac{e^2}{\sqrt{2} r}$$

El signo positivo indica que la fuerza es repulsiva y desde el punto de vista energético si a partir de la figura 2 llevásemos las 12 cargas al infinito nos proporcionaría energía.

En cada uno de los ocho vértices del cubo existe un anión  $\text{Cl}^-$  y a una distancia  $\sqrt{r^2 + r^2 + r^2} = \sqrt{3} r$ .

$$U_3 = -8 \frac{e^2}{\sqrt{3} r}$$

Para el sistema anterior

$$U_c(R) = U_1 + U_2 + U_3 = -k \frac{e^2}{r} \left( 6 - \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{3}} \right) = -k \frac{e^2}{r} \cdot 2,1335$$

El signo negativo indica que la estructura de la figura 1 es estable si quisiéramos llevar las cargas al infinito habría que aportar energía desde el exterior.

La constante de Madelung para este sistema vale 2,1335.

**2.- Utilice el modelo 1 y determine la energía potencial por ión. Calcule su ecuación de equilibrio  $r=r_0$  y escriba la energía potencial para  $r=r_0$ .**

$$U(r) = -\alpha k \frac{e^2}{r} + \lambda e^{-\frac{r}{\rho}}$$

Entre  $U(r)$  y la fuerza existe una relación

$$F(r) = -\frac{dU(r)}{dr} = -\left[ -\alpha k e^2 \cdot \frac{-1}{r^2} + \lambda e^{-\frac{r}{\rho}} \left( -\frac{1}{\rho} \right) \right]$$

La situación de equilibrio se produce cuando  $F(r)=0$

$$F(r_0) = -\frac{\alpha k e^2}{r_0^2} + \frac{\lambda e^{-\frac{r_0}{\rho}}}{\rho} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha k e^2}{r_0^2} = \frac{\lambda e^{-\frac{r_0}{\rho}}}{\rho} \Rightarrow e^{-\frac{r_0}{\rho}} = \frac{\alpha k e^2 \rho}{r_0^2 \lambda}$$

Sustituyendo la ecuación anterior en  $U(r)$ , resulta:

$$U(r_0) = -\alpha k \frac{e^2}{r_0} + \lambda \frac{\alpha k e^2 \rho}{r_0^2 \lambda} = -\alpha k \frac{e^2}{r_0} \left( 1 - \frac{\rho}{r_0} \right)$$

**3.- Utilizando los datos experimentales estimar el orden del parámetro  $\rho$ . Use  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .**



$$\begin{aligned}
& -764,4 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{mol}} / \frac{1}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}} = \\
& -1,74756 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{(1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{0,282 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \left(1 - \frac{\rho}{0,282 \cdot 10^{-9} \text{ m}}\right) \Rightarrow \\
& \Rightarrow 0,889 - 1 = -\frac{\rho}{0,282 \cdot 10^{-9}} \Rightarrow \rho = 3,13 \cdot 10^{-11} \text{ m}
\end{aligned}$$

4.- Utilice el modelo 2 y determine la energía potencial por ión. Calcule su ecuación de equilibrio  $r=r_0$  y escriba la energía potencial para  $r=r_0$ .

$$U(r) = -\alpha k \frac{e^2}{r} + \frac{b}{r^n}$$

$$F(r) = -\frac{dU(r)}{dr} = -\left[-\alpha k e^2 \cdot \frac{-1}{r^2} - \frac{b n r^{n-1}}{r^{2n}}\right]$$

La situación de equilibrio se produce cuando  $F(r)=0$

$$\begin{aligned}
F(r_0) = -\frac{dU(r)}{dr} = -\left[-\alpha k e^2 \cdot \frac{-1}{r_0^2} - \frac{b n}{r_0^{n+1}}\right] = 0 & \Rightarrow \frac{b n}{r_0^{n+1}} = \alpha k e^2 \cdot \frac{1}{r_0^2} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{b}{r_0^n} = \frac{\alpha k e^2}{r_0 n} \\
U(r_0) = -\frac{\alpha k e^2}{r_0} + \frac{\alpha k e^2}{r_0 n} = -\frac{\alpha k e^2}{r_0} \left(1 - \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

5.- A partir de los datos experimentales calcule el exponente de Born para el NaCl. Estimar la relación entre la energía de Coulomb y la que corresponde a la parte de repulsión.

$$-\frac{764,4 \cdot 10^3}{6,022 \cdot 10^{23}} = \frac{-1,74756 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot (1,602 \cdot 10^{-19})^2}{0,282 \cdot 10^{-9}} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \Rightarrow 0,889 - 1 = -\frac{1}{n} \Rightarrow n = 9$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha k e^2}{r_0} = n = 9 \\
& \frac{\alpha k e^2}{r_0 n}
\end{aligned}$$

6.- La energía de ionización (requerida para arrancar un electrón de un átomo en su estado fundamental) del Na es +5,14 eV, la afinidad electrónica (energía desprendida al adicionar un electrón a un átomo)

**del Cl es -3,61 eV. Calcular la energía total de enlace por átomo en el cristal NaCl. El valor experimental  $E_{exp}=-3,28$  eV**

Para formar un catión  $\text{Na}^+$  y un ión cloro  $\text{Cl}^-$  hay que aportar

$$5,14-3,61=1,53 \text{ eV}$$

Cando un mol de iones de sodio se une con un mol de iones de cloro a la distancia de equilibrio de la red cristalina se desprende energía, o dicho de otro modo hay que aportar energía para separar un mol de NaCl cristalino en sus iones.

Utilizamos el valor experimental dado en el problema para la energía de disociación de la red, que vale -764,4 kJ por mol de NaCl y que por un par de iones es:

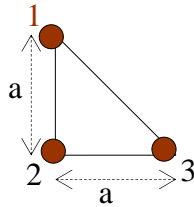
$$-\frac{764,4 \cdot 10^3}{6,02 \cdot 10^{23}} = 1,27 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -1,27 \cdot 10^{-18} \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = -\frac{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ eV}}{\text{J}} = -7,92 \text{ eV}$$

El balance por cada par de iones ( $\text{Cl}^-$ ,  $\text{Na}^+$ ) es:

$$-7,93+1,53=-6,40 \text{ eV}$$

El balance para cada ión es: -3,20 eV

92.-(372).-En los vértices de un triángulo rectángulo isósceles existen tres esferas de radio  $r$  cada una y dotadas de una carga  $q$ . Cada lado igual del mencionado triángulo vale  $a$ , siendo  $a \gg r$ .



**Primera operación.** Las esferas 1 y 2 se conectan entre sí mediante un hilo conductor y una vez alcanzado el equilibrio se retira el hilo.

**Segunda operación.** A continuación se hace la operación anterior entre las esferas 2 y 3.

**Tercera operación.** Finalmente se conectan las esferas 3 y 1 y como anteriormente, alcanzado el equilibrio, se retira el hilo. Calcular la carga de cada esfera después de realizar las tres operaciones anteriores.

*Primera operación. Interacción entre las cargas 1 y 2.*

Al conectar las esferas 1 y 2 y después de retirar el hilo y alcanzarse el equilibrio, los potenciales de ambas deben ser iguales. El potencial de la esfera 1 es la suma de tres potenciales a) El potencial creado por su carga, b) el potencial creado por la esfera 2 y c) el potencial creado por la esfera 3. Análogamente para la esfera 2. En la figura 1 se dispone esquemáticamente el proceso antes de la unión y después de dicha unión.

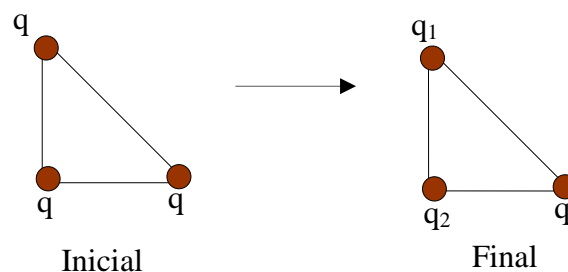


Fig.1

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{a} + \frac{q}{\sqrt{2}a} = \frac{q_2}{r} + \frac{q_1}{a} + \frac{q}{a} \Rightarrow q_1 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) - q_2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) = q \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{2}a} \right) \Rightarrow$$

$$(q_1 - q_2) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) = q \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}a} \Rightarrow q_1 - q_2 = q \frac{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}a}}{\frac{a-r}{ar}}, \text{ aproximación : } a-r \approx a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_1 - q_2 = q \frac{r}{a} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

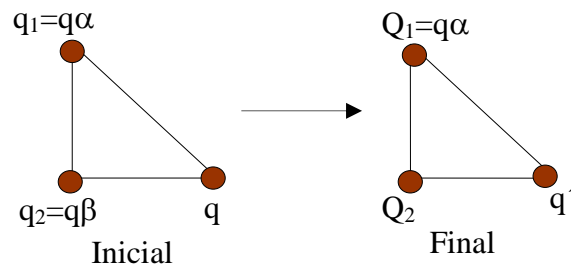
La conservación de la carga nos permite escribir  $q_1 + q_2 = 2q$  (2).  
Sumamos (1) y (2)

$$2q_1 = 2q + q \frac{r}{a} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow q_1 = q \left[ 1 + \frac{r}{a} \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \right] = q\alpha$$

