100. (402)- ***Una distribución esférica uniforme de carga tiene un radio R y una carga total Q. En el centro de dicha distribución está situada una carga puntual –q de masa m y en el instante t=0 dotada de una energía cinética E_o. La mencionada carga llega justamente al borde de la distribución esférica con velocidad nula. Se pide***
a) Determinar el valor de E_o en función de Q, q y R.
b) Deducir el tiempo empleado por la carga en el anterior desplazamiento.

Propuesto en las Olimpiadas de USA.

a) Vamos a calcular la diferencia de potencial que existe entre el centro de la distribución esférica de carga y el borde de la misma. Para ello imaginemos una esfera concéntrica con la distribución de radio r<R y aplicamos el teorema de Gauss. Teniendo en cuenta la simetría del problema la dirección y sentido del vector campo y del vector superficie son iguales

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E_r = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_o}$$

En la ecuación anterior q es a carga contenida en la esfera de radio r. Como la distribución de carga es uniforme podemos escribir.

$$\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r^3} \quad \Rightarrow \quad q = Q\frac{r^3}{R^3} \Rightarrow \quad E_r = \frac{Q\frac{r^3}{R^3}}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_o R^3}$$

Utilizamos la relación entre el campo y el potencial

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int_{V_C}^{V_B} -dV = \int_0^R \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_o R^3} dr \Rightarrow \qquad V_C - V_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^3} \left.\frac{r^2}{2}\right|_o^R = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_o R}$$

El trabajo para llevar la carga –q desde el centro al borde de la distribución vale

$$T = -q(V_C - V_B) = -\frac{Qq}{8\pi\varepsilon_o R}$$

El signo menos indica que ese trabajo hay que aportarlo y ese aporte es la pérdida de energía cinética que tiene la carga –q,

$$-\frac{Qq}{8\pi\varepsilon_o R} = E_{C(borde)} - E_{C(centro)} 0 - E_o \Rightarrow \qquad E_o = \frac{Qq}{8\pi\varepsilon_o R}$$

b) En la figura 1 se representa la posición de la carga –q en un determinado instante y la fuerza que actúa sobre ella

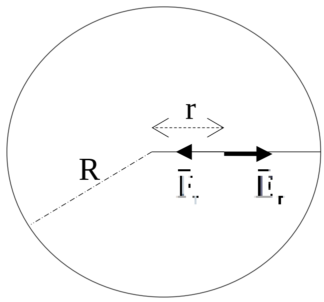


Fig.1

Dado que la carga q es negativa la fuerza tiene la misma dirección que el campo pero sentido contrario. Esto significa que al desplazarse la carga –q hacia el borde aparece una fuerza que tiende a contrarrestar este movimiento.
Aplicamos la segunda ley de Newton

$$-qE_r = m\frac{d^2r}{dt^2} \Rightarrow -q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot r \Rightarrow \quad -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o\, m\, R^3}\cdot r = \frac{d^2r}{dt^2}$$

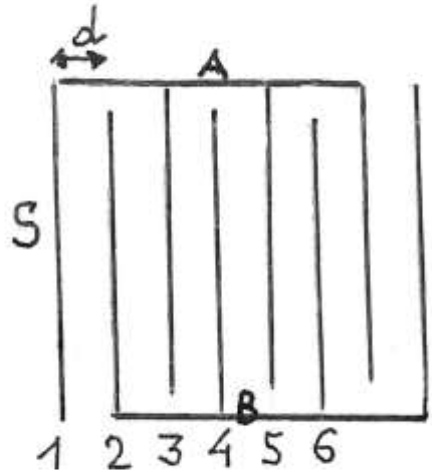
La ecuación anterior nos dice que la carga –q efectúa un movimiento armónico, cuy0 periodo es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_o m R^3}{qQ}}$$

El desplazamiento entre el centro y el borde es una cuarta parte del periodo

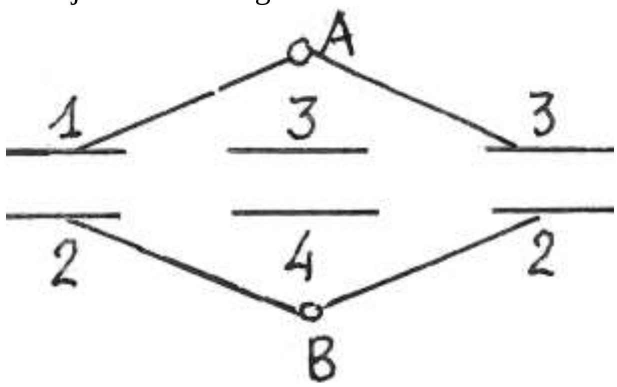
$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_o m R^3}{qQ}}$$

101. (407)- ***Un condensador se construye a partir de laminas planas conductoras de superficie S, dispuestas en la forma que indica la figura.***



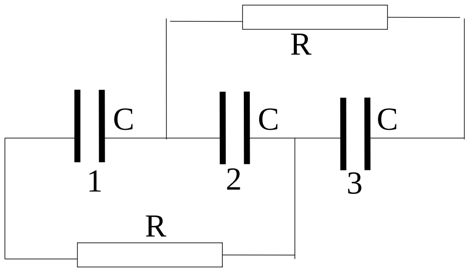
La distancia entre las láminas es d. Las numeradas con número impar se conectan a un potencial positivo A y las pares a uno negativo B.
El condensador se ha formado con 2n láminas. Calcular la capacidad del mismo.

Las láminas 1, 3 , 5 , 7 … tienen el mismo potencial positivo y las 2, 4, 6, 8 … el mismo potencial negativo.
Consideramos un sistema formado por cuatro láminas, existen tres condensadores 1-2, 2-3 y 3-4. Los dibujamos de la siguiente manera



Con cuatro lámínas se han dispuestos tres condensadores en paralelo, con 2n láminas se obtienen 2n-1 condensadores en paralelo. Cada condensador tiene una capacidad $\varepsilon_o \dfrac{S}{d}$ y todo el conjunto $C = (2n-1)\varepsilon_o \dfrac{S}{d}$.

102. ***(411)- Tres condensadores iguales cada uno de capacidad C están colocados en serie. El conjunto se une a una batería que suministra un voltaje de U voltios. Una vez cargados los condensadores se retira la batería y al conjunto se le añaden dos resistencias iguales cada una de valor R, tal como se indica en la figura.***



a) Determinar la energía calorífica que se produce en cada resistencia, transcurrido un tiempo muy grande.

b) Cuando el voltaje en el condensador 2 sea $\boldsymbol{\frac{U}{10}}$***, calcular el valor de la intensidad que en ese instante circula por las resistencias.***

a) Al unir los condensadores a la batería, éstos se cargan, siendo Qi la carga de cada uno de ellos y U/3 la diferencia de potencial entre los extremos de cada uno.

$$C = \frac{Q_i}{\frac{U}{3}} \Rightarrow Q_i = \frac{CU}{3}$$

Al retirar la batería e introducir las resistencias los condensadores comienzan a descargarse y a hacer circular corriente por ellas. El condensador 2 se descarga con una rapidez doble que el 1 y el 3, este hecho queda reflejado en la figura 1.

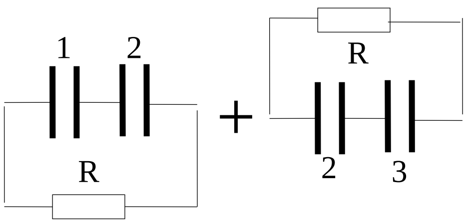


Fig.1

Se observa en dicha figura que el condensador número 2 se descarga por ambas resistencias, mientras que el 1 lo hace por la resistencia inferior y el 3 por la superior. Se deduce que al ser los tres condensadores iguales la corriente eléctrica que recorre las dos resistencias es la misma en todo instante. Ocurrirá que cuando el condensador 2 se haya descargado totalmente los condensadores 1 y 3 todavía retienen la mitad de su carga. Esta situación corresponde a la figura 2 a. y es una situación inestable pues los

condensadores 1 y 3 comienzan a cargar el 2 con los signos que se indican en la figura 2b..La caga del condensador 2 se ha efectuado a través de las resistencias.
En la figura 2a , el ,condensador 2 no tiene carga y los condensadores 1 y 3 la mitad de la inicial, esto es, $\frac{CU}{6}$.

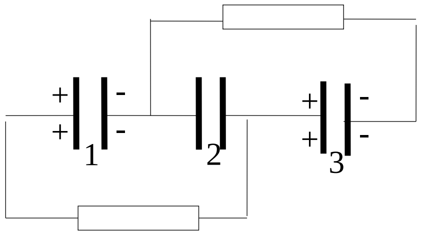


Fig. 2a

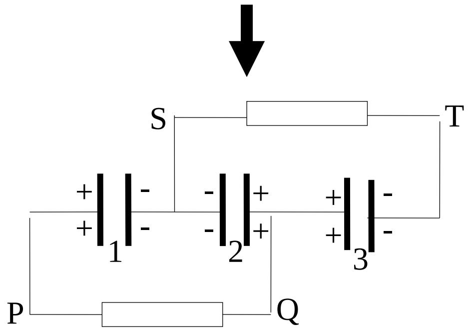


Fig. 2b

El proceso de la carga del condensador 2 terminará cuando las diferencias de potencial en los condensadores sean iguales. Observando atentamente la figura 2b se deduce que se puede hacer el siguiente esquema en la disposición de los condensadores y las resistencias (figura 3).