Restamos (1) y (2)

$$-2q_2 = q \frac{r}{a} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} - 2q \Rightarrow q_2 = q \left( 1 - \frac{r}{a} \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \right) = q\beta$$

*Segunda operación. Interacción entre las cargas 2 y 3.*



$$\frac{Q_2}{r} + \frac{Q_1}{a} + \frac{q'}{a} = \frac{q'}{r} + \frac{Q_2}{a} + \frac{Q_1}{\sqrt{2}a} \Rightarrow Q_2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) - q' \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) = Q_1 \left( \frac{1}{\sqrt{2}a} - \frac{1}{a} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Q_2 - q') \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) = Q_1 \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}a} \Rightarrow Q_2 - q' = Q_1 \frac{1 - \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}a}{a-r}} \approx Q_1 \frac{r}{a} \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = q\alpha\gamma \quad (3)$$

Conservación de la carga

$$Q_1 + Q_2 + q' = 3q \Rightarrow q\alpha + Q_2 + q' = 3q \Rightarrow Q_2 + q' = q(3 - \alpha) \quad (4)$$

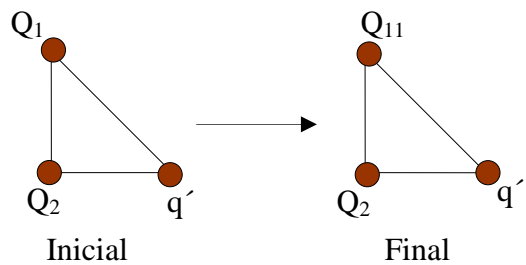
Sumamos (3) y (4)

$$2Q_2 = q\alpha\gamma + q(3 - \alpha) \Rightarrow Q_2 = \frac{q(3 + \alpha\gamma - \alpha)}{2} = q \left[ \frac{3}{2} + \frac{\alpha(\gamma - 1)}{2} \right]$$

Restamos (3) y (4)

$$-2q' = q\alpha\gamma - q(3 - \alpha) \Rightarrow q' = \frac{q(3 - \alpha) - q\alpha\gamma}{2} = \frac{q(3 - \alpha - \alpha\gamma)}{2} = q \left[ \frac{3}{2} - \frac{\alpha(1 + \gamma)}{2} \right]$$

Tercera operación. Interacción entre las cargas 3 y 1.



$$\frac{q''}{r} + \frac{Q_2}{a} + \frac{Q_{11}}{a\sqrt{2}} = \frac{Q_{11}}{r} + \frac{Q_2}{a} + \frac{q''}{\sqrt{2}a} \Rightarrow q'' \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{2}a} \right) - Q_{11} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a\sqrt{2}} \right) = Q_2 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q'' = Q_{11}$$

Conservación de la carga:

$$Q_{11} + Q_2 + q'' = 3q \Rightarrow 2Q_{11} = 3q - Q_2 = 3q - q \left[ \frac{3}{2} + \frac{\alpha(\gamma - 1)}{2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_{11} = q'' = q \left[ \frac{3}{2} - \frac{3}{4} - \frac{\alpha(\gamma - 1)}{4} \right]$$

*Cargas de las tres esferas al finalizar las tres operaciones*

Calculamos

$$\alpha(\gamma-1) = \left(1 + \frac{r}{a} \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right) \left(\frac{r}{a} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - 1\right) = \frac{r}{a} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - 1 + \left(\frac{r}{a} \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right) \left(\frac{r}{a} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) - \frac{r}{a} \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$$

Despreciando el término  $\left(\frac{r}{a}\right)^2$ , frente a  $r/a$ ., nos queda:

$$\alpha(\gamma-1) = \frac{r}{a} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - 1 - \frac{r}{a} \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{r}{a} \left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right) - 1 = \frac{r}{a} \left(\frac{2-2\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right) - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(\gamma-1) = \frac{r}{a} \left(\frac{3-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) - 1$$

Esfera 1

1.

$$q_{f\text{ inal}}(1) = q \left[ \frac{3}{2} - \frac{3}{4} - \frac{\alpha(\gamma-1)}{4} \right] = q \left[ \frac{3}{2} - \frac{3}{4} - \frac{\frac{r}{a} \left(\frac{3-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) - 1}{4} \right] = q \left[ 1 - \frac{\frac{r}{a} \left(\frac{3-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)}{4} \right] \Rightarrow$$

$$q_{f\text{ inal}}(1) = q \left[ 1 + \frac{\frac{r}{a} \left(\frac{3\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}}\right)}{4} \right]$$

Esfera 2:

$$q_{f\text{ inal}}(2) = q \left[ \frac{3}{2} + \frac{\alpha(\gamma-1)}{2} \right] = q \left[ \frac{3}{2} + \frac{\frac{r}{a} \left(\frac{3-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) - 1}{2} \right] = q \left[ 1 + \frac{\frac{r}{a} \left(\frac{3-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)}{2} \right] \Rightarrow$$

$$q_{f\text{ inal}}(2) = q \left[ 1 - \frac{\frac{r}{a} \left(\frac{3\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}}\right)}{2} \right]$$

Esfera 3

$$q_{\text{final}}(3) = q \left[ 1 + \frac{\frac{r}{a} \left( \frac{3\sqrt{2} - 3}{2\sqrt{2}} \right)}{4} \right]$$

93.-(378).-Tres cargas eléctricas están situadas sobre el eje de abscisas de un sistema de coordenadas, tal como se observa en la figura 1.

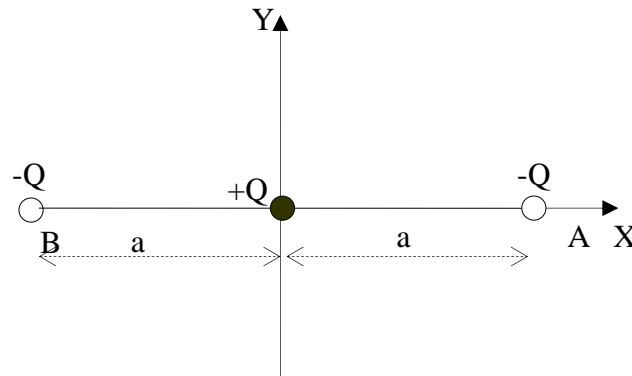


Fig.1

- Calcular la fuerza que actúa sobre cada carga por acción de las otras dos.
- Comprobar si en el eje de abscisas positivo existe algún lugar en que el potencial sea nulo
- Comprobar si en el eje de ordenadas positivo existe algún lugar en que el potencial sea nulo
- Establecer la ecuación del campo eléctrico sobre el eje de ordenadas positivo y determinar el lugar en que ese campo es nulo.
- Si  $a = 1 \text{ m}$ , representar, con ayuda de la hoja de cálculo, el potencial a lo largo del eje de abscisas positivo.
- Escribir la ecuación del potencial eléctrico para los puntos situados en la bisectriz del primer cuadrante.
- Con ayuda de la hoja de cálculo, dibujar la gráfica del potencial utilizando los datos y  $a = 1 \text{ m}$ .

$$\text{Datos. } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2} \quad ; \quad Q = \frac{1}{9} 10^{-9} \text{ C}$$

a) La fuerza que ejerce la carga positiva sobre la carga  $-Q$  situada en A es una fuerza atractiva

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2} (-\vec{i})$$

La que ejerce la otra carga negativa es repulsiva

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(2a)^2} (+\vec{i})$$

La fuerza total



$$\vec{F}_{TA} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2} (-\vec{i}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4a^2} (+\vec{i}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q^2}{4a^2} (-\vec{i})$$

La fuerza que actúa sobre la carga situada en B es:

$$\vec{F}_{TB} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2} (+\vec{i}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4a^2} (-\vec{i}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q^2}{4a^2} (+\vec{i})$$

Sobre la carga situada en el origen de coordenadas actúan dos fuerza iguales y de signo contrario cuya resultante es nula.

b) Para abscisas positivas siendo la distancia  $x$  al origen de coordenadas  $x > a$ , no puede existir un lugar de potencial nulo, ya que la carga en A siempre crea un potencial negativo mayor que el positivo de la carga situada en O. Veamos ahora si puede existir cuando  $x < a$

$$V_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{a-x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{a+x} \right) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{a-x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{a+x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-x(a+x) + (a-x)(a+x) - x(a-x)}{(a-x)x(a+x)} = \frac{-x(a+x) + (a-x)(a+x-x)}{(a-x)x(a+x)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -xa - x^2 + a^2 - xa = 0 \Rightarrow x^2 + 2ax - a^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 + 4a^2}}{2} = -a \pm a\sqrt{2}$$

La solución para  $x$  positivo es:  $x = a(\sqrt{2} - 1)$ .

c) Designamos con  $y$  a la ordenada de un punto situado en el eje de ordenadas y para ese punto el potencial eléctrico es:

$$V_Y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{\sqrt{a^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + y^2}} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{2}{\sqrt{a^2 + y^2}} + \frac{1}{y} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{a^2 + y^2}} + \frac{1}{y} = 0 \Rightarrow \frac{1}{y^2} = \frac{4}{a^2 + y^2} \Rightarrow a^2 + y^2 = 4y^2 \Rightarrow y = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

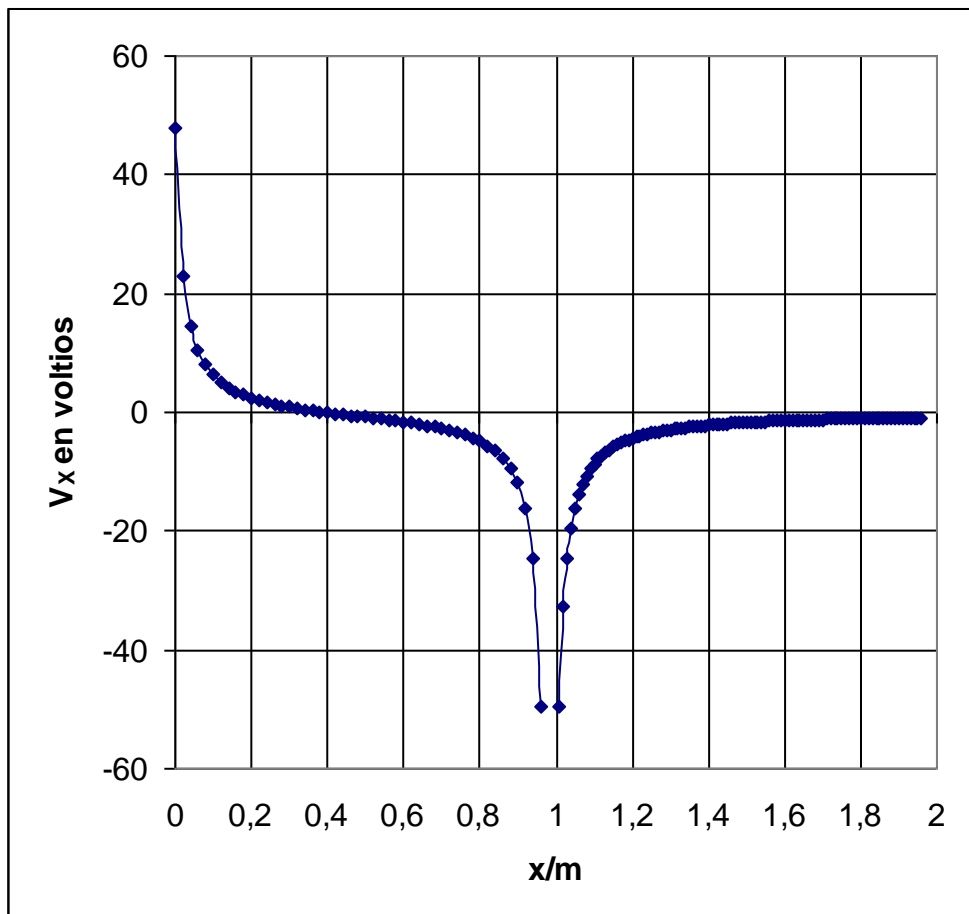
d) La relación entre el módulo del campo y el potencial es:

$$E = -\frac{dV}{dy} = -\frac{d}{dy} \left[ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{2}{\sqrt{a^2 + y^2}} + \frac{1}{y} \right) \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{-2 \frac{2y}{2\sqrt{a^2 + y^2}}}{a^2 + y^2} - \frac{1}{y^2} \right) \Rightarrow$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2y}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{y^2} \right] = 0 \Rightarrow \left[ \frac{2y}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{y^2} \right] = 0 \Rightarrow 2y^3 = (a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2y^3)^{\frac{2}{3}} = a^2 + y^2 \Rightarrow 2^{\frac{2}{3}} y^2 = a^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{a^2}{2^{\frac{2}{3}} - 1} \Rightarrow y = \frac{a}{\sqrt{2^{\frac{2}{3}} - 1}}$$

e)



f) Las coordenadas de cualquier punto P que esté en la bisectriz las designamos con  $(x,y)$ , con la particularidad de que en este caso  $x=y$ .

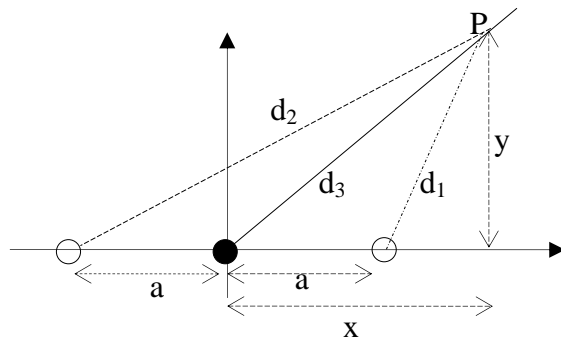


Fig. 1

De la figura 1 se deduce:

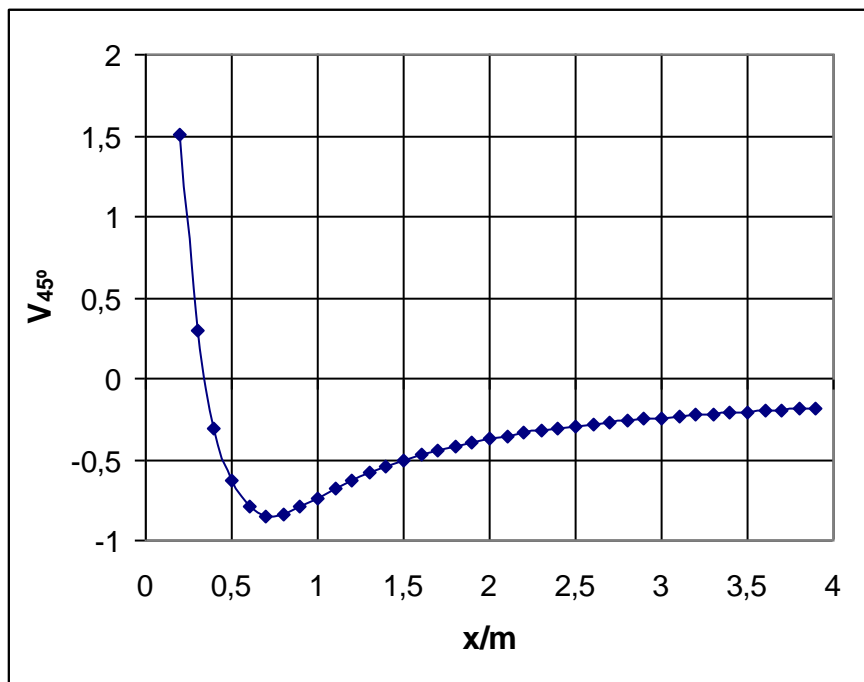
$$d_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x-a)^2 + x^2} ; \quad d_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = \sqrt{(x+a)^2 + x^2}$$

$$d_3 = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2} x$$

El potencial es:

$$V_{45^\circ} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + x^2}} + \frac{1}{\sqrt{2} x} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + x^2}} \right]$$

g)



94.-(380).- Una distribución esférica de carga está dada por:

$$\rho = \rho_0 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \text{ cuando } r \leq a \text{ y } \rho = 0, \text{ cuando } r > a$$

- Calcular la carga total  $Q$
- Determinar el módulo del campo eléctrico y el potencial para el exterior de la carga
- Encontrar lo mismo del apartado anterior para el interior de la distribución esférica.
- Comprobar que el módulo del campo es máximo cuando  $r/a=0,745$
- La distribución de carga anterior se aplica bastante bien a los núcleos ligeros. Obtener las gráficas del campo y del potencial si  $a$  es igual a  $4,5 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ .