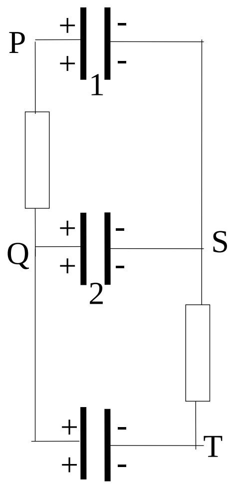


Fig.3

Designamos con Q_f la carga final de cada condensador y con U_f la diferencia de potencial

$$3Q_f = 2\frac{CU}{6} \Rightarrow \quad Q_f = \frac{CU}{9}$$

Analizamos las energías de los condensadores en las situaciones inicial y final.

$$\text{Inicial:}\quad 3\cdot\frac{1}{2}C\left(\frac{U}{3}\right)^2=\frac{CU^2}{6}\quad ;\qquad \text{Final:}\quad 3\cdot\frac{1}{2}C\left(\frac{U}{9}\right)^2=\frac{CU^2}{54}$$

La diferencia de estas energías han pasado a las resistencias

$$\frac{CU^2}{6}-\frac{CU^2}{54}=\frac{8CU^2}{54}=\frac{4CU^2}{27}$$

Como se disipa en forma de calor la misma energía en cada resistencia, le corresponde a cada una $\frac{2CU^2}{27}$.

b) Calculamos la carga del condensador 2 cuando la diferencia de potencial es U/10.

$$C=\frac{q(2)}{\frac{U}{10}}\quad\Rightarrow\quad q(2)=\frac{CU}{10}$$

La variación de carga desde el inicio es:

$$\Delta Q=Q_i-q_i=\frac{CU}{3}-\frac{CU}{10}=\frac{7}{30}CU$$

Como los condensadores 1 y 3 se descargan a la mitad que el 2, la variación de carga en ellos es: $\Delta Q'=\frac{7}{60}CU$. La carga de los condensadores 1 y 3 cuando el 2 tiene q(2) es:

$$\frac{7}{60}CU=\frac{CU}{3}-q(1)\Rightarrow q(1)=\frac{CU}{3}-\frac{7CU}{60}=\frac{13CU}{60}$$

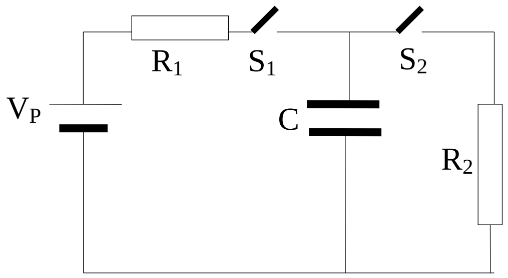
y la caída de tensión en cada condensador es:

$$\Delta V_1=\Delta V_3=\frac{\frac{13CU}{60}}{C}+\frac{\frac{CU}{10}}{C}=\frac{19\,U}{60}$$

Aplicamos la ley de Ohm a una de las resistencias

$$I=\frac{\Delta V_1}{R}=\frac{\frac{19\,U}{60}}{R}=\frac{19U}{60R}$$

103. (419)- ***En el circuito de la figura inferior V_p es la diferencia de potencial constante en la pila, C, la capacidad del condensador, R_1 y R_2 son resistencias, S_1 e S_2 interruptores.***
En el instante inicial (t=0 s), el condensador está descargado, se cierran simultáneamente los interruptores.



a) Calcular la diferencia de potencial e intensidad de la corriente que circula por el condensador en función del tiempo.
b) La intensidad que circula por la resistencia R_2 y por la pila.
c) Dibujar las curvas de intensidad y potencial en el condensador en los casos siguientes: 1) C = 1000 μF, $R_1 = 10^5\ \Omega$ y $R_2 = 2.10^4 \Omega$ 2) C = 1000 μF, $R_1 = 10^5\ \Omega$ y $R_2 = 5.10^4\ \Omega$.

a) En un instante t después del cierre de los interruptores, V_C representa la caída de tensión entre los bornes del condensador, I la intensidad de la corriente que circula por la pila, I_2 la que circula por la resistencia R_2 , I_C la que circula por el condensador.