**Problema propuesto en el libro Campos y Ondas Electromagnéticas. P.Lorrain y D.R. Corson.**

a) Consideramos una corona esférica de radio  $x$  y espesor  $dx$  cuyo centro es el de la distribución esférica. La carga de dicha corona es:

$$dq = \rho dV = \rho_0 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) 4\pi x^2 dx = 4\pi \rho_0 \left( x^2 - \frac{x^4}{a^2} \right) dx$$

Para hallar la carga total debemos sumar las contribuciones de todas las coronas que abarcan la distribución esférica, esto es, integrar la expresión anterior entre los límites cero y  $a$ .

$$Q = 4\pi \rho_0 \int_0^a \left( x^2 - \frac{x^4}{a^2} \right) dx = 4\pi \rho_0 \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5a^2} \right]_0^a = 4\pi \rho_0 \frac{2a^2}{15} = \frac{8\pi \rho_0 a^3}{15}$$

b) Ahora consideramos una esfera de radio  $r > a$  con centro en la distribución de carga y dada la simetría del problema aplicamos el teorema de Gauss.

$$\int \vec{E}_{\text{ext}} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = E_{\text{ext}} \cdot 4\pi r^2 = \frac{8\pi \rho_0 a^3}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{\text{ext}} = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^2}$$

Para calcular el potencial utilizamos la relación entre el campo y el potencial

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow -V = \int E dr = \int \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^2} dr = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0} \frac{1}{r} - \text{Cte} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0} \frac{1}{r} + \text{Cte}$$

La constante de integración la determinamos por el hecho de que el potencial eléctrico en el infinito es cero, lo cual conduce a que  $\text{Cte}=0$ , y el potencial es:

$$V_e = \frac{2\rho_o a^3}{15\varepsilon_o r}$$

c) Para determinar el módulo del campo en el interior de la carga hacemos también uso del teorema de Gauss y consideramos una esfera concéntrica con la distribución de la carga y radio  $r < a$

$$E_{\text{int}} 4\pi r^2 = \frac{Q_i}{\varepsilon_o}$$

En este caso  $Q_i$  es la carga que existe entre el centro de la distribución y  $r$ ; y es una cuantía que hemos de calcular.

El procedimiento es el mismo que hemos utilizado en el apartado a, salvo que ahora los límites de la integral son de cero a  $r$

$$Q_i = 4\pi\rho_o \int_0^r \left( x^2 - \frac{x^4}{a^2} \right) dx = 4\pi\rho_o \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5a^2} \right]_0^r = 4\pi\rho_o \left[ \frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2} \right]$$

$$E_{\text{int}} = \frac{4\pi\rho_o \left[ \frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2} \right]}{4\pi r^2 \varepsilon_o} = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o} \left( \frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2} \right)$$

Para hallar el potencial utilizamos la relación entre éste y el campo

$$-V_i = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o} \int \left( \frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2} \right) dr = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o} \left( \frac{r^2}{6} - \frac{r^4}{20a^2} - \text{Cte} \right) \Rightarrow V_i = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o} \left( \frac{r^4}{20a^2} - \frac{r^2}{6} + \text{Cte} \right)$$

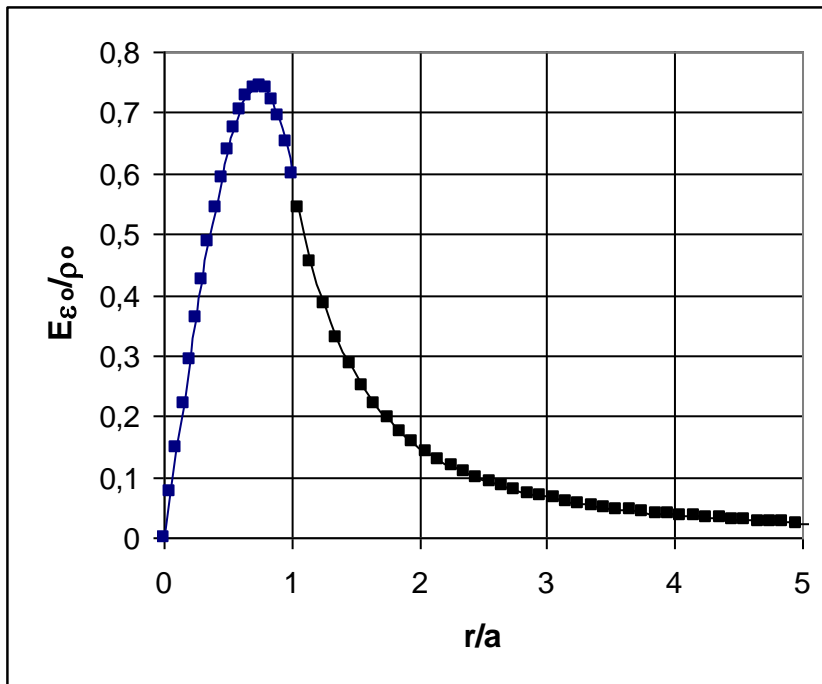
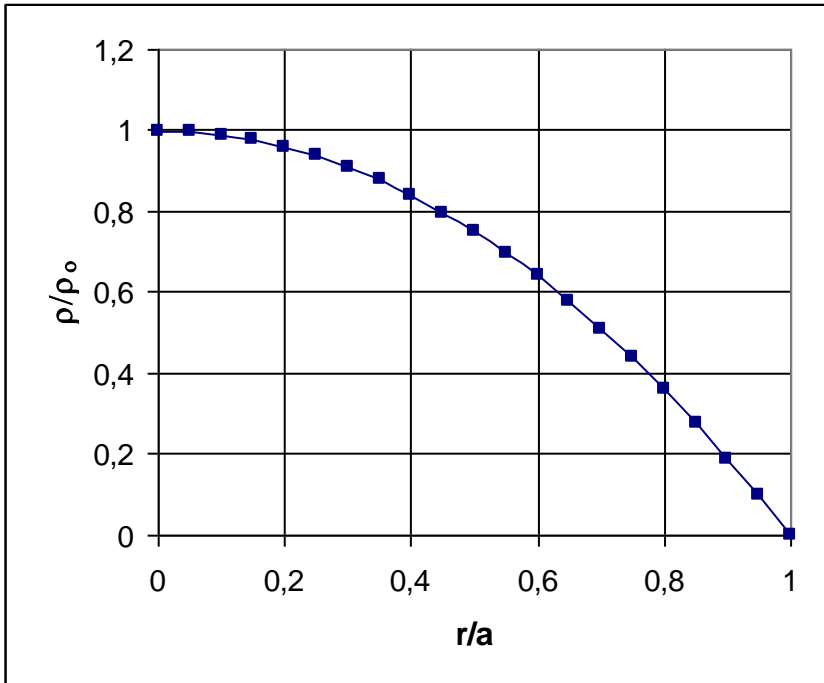
Cuando  $r = a$ , se cumple que:  $V_i = V_e$

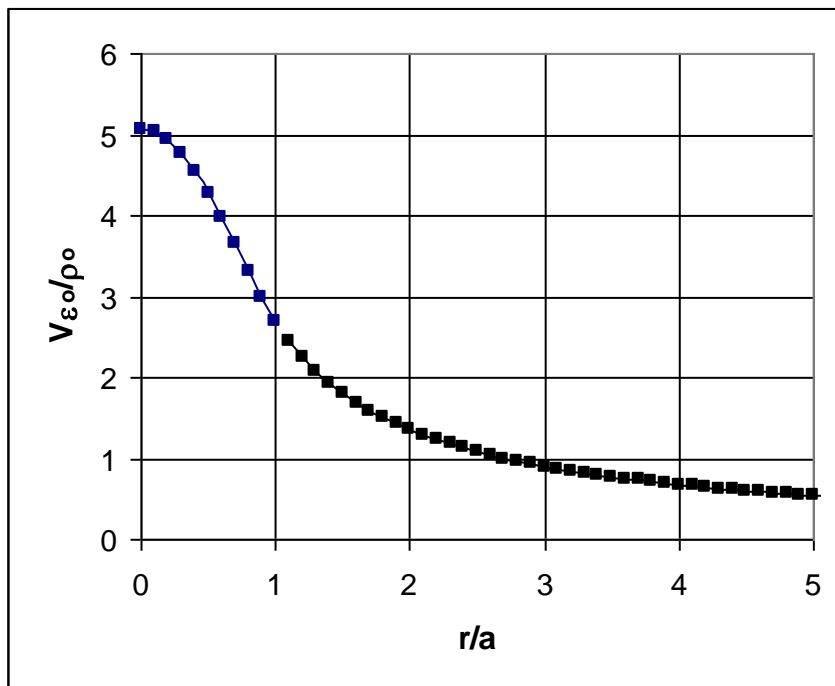
$$\frac{2\rho_o a^3}{15\varepsilon_o a} = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o} \left( \frac{a^4}{20a^2} - \frac{a^2}{6} + \text{Cte} \right) \Rightarrow \frac{2a^2}{15} = \frac{a^2}{20} - \frac{a^2}{6} + \text{Cte} \Rightarrow \text{Cte} = \frac{2a^2}{15} - \frac{a^2}{20} + \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{4}$$

El potencial es:  $V_i = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o} \left( \frac{r^4}{20a^2} - \frac{r^2}{6} + \frac{a^2}{4} \right)$

d) Para calcular el máximo, derivamos la ecuación del módulo del campo  $E_{\text{int}}$  respecto de  $r$ , e igualamos a cero.

$$\frac{dE_{\text{int}}}{dr} = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o} \left( \frac{1}{3} - \frac{3r^2}{5a^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{5a^2 - 9r^2}{15a^2} = 0 \Rightarrow 5a^2 = 9r^2 \Rightarrow \frac{r}{a} = \sqrt{\frac{5}{9}} = 0,745$$





95.-(381).- Un galvanómetro lleva pivotada una bobina cuyas espiras son rectangulares de dimensiones  $a$  y  $b$ . La bobina consta de  $N$  espiras. El resorte ligado a la bobina tiene una constante de torsión  $k$ , cuyo par mecánico restaurador es  $k\theta$ , siendo  $\theta$  el ángulo que gira la bobina. La inducción del campo magnético es  $B$  y actúa en el seno de toda la superficie de la bobina.

a) Calcular la relación  $\frac{\theta}{I}$  del aparato, siendo  $\theta$  el ángulo girado e  $I$  la intensidad de la corriente que pasa por la bobina.

b) Determinar la potencia que consume el galvanómetro y la relación entre el ángulo girado y la potencia

c) Si la resistencia óhmica de la bobina es  $18 \Omega$ ,  $a = 1 \text{ cm}$  y  $b = 2 \text{ cm}$ ,  $B=0,05 \text{ T}$ ,  $N = 20$  espiras, determinar la constante  $k$  del resorte si el ángulo girado vale  $30^\circ$  cuando la intensidad que circula por el aparato es  $0,01 \text{ A}$ .