Para la malla de la izquierda

$$V_P = I R_1 + V_C$$

En el nudo superior

$$I = I_C + I_2$$

Sustituimos I en la primera ecuación

$$V_P = I_C R_1 + I_2 R_1 + V_C \quad (1)$$

La diferencia de potencial en el condensador está relacionada con la capacidad y la carga, a la que designamos con q.

$$V_C = \frac{q}{C} \quad \Rightarrow \quad V_P = I_C R_1 + I_2 R_1 + \frac{q}{C}$$

Como $I_2R_2 = V_C \Rightarrow \quad I_2 = \frac{V_C}{R_2} = \frac{q}{R_2C} \quad \Rightarrow \quad V_P = I_CR_1 + \frac{q}{R_2C}R_1 + \frac{q}{C}$

Derivamos la última ecuación con respecto al tiempo

$$\frac{dV_P}{dt} = 0 = \frac{dI_C}{dt}R_1 + \frac{R_1}{R_2C}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt}$$

La derivada $\frac{dq}{dt}$ es igual a la intensidad que pasa en ese instante por el condensador

$$0 = \frac{dI_C}{dt}R_1 + I_C\left(\frac{R_1}{R_2C} + \frac{1}{C}\right) \Rightarrow \quad \frac{dI_C}{dt}R_1 = -I_C\left(\frac{R_1 + R_2}{R_2C}\right) \Rightarrow \quad \int\frac{dI_C}{I_C} = -\int\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2C}dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln I_C = -\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2C}t + Cte = -\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2C}t + \ln K \Rightarrow \quad \frac{I_C}{K} = e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}$$

En la integral anterior no podemos calcular directamente la constante de integración puesto que cuando t=0, resultaría ln =0 que no existe un valor, por eso hemos hecho Cte= ln K y tratamos de calcular K sustituyendo en la ecuación (1).

$$V_P = K R_1 e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t} + V_C\frac{R_1}{R_2} + V_C$$

Si en la ecuación anterior t = 0, la exponencial es 1 y resulta $V_P = K R_1 \Rightarrow \quad K = \frac{V_P}{R_1}$

$$V_P = \frac{V_P}{R_1}R_1 e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t} + V_C\frac{R_1}{R_2} + V_C \Rightarrow \quad V_C\left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) = V_P\left(1 - e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_C = \frac{V_P}{\frac{R_1}{R_2} + 1}\left(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2C}t}\right) \Rightarrow \qquad V_C = \frac{V_P R_2}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2C}t}\right)$$

Sustituyendo el valor de K en I_C resulta

$$I_C = \frac{V_P}{R_1} e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C} t}$$

b) De la ecuación (1)

$$V_P = \frac{V_P R_1}{R_1} e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C} t} + I_2 R_1 + I_2 R_2 \Rightarrow V_P \left(1 - \frac{R_1}{R_1} e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C} t} \right) = I_2 (R_1 + R_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad I_2 = \frac{V_P}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C} t} \right)$$

$$I = I_C + I_2 = \frac{V_P}{R_1} e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C} t} + \frac{V_P}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C} t} \right)$$

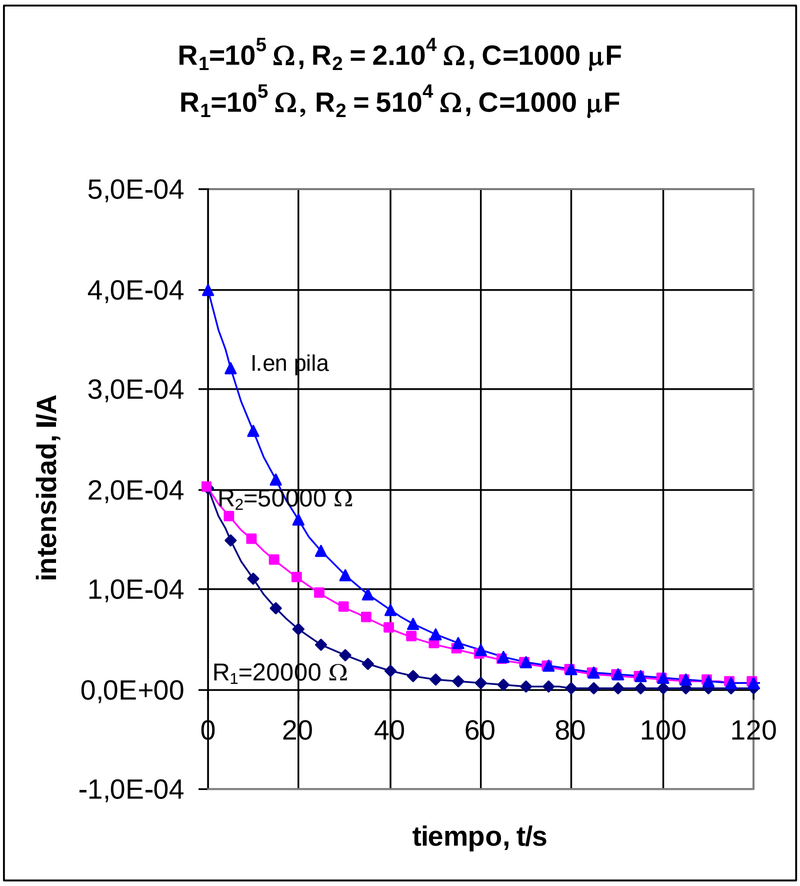
Para realizar de forma más cómoda las operaciones hacemos $x = e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C} t}$