- a) Antes de contestar al apartado recordemos cómo es la interacción de la bobina con el campo magnético. Para mayor sencillez consideramos una espira como la indicada en la figura 1a.

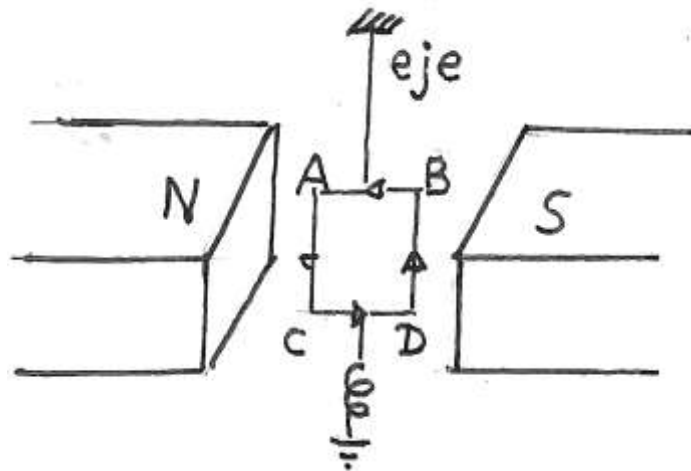


Fig.1a

El campo magnético se dirige del polo norte al sur del electroimán. La espira está recorrida por una corriente de intensidad  $i$  que circula en el sentido ACDB; este sentido determina que la espira tenga una cara NORTE observada tal como indica la figura 1a. La espira se caracteriza por un vector  $\vec{S}$ , perpendicular a su plano siendo su módulo  $S=ab$ . En la figura 1b (que es una ampliación de la espira de la figura 1a) se ha dibujado el vector superficie, que en forma una ángulo de  $90^\circ$  con el vector campo magnético.



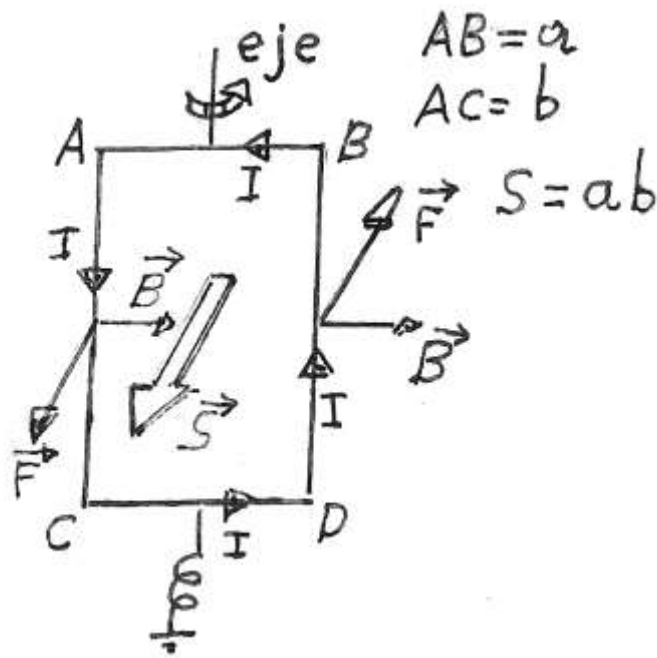


Fig.1b

La espira está sometida a un momento magnético que vale:

$$\vec{M}_M = i\vec{S} \times \vec{B}$$

Este momento hace girar a la espira y si no hubiese resorte y no hubiese rozamiento, la espira se colocaría en el campo magnético, de modo que los vectores  $\vec{B}$  y  $\vec{S}$  tendrían la misma dirección y sentido, o dicho de otra manera, el flujo magnético penetraría por la cara SUR de la espira y saldría por la cara NORTE, pero como existe un resorte que crea un momento mecánico opuesto al magnético se alcanza una situación de equilibrio cuando ambos se igualen y entonces la espira formaría un ángulo con la dirección del campo B.

Igualando los módulos de los momentos magnético y mecánico, resulta:

$$iSB \sin\theta = k\theta$$

De la ecuación anterior se deduce que no existe proporcionalidad directa entre el ángulo girado y la intensidad de la corriente. Para evitar esto, el imán de un galvanómetro no tiene los polos magnéticos planos como indica la figura 1, sino que son curvos y dan lugar a un campo magnético radial, el cual determina que el flujo magnético que atraviesa la bobina sea prácticamente constante e independiente de la posición que ocupe en el mencionado campo, de esta manera, al desaparecer el seno del ángulo, existe proporcionalidad directa entre el ángulo girado y la intensidad de la corriente que atraviesa la bobina.

$$NiSB = k\theta \Rightarrow \frac{\theta}{i} = \frac{NSB}{k} = \frac{NabB}{k}$$

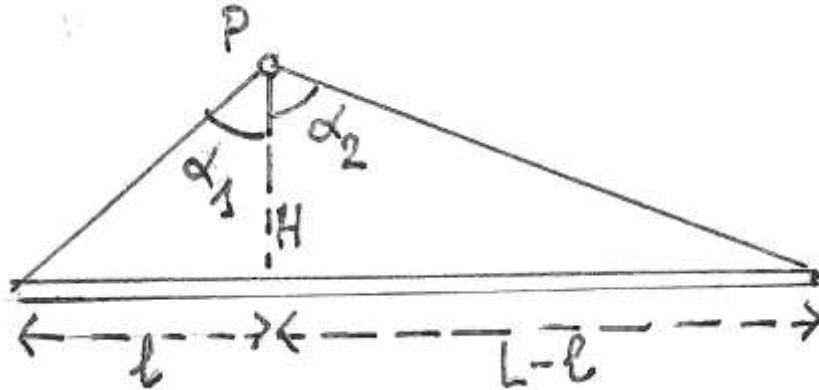
b) La potencia consumida en la bobina vale:

$$P = i^2 R = \frac{k^2 \theta^2 R}{N^2 S^2 B^2} \Rightarrow \theta = \frac{N a b B}{k \sqrt{R}} \sqrt{P}$$

c)

$$\frac{\theta}{i} = \frac{N a b B}{k} \Rightarrow k = \frac{N a b B i}{\theta} = \frac{20 \cdot (10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-2}) \text{m}^2 \cdot 0,05 \frac{\text{N}}{\text{A m}} \cdot 0,01 \text{A}}{30 \frac{\pi}{180}} = 3,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$$

96.-(383).- Un alambre de longitud  $L$  posee una densidad de carga lineal positiva y constante  $\lambda$ . Un punto  $P$ , fuera del alambre, se encuentra a una distancia  $H$  contada en sentido vertical y  $l$  en sentido horizontal de un extremo del alambre (ver figura inferior).



- Calcular el campo eléctrico en el punto  $P$ .
- Determinar el valor del campo si  $P$  equidista de los extremos del alambre.
- Representar  $E(Y)$  frente a  $l$  y  $E(X)$  frente a  $l$  cuando  $H=1\text{ m}$ ,  $\lambda= \frac{1}{9} \cdot 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}}$ ,  $L=1\text{ m}$ .

Dato:  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}$

a) Tomamos unos ejes coordenados como se indica en la figura 1. y consideramos un elemento de longitud  $dp$  que dista  $\rho$  del origen de coordenadas. Ese elemento crea en  $P$  un campo eléctrico  $d\vec{E}_\rho$ , cuyas componentes vectoriales sobre los ejes coordenados son:  $d\vec{E}_\rho(X)$  y  $d\vec{E}_\rho(Y)$ .