$$I = \frac{V_P}{R_1} x + \frac{V_P}{R_1 + R_2} (1 - x) = \frac{V_P}{R_1} x - \frac{V_P}{R_1 + R_2} x + \frac{V_P}{R_1 + R_2} = V_P x \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1 + R_2} \right) + \frac{V_P}{R_1 + R_2}$$

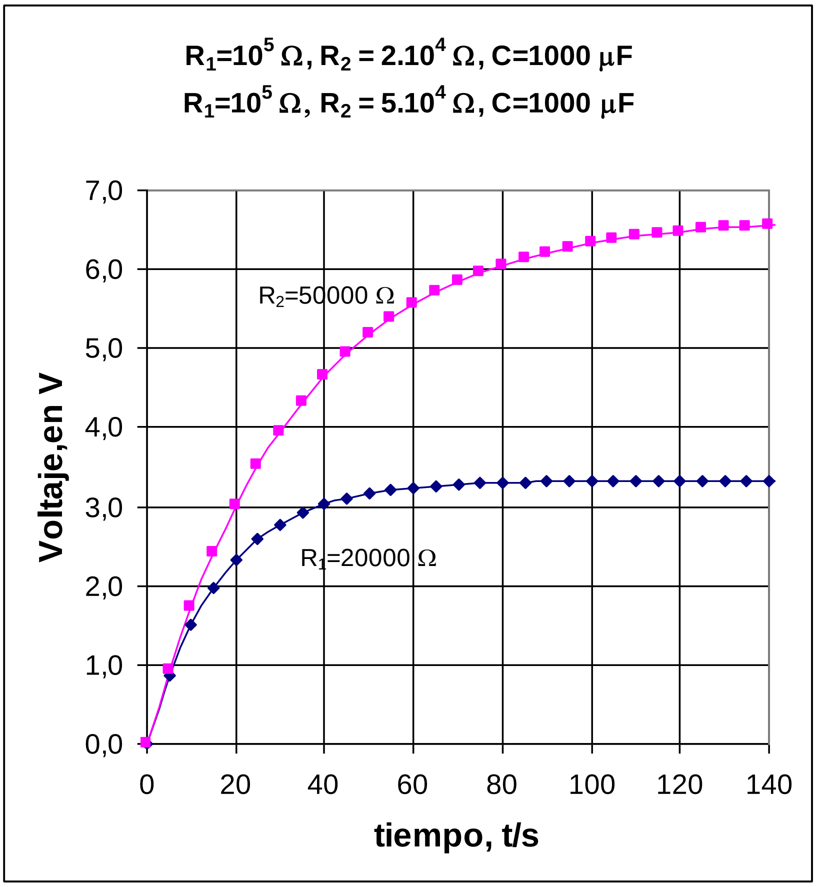
$$I = V_P x \frac{R_2}{R_1 (R_1 + R_2)} + \frac{V_P}{R_1 + R_2} = \frac{V_P}{R_1 + R_2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} x \right) \Rightarrow$$

$$I = \frac{V_P}{R_1 + R_2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C} t} \right)$$

b)



R1=10^5 Ω, R2 = 2.10^4 Ω, C=1000 μF
R1=10^5 Ω, R2 = 510^4 Ω, C=1000 μF
5,0E-04
4,0E-04
3,0E-04
2,0E-04
1,0E-04
0,0E+00
-1,0E-04
intensidad, I/A
I.en pila
R2=50000 Ω
R1=20000 Ω
0
20
40
60
80
100
120
tiempo, t/s



R1=10^5 Ω, R2 = 2.10^4 Ω, C=1000 μF
R1=10^5 Ω, R2 = 5.10^4 Ω, C=1000 μF
7,0
6,0
5,0
4,0
3,0
2,0
1,0
0,0
Voltaje,en V
R2=50000 Ω
R1=20000 Ω
0
20
40
60
80
100
120
140
tiempo, t/s

104. (422)-***Se dispone de un sistema de dos condensadores planos iguales e igualmente cargados, tal como se indica en la figura 1 a. Al condensador 2 se le hace variar la distancia entre sus placas a un valor d´, que puede ser menor o mayor que d.***
a) Comparar la energía del sistema de la figura 1 b con la del sistema de la figura 1 a.
b) Comparar la fuerza entre las placas de los condensadores 1 y 2 de la figura 1b.