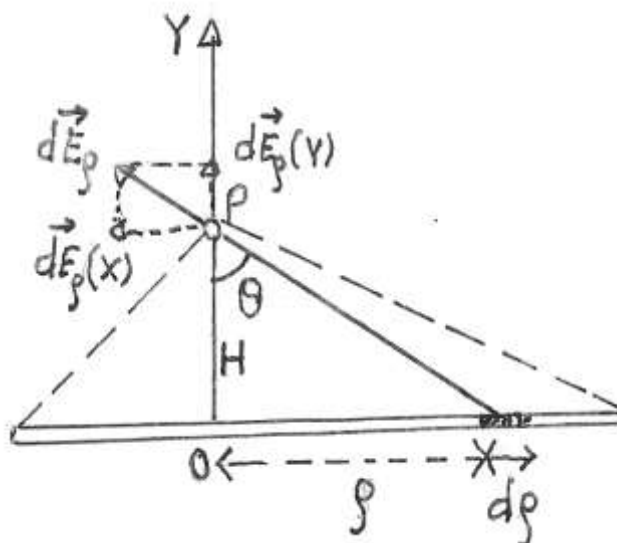


Fig.1

El campo elemental en P vale  $d\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r$  y tiene dos componentes según los ejes  $dE_p(X)$  y  $dE_p(Y)$

Calculamos los módulos de  $d\vec{E}_p$  y  $d\vec{E}_p(Y)$

$$dE_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\rho}{H^2 + \rho^2} \Rightarrow dE_p(Y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\rho}{H^2 + \rho^2} \cos\theta$$

En la ecuación anterior existen dos variables  $\rho$  y  $\theta$ , que se relacionan entre sí. De la figura 1 se deduce:

$$\text{tag}\theta = \frac{\rho}{H} \Rightarrow \rho = H \text{tag}\theta \Rightarrow d\rho = \frac{H}{\cos^2\theta} d\theta \Rightarrow$$

$$dE_p(Y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \frac{H}{\cos^2\theta} d\theta}{H^2 + H^2 \text{tag}^2\theta} \cdot \cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi H \epsilon_0} \frac{d\theta}{\cos^2\theta \left(1 + \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\right)} = \frac{\lambda}{4\pi H \epsilon_0} \cos\theta d\theta$$

La contribución de todos los elementos  $d\rho$  comprendidos entre cero y  $\alpha_2$  (ángulo que sustenta el extremo derecho del alambre visto desde P) vale

$$E_p(Y) = \frac{\lambda}{4\pi H \epsilon_0} \int_0^{\alpha_2} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi H \epsilon_0} \text{sen}\alpha_2 = \frac{\lambda}{4\pi H \epsilon_0} \frac{L - \ell}{\sqrt{H^2 + (L - \ell)^2}}$$

Si tomásemos un elemento  $d\rho$  en el segmento de barra a la izquierda de O, obtendríamos un campo en P cuya componente sobre el eje Y se sumaría a la anterior

$$E'_p(Y) = \frac{\lambda}{4\pi H \epsilon_0} \text{sen}\alpha_1 = \frac{\lambda}{4\pi H \epsilon_0} \frac{\ell}{\sqrt{H^2 + \ell^2}}$$

Por el principio de superposición de campos, este se sumaría al anterior para dar el módulo del campo en P, producido por todo el alambre sobre el eje Y.

$$E(Y) = E_p(Y) + E'_p(Y) = \frac{\lambda}{4\pi H \epsilon_0} \left[ \left( \frac{L - \ell}{\sqrt{H^2 + (L - \ell)^2}} + \frac{\ell}{\sqrt{H^2 + \ell^2}} \right) \right]$$

El vector campo sobre el eje Y es:

$$\vec{E}(Y) = \frac{\lambda}{4\pi H \epsilon_0} \left[ \left( \frac{L - \ell}{\sqrt{H^2 + (L - \ell)^2}} + \frac{\ell}{\sqrt{H^2 + \ell^2}} \right) \right] \vec{j}$$

Ahora calculamos la contribución de la barra sobre el eje X. Nos ayudamos de los resultados anteriores

$$dE_p(X) = \frac{\lambda}{4\pi H \epsilon_0} \sin\theta d\theta \Rightarrow E_p(X) = \frac{\lambda}{4\pi H \epsilon_0} \int_0^{\alpha_2} \sin\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi H \epsilon_0} [-\cos\theta]_0^{\alpha_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_p(X) = \frac{\lambda}{4\pi H \epsilon_0} (1 - \cos\alpha_2) = \frac{\lambda}{4\pi H \epsilon_0} \left( 1 - \frac{H}{\sqrt{H^2 + (L - \ell)^2}} \right)$$

$$dE'_p(X) = \frac{\lambda}{4\pi H \epsilon_0} \sin\theta d\theta \Rightarrow E'_p(X) = \frac{\lambda}{4\pi H \epsilon_0} \int_0^{\alpha_1} \sin\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi H \epsilon_0} [-\cos\theta]_0^{\alpha_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E'_p(X) = \frac{\lambda}{4\pi H \epsilon_0} (1 - \cos\alpha_1) = \frac{\lambda}{4\pi H \epsilon_0} \left[ 1 - \frac{H}{\sqrt{H^2 + \ell^2}} \right]$$

El vector campo sobre el eje X es:

$$\vec{E}(X) = \frac{\lambda}{4\pi H \epsilon_0} \left[ 1 - \frac{H}{\sqrt{H^2 + \ell^2}} \right] \vec{i} - \frac{\lambda}{4\pi H \epsilon_0} \left[ 1 - \frac{H}{\sqrt{H^2 + (L - \ell)^2}} \right] \vec{i} \Rightarrow$$

$$\vec{E}(X) = \frac{\lambda}{4\pi H \epsilon_0} \left[ 1 - \frac{H}{\sqrt{H^2 + \ell^2}} - 1 + \frac{H}{\sqrt{H^2 + (L - \ell)^2}} \right] \vec{i} = \frac{\lambda}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{H^2 + (L - \ell)^2}} - \frac{1}{\sqrt{H^2 + \ell^2}} \right] \vec{i}$$

El vector campo en P es:

$$\vec{E}(P) = \vec{E}(X) + \vec{E}(Y)$$

b) Si el punto P equidista de los extremos del alambre, entonces  $\ell = \frac{L}{2}$

Sustituimos el valor de  $\ell$  en  $\vec{E}(X)$ .

$$\vec{E}(X) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{H^2 + \left(L - \frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{H^2 + \frac{L^2}{4}}} \right] \vec{i} = 0$$

Sustituimos el valor de  $\ell$  en  $\vec{E}(Y)$ .

$$\bar{E}(Y) = \frac{\lambda}{4\pi H \epsilon_0} \left[ \left( \frac{L - \frac{L}{2}}{\sqrt{H^2 + \left(L - \frac{L}{2}\right)^2}} + \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{H^2 + \frac{L^2}{4}}} \right) \right] \bar{j} = \frac{\lambda L}{8\pi H \epsilon_0} \left( \frac{2}{\sqrt{H^2 + \frac{L^2}{4}}} \right) \bar{j} \Rightarrow$$

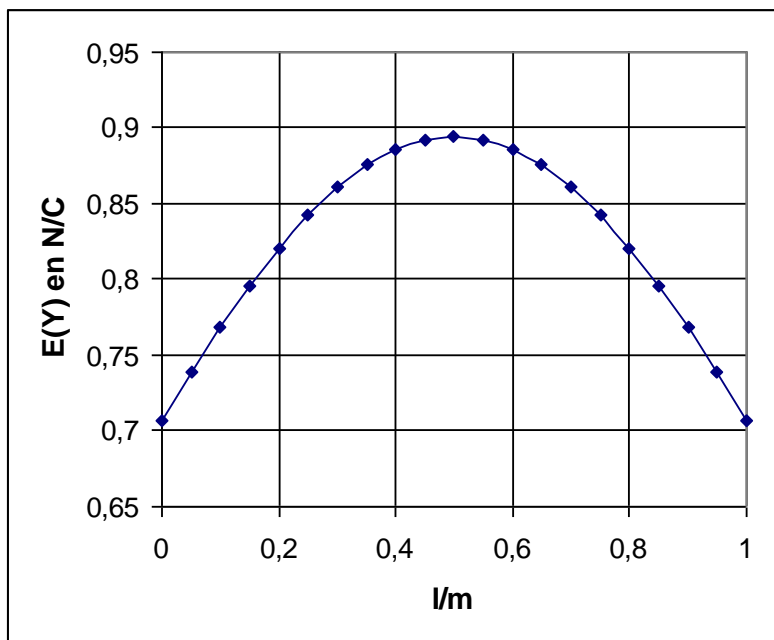
$$\Rightarrow \bar{E}(Y) = \frac{\lambda L}{8\pi H \epsilon_0} \left( \frac{4}{\sqrt{4H^2 + L^2}} \right) \bar{j} = \frac{\lambda L}{2\pi H \epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{4H^2 + L^2}} \bar{j} = \bar{E}(P)$$

c)

$$E(Y) = \frac{\lambda}{4\pi H \epsilon_0} \left[ \left( \frac{L - \ell}{\sqrt{H^2 + (L - \ell)^2}} + \frac{\ell}{\sqrt{H^2 + \ell^2}} \right) \right] = \frac{\frac{1}{9} \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^9}{1} \left( \frac{1 - \ell}{\sqrt{1^2 + (1 - \ell)^2}} + \frac{\ell}{\sqrt{1 + \ell^2}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(Y) = \frac{1 - \ell}{\sqrt{1^2 + (1 - \ell)^2}} + \frac{\ell}{\sqrt{1 + \ell^2}}$$

La representación de  $E(Y)$  frente a  $l$  es:

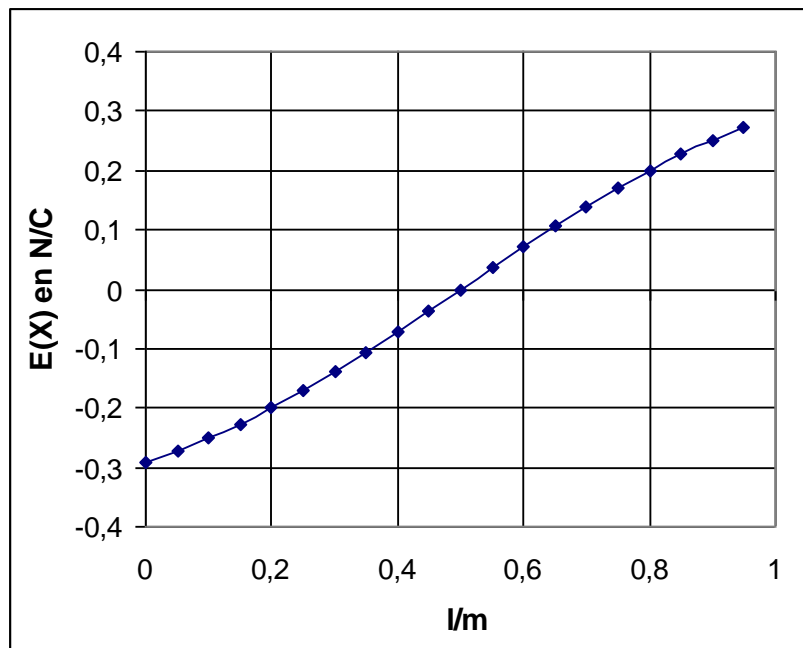


El máximo valor de  $E(X)$  se produce en los puntos que equidistan de los extremos del alambre

$$E(X) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{H^2 + (L - \ell^2)}} - \frac{1}{\sqrt{H^2 + \ell^2}} \right] = \frac{1}{9} \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^9 \left( \frac{1}{\sqrt{1^2 + (1 - \ell^2)}} - \frac{1}{\sqrt{1^2 + \ell^2}} \right)$$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (1 - \ell^2)}} - \frac{1}{\sqrt{1^2 + \ell^2}}$$

La representación de  $E(X)$  frente a  $l$  es:



La componente sobre el eje X es nula cuando P equidista de los extremos del alambre.

97. (389)-En el modelo clásico del átomo de hidrógeno, el electrón gira en una circunferencia alrededor del núcleo de forma semejante a como se desplaza la Tierra alrededor del Sol, excepto que la fuerza de atracción entre electrón y núcleo es eléctrica. Dado que el electrón está acelerado, emite radiación electromagnética cuya potencia esta dada por la ecuación:

$$P = \frac{e^2 a^2}{6 \pi \epsilon_0 c^3}$$

$e$  es la carga elemental de electricidad  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C,  $a$  es la aceleración del electrón en su órbita,  $c$  es la velocidad de la luz  $c = 3,0 \cdot 10^8$  m/s,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  C<sup>2</sup>N<sup>-1</sup>m<sup>-2</sup>. El radio del electrón es  $R = 5,0 \cdot 10^{-11}$  m y su masa  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg.

Calcular:

a) El valor de  $P$  y de la energía cinética del electrón

b) Admitiendo de forma aproximada que el tiempo en que el electrón pierde su energía es  $t = E/P$ , determinar la vida de un átomo de hidrógeno.

**Propuesto en las Olimpiadas de Hong Kong**

a) El electrón está acelerado porque describe una órbita circular con velocidad constante y esa aceleración es la denominada centrípeta. La fuerza de atracción eléctrica entre el electrón y el protón del núcleo es la fuerza centrípeta que el electrón necesita para girar.

$$\frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} = ma \Rightarrow a = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{m R^2} \Rightarrow P = \frac{e^2 \left( \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{m R^2} \right)^2}{6 \pi \epsilon_0 c^3} = \frac{e^6}{6 \pi \epsilon_0 c^3 \left[ (4 \pi \epsilon_0) m R^2 \right]^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{e^6}{96 \pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m^2 R^4} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^6}{96 \pi^3 (8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3,0 \cdot 10^8)^3 (9,1 \cdot 10^{-31})^2 (5,0 \cdot 10^{-11})^4} =$$

$$= \frac{1,6^6}{96 \pi^3 \cdot 26,55^3 \cdot 9,1^2 \cdot 5^4} \cdot \frac{10^{-114}}{10^{-36} \cdot 10^{24} \cdot 10^{-62} \cdot 10^{-44}} = 5,819 \cdot 10^{-12} \cdot 10^4 = 5,819 \cdot 10^{-8} \text{ W}$$

La aceleración  $a$  es la centrípeta y vale

$$a = \frac{v^2}{R} \Rightarrow v^2 = aR \Rightarrow v = \sqrt{\frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e^2 R}{m R^2}} = e \sqrt{\frac{1}{4 \pi \epsilon_0 m R}} \Rightarrow$$

$$v = 1,6 \cdot 10^{-19} \sqrt{\frac{1}{4 \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 10^{-11}}} = 2,25 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



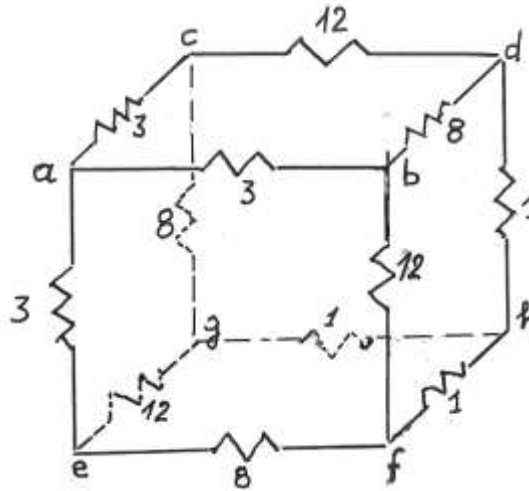
Como la velocidad es unas 133 veces menor que la de la luz, utilizamos para la energía cinética la expresión clásica y no la relativista.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (2,25 \cdot 10^6)^2 = 2,30 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

b)

$$t = \frac{E_c}{P} = \frac{2,30 \cdot 10^{-18}}{5,819 \cdot 10^{-8}} = 4,0 \cdot 10^{-11} \text{ s}$$

98. (396)- Un grupo de 12 resistencias están colocadas en cada uno de las aristas de un cubo, tal como se muestra en la figura inferior. Los números que figuran al lado de cada resistencia son sus valores expresados en ohmios. a) Determinar la resistencia equivalente entre los vértices a y h.



b) Las tres resistencias de 12 Ω se reemplazan por tres condensadores iguales, cada uno con capacidad 15,0 μF. Entre los vértices a y h se coloca una pila de 12,0 V. Cuando se alcanza en el circuito el estado estacionario determinar la carga que almacena cada condensador.

**Propuesto en las Olimpiadas de USA.**

a) Supongamos que unido al vértice a está unido un cable por el que llega una corriente de intensidad I, y hay otro cable unido al vértice h, por el que sale la corriente I de entrada.. En el nudo a la corriente deriva por ac, ab y ad y como en ellos existe la misma resistencia de 3 Ω, las corrientes son iguales y las designamos con i:  $I = 3i$ .

En el vértice c llega una corriente i y se bifurca en dos corrientes, una  $i_{cd}$  por la resistencia de 12 Ω y otra  $i_{cg}$  por la resistencia de 8 Ω.

Se cumple

$$i = i_{cd} + i_{cg}$$

Además las corrientes están en razón inversa de las resistencias, esto es,

$$\frac{i_{cd}}{i_{cg}} = \frac{8}{12} \Rightarrow i_{cd} = \frac{2}{3}i_{cg} \Rightarrow i = \frac{2}{3}i_{cg} + i_{cg} \Rightarrow i_{cg} = \frac{3}{5}i \Rightarrow i_{cd} = \frac{2}{5}i$$

Al vértice b llega una corriente i y se bifurca en  $i_{bd}$  (por 8 Ω) e  $i_{bf}$  (12 Ω). La situación es igual a la anterior, por tanto,  $i_{bd} = i_{cg} = \frac{3}{5}i$ . Al vértice d llegan dos corriente una  $i_{cd}$  y

la otra  $i_{bd}$  que suman  $\frac{2}{5}i + \frac{3}{5}i = i$ , que es la intensidad que recorre dh..