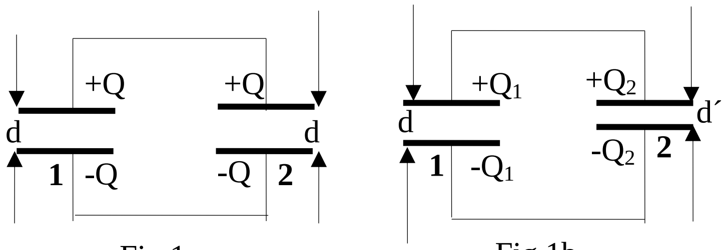


Fig.1a Fig.1b

a) La capacidad de un condensador plano cuyas armaduras tienen una superficie S cada una y la energía que almacena al estar cargado.

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{\varepsilon_o S}{d} \quad ; \quad E=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{Q^2\,d}{\varepsilon_o S}$$

La energía almacenada en el sistema de la figura 1a es: $E_1=\dfrac{Q^2\,d}{\varepsilon_o S}$

La energía almacenada en el sistema de la figura 1b es: $E_1=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q_1^2\,d}{\varepsilon_o S}+\dfrac{1}{2}\dfrac{Q_2^2\,d´}{\varepsilon_o S}$

Una vez alcanzado el equilibrio en el sistema 1b, la diferencia de potencial entre los condensadores es la misma

$$\frac{Q_1}{C_1}=\frac{Q_2}{C_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_1\,d}{\varepsilon_o S}=\frac{Q_2\,d´}{\varepsilon_o S} \quad \Rightarrow \quad Q_1\,d=Q_2\,d´ \quad (1)$$

La conservación de la carga eléctrica supone que

$$Q_1+Q_2=2Q \quad (2)$$

Despejando Q_2 de la ecuación (1) y sustituyendo en (2), siendo $k=\dfrac{d´}{d}$

$$Q_1+Q_1\frac{d}{d´}=2Q \quad \Rightarrow \quad Q_1=\frac{2Q}{1+\dfrac{d}{d´}}=\frac{2Q}{1+\dfrac{1}{k}}$$

Despejando Q_1 de la ecuación (1) y sustituyendo en (2):

$$Q_2 \frac{d'}{d} + Q_2 = 2Q \quad \Rightarrow \quad Q_2 = \frac{2Q}{1+\frac{d'}{d}} = \frac{2Q}{1+k}$$

Si k es menor que 1 (las placas del condensador 2 se acercan), el condensador 1 pierde parte de su carga y la gana el condensador 2.

Si k es mayor que 1 (las placas del condensador se alejan), entonces gana carga el condensador 1 y la pierde el 2.

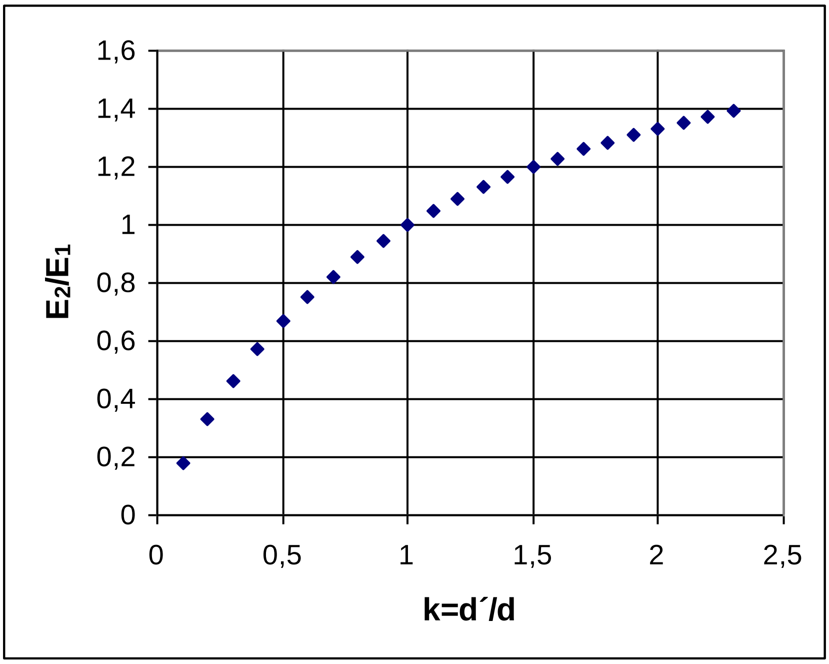
La energía del sistema de la figura 1b es:

$$E_2 = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} = \frac{1}{2}\frac{4Q^2}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^2 \cdot \frac{\varepsilon_o S}{d}} + \frac{1}{2}\frac{4Q^2}{(1+k)^2 \cdot \frac{\varepsilon_o S}{d'}} = \frac{2Q^2}{\varepsilon_o S}\left[\frac{k^2 d}{(1+k)^2} + \frac{d'}{(1+k)^2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{2Q^2}{\varepsilon_o S(1+k)^2}\left[k^2 d + d'\right] = \frac{2Q^2}{\varepsilon_o S(1+k)^2}\left[k^2 d + kd\right] = \frac{2Q^2 k d(1+k)}{\varepsilon_o S(1+k)^2} = \frac{2Q^2 k d}{\varepsilon_o S(1+k)}$$

Comparamos las energías del sistema de la figura 1b con el sistema de la figura 1a

$$\eta = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{2Q^2 kd}{\varepsilon_o S(1+k)}}{\frac{Q^2 d}{\varepsilon_o S}} = \frac{2k}{1+k}$$



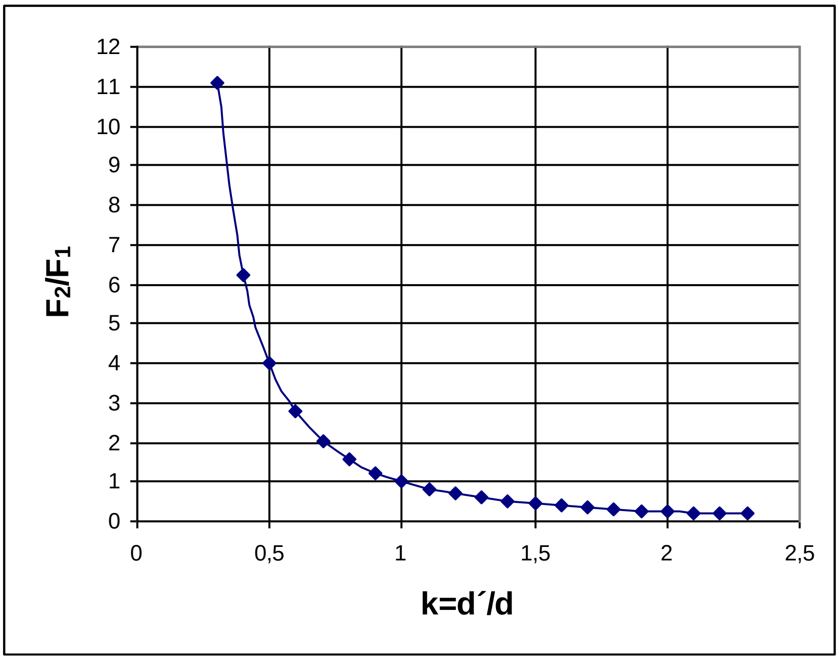
b) Un condensador plano de superficie S de armaduras y separación entre ellas x, ejerce una fuerza de atracción F entre las mismas, ya que están cargadas con distinto signo.
Si mediante una fuerza exterior F y de forma cuasiestática separamos las armaduras una distancia dx hemos de realizar un trabajo F dx que dará lugar a un aumento de la energía del condensador.

$$E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 x}{\varepsilon_o S} \Rightarrow dE = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_o S}dx = Fdx \Rightarrow \quad F = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_o S}$$

Aplicamos la ecuación anterior a los dos condensadores de la figura 1b.

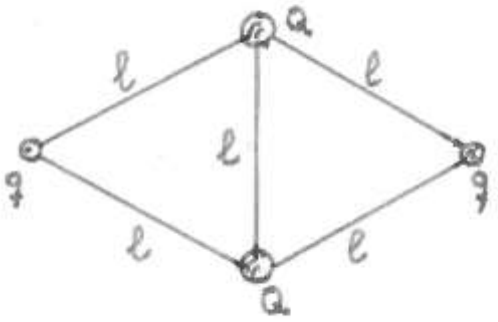
$$F_1 = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{\varepsilon_O S} = \frac{1}{2}\frac{\left(\dfrac{2Q}{1+\dfrac{1}{k}}\right)^2}{\varepsilon_O S} = \frac{2Q^2}{\varepsilon_o S\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^2} = \frac{2Q^2 k^2}{\varepsilon_o S(1+k)^2} \; : F_2 = \frac{1}{2}\frac{\left(\dfrac{2Q}{1+k}\right)^2}{\varepsilon_o S} = \frac{2Q^2}{\varepsilon_o S\,(1+k)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{F_2}{F_1} = \frac{\dfrac{2Q^2}{\varepsilon_o S\,(1+k)^2}}{\dfrac{2Q^2 k^2}{\varepsilon_o S(1+k)^2}} = \frac{1}{k^2}$$



•

105. (427)-***En la figura cuatro cargas eléctricas están unidas por hilos de la misma longitud l, siendo Q>q.***
a) Calcular la tensión del hilo que une las dos cargas Q.
b) Para qué valor de q la tensión del hilo es nula
c) Para qué valor de q las tensiones de los cinco hilos es la misma.



a) Los hilos están tensos debido a que entre las cargas existen fuerzas eléctricas que tienden a separarlas.