Para ir desde el vértice a al h tenemos un camino el acdh, del que conocemos sus intensidades.

$$iR_E = 3iR_E = i \cdot 3 + i_{cd} \cdot 12 + i_{dh} \cdot 1 = i \cdot 3 + \frac{2}{5}i \cdot 12 + i \cdot 1 \Rightarrow 3R_E = 3 + \frac{24}{5} + 1 \Rightarrow R_E = \frac{44}{15} \Omega$$

b) Durante un cierto tiempo los condensadores se cargan y una vez alcanzado el régimen estacionario por ellos no pasa corriente.. Entre a y h existe una diferencia de potencial de 12 V.

Alcanzado el régimen estacionario, desde el punto de vista de la corriente eléctrica, es como si no existiese cd , ni eg , ni bf . .

La corriente que entra por a se divide en tres tramos que son ac , ab y ae y dado que las resistencias son iguales las tres corrientes tienen la misma intensidad , designada como i.

Para ir de a a h podemos elegir tres caminos acgh, abdh y aebh, en los tres existe la misma resistencia 3+8+1= 12 V y las tres resistencias están en serie, por tanto por todas ellas pasa la intensidad de 1 amperio.

$$V_a - V_c = 3V ; V_a - V_d = 11V \Rightarrow (-V_a + V_c) + (V_a - V_d) = -3 + 11 = V_c - V_d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V_c - V_d} \Rightarrow Q = 15,0 \cdot 10^{-6} \cdot 8 = 1,2 \cdot 10^{-4} C$$

El modo de operar es el mismo para los otros dos condensadores y dada la simetría tienen todos la misma carga.

99. (401)- En la figura 1, OA es un péndulo simple de longitud d. La esfera de su extremo que se considera puntual tiene una masa m y una carga +q. El hilo que sostiene la esfera carece de masa y es no conductor.

A una distancia d de la posición más baja del péndulo (B en la figura), está situada una carga -q, que no se puede desplazar.

a) Se pide la tensión de la cuerda cuando la esfera pase por la parte inferior, después de salir de su posición inicial sin velocidad.

b) Determinar el valor máximo de q para el que puede verificarse el movimiento pendular. Realizar el cálculo numérico si  $m=10^{-3}$  kg,  $d=1$  m y el ángulo inicial del péndulo es  $\theta=45^\circ$

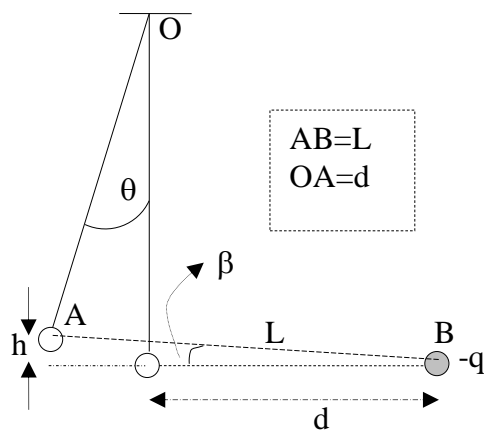


Fig.1

a) Consideramos la posición más baja de la esfera como altura cero para evaluar la energía potencial de la esfera.

La esfera inicialmente tiene una energía potencial gravitatoria y una energía potencial eléctrica. En su posición más baja, su energía potencial gravitatoria es nula, tiene energía cinética y potencial eléctrica.

Aplicamos el principio de conservación de la energía

$$mgh - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{L} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d} \quad (1)$$

Calculamos h y L en función de  $\theta$  y l.

$$h = d - d \cos\theta = d(1 - \cos\theta)$$

$$\text{sen}\beta = \frac{h}{L} \Rightarrow L = \frac{d(1 - \cos\theta)}{\text{sen}\beta}$$

$$\text{tag}\beta = \frac{h}{d + d \text{sen}\theta} \Rightarrow \frac{\text{sen}\beta}{\text{cos}\beta} = \frac{(1 - \cos\theta)}{1 + \text{sen}\theta} \Rightarrow \frac{1 - \text{sen}^2\beta}{\text{sen}^2\beta} = \frac{(1 + \text{sen}\theta)^2}{(1 - \cos\theta)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\text{sen}^2\beta} = \frac{(1 + \text{sen}\theta)^2}{(1 - \cos\theta)^2} + 1 = \frac{(1 + \text{sen}\theta)^2 + (1 - \cos\theta)^2}{(1 - \cos\theta)^2} \Rightarrow \text{sen}\beta = \sqrt{\frac{(1 - \cos\theta)^2}{(1 + \text{sen}\theta)^2 + (1 - \cos\theta)^2}}$$

Sustituyendo en (1)

$$mgd(1 - \cos\theta) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 \sin\beta}{d(1 - \cos\theta)} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d} \Rightarrow$$

$$mgd(1 - \cos\theta) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2(1 - \cos\theta)}{d(1 - \cos\theta) \left[ \sqrt{(1 + \sin\theta)^2 + (1 - \cos\theta)^2} \right]} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d} \Rightarrow$$

$$v^2 = 2gd(1 - \cos\theta) - \frac{1}{2m\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d} \left[ \frac{1}{\sqrt{(1 + \sin\theta)^2 + (1 - \cos\theta)^2}} - 1 \right]$$

La tensión de la cuerda cuando la esfera pasa por la parte inferior soporta el peso y proporciona la fuerza centrípeta que exige el movimiento de la esfera

$$T = mg + \frac{mv^2}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = mg + \frac{m}{d} \left[ 2gd(1 - \cos\theta) - \frac{1}{2m\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d} \left( \frac{1}{\sqrt{(1 + \sin\theta)^2 + (1 - \cos\theta)^2}} - 1 \right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = mg[3 - 2\cos\theta] + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d^2} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{(1 + \sin\theta)^2 + (1 - \cos\theta)^2}} \right] \quad (1)$$

b) La ecuación (1) nos da la tensión de la cuerda en el supuesto de que el movimiento pendular se pueda verificar, pero existe una condición previa que determina cuál es el valor máximo que puede tener la carga  $q$  para que ese movimiento se verifique.

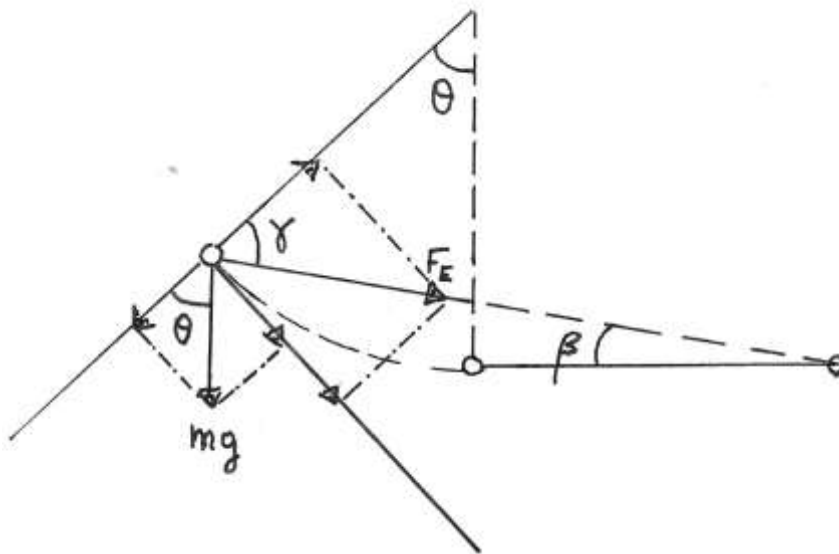


Fig.2

En la figura 2 se han representado, a escala arbitraria, el peso y la fuerza eléctrica y sus componentes en la dirección de la cuerda y en la dirección perpendicular a ella.

En el momento inicial del movimiento, al que corresponde el ángulo  $\theta$ , la cuerda debe tener tensión para que se verifique el movimiento pendular, si la tensión es nula entonces no existe este movimiento, luego la condición es que

$$mg \cos\theta \geq F_e \cos\gamma \quad (2)$$

$$\beta + \rho = 90^\circ; \theta + \rho + \gamma = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = 180 - \theta - \rho = 180 - \theta - 90 + \beta \Rightarrow \gamma = 90 - \theta + \beta$$

Sustituyendo en (2)

$$mg \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{L^2} \cos(90 - \theta + \beta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{\left[\frac{d(1 - \cos\theta)}{\text{sen}\beta}\right]^2} \cos(90 - \theta + \beta) \quad (3)$$

$$\text{tag } \beta = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \text{sen}\theta} \quad (4)$$

Utilizamos la ecuación (4) para calcular el ángulo  $\beta$

$$\text{tag } \beta = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = 0,172 \Rightarrow \beta = 9,7^\circ$$

Operamos en la ecuación (3)

$$10^{-3} \cdot 9,8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{q^2 \cdot \text{sen}^2 9,7}{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \cos(90 - 45 + 9,7) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6,93 \cdot 10^{-3} = 8,99 \cdot 10^9 \cdot \frac{q^2}{0,0858} \cdot \text{sen}^2 9,7 \cdot \cos 54,7 \Rightarrow q = \sqrt{\frac{6,93 \cdot 10^{-3} \cdot 0,0858}{8,99 \cdot 10^9 \cdot 0,0164}} = 2,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$