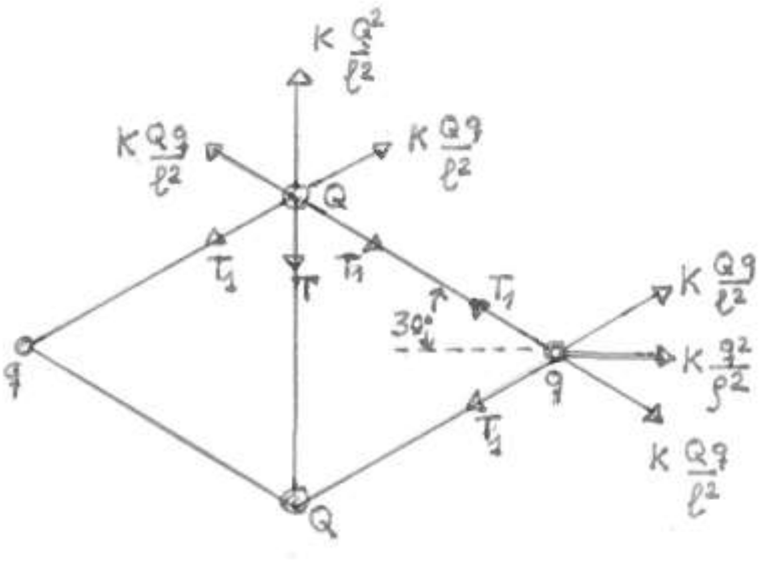


Fig 1

En la figura 1 se observa que sobre la carga Q actúan seis fuerzas, tres de interacciones eléctricas y tres debidas a la tensión de los hilos.. Sobre la carga q existen cinco fuerzas, tres son de interacciones eléctricas y dos de tensión de los hilos.

En dicha figura $K=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}$ y $\rho = 2l\cos 30°$. Las fuerzas sobre las otras cargas son iguales y no se han representado. Las fuerzas no están dibujadas a escala.

La carga Q se encuentra en equilibrio lo que conlleva que la suma de fuerzas en dirección horizontal es nula.

$$T + 2T_1\cos 60^o = K\frac{Q^2}{l^2} + 2\frac{Qq}{l^2}\cos 60^o \;\Rightarrow\; T = K\frac{Q^2}{l^2} + 2\frac{Qq}{l^2}\cos 60^o - 2T_1\cos 60^o$$

La carga q está también equilibrio y la suma de fuerzas en dirección horizontal es nula

$$2T_1\cos 30^o = 2K\frac{Qq}{l^2}\cos 30^o + K\frac{q^2}{\rho^2} = 2K\frac{Qq}{l^2}\cos 30^o + K\frac{q^2}{(2l\cos 30^o)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1 = K\frac{Qq}{l^2} + K\frac{q^2}{8l^2\cos^3 30}$$

Sustituyendo T_1 en T resulta:

$$T = K\frac{Q^2}{l^2} + 2\frac{Qq}{l^2}\cos 60^o - 2\left(K\frac{Qq}{l^2} + K\frac{q^2}{8l^2\cos^3 30^o}\right)\cos 60^o = K\frac{Q^2}{l^2} - K\frac{q^2\cos 60^o}{4l^2\cos^3 30^o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T = K\frac{Q^2}{l^2} - K\frac{q^2\,\frac{1}{2}}{4l^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3} \Rightarrow \quad T = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o l^2}\left(Q^2 - \frac{q^2}{3\sqrt{3}}\right)$$

b) Si la tensión es nula el término del paréntesis de la ecuación anterior es cero

$$Q^2 = \frac{q^2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \quad q = \sqrt{3\sqrt{3}}\,Q = 2{,}28Q$$

c) Las tensiones en todos los hilos serán iguales cuando T_1=T

$$K\frac{Qq}{l^2} + K\frac{q^2}{8l^2\cos^3 30} = K\frac{Q^2}{l^2} - K\frac{q^2\cos 60^o}{4l^2\cos^3 30^o} \Rightarrow Qq + \frac{q^2}{8\cos^3 30} = Q^2 - \frac{q^2\cos 60^o}{4\cos^3 30^o} \Rightarrow$$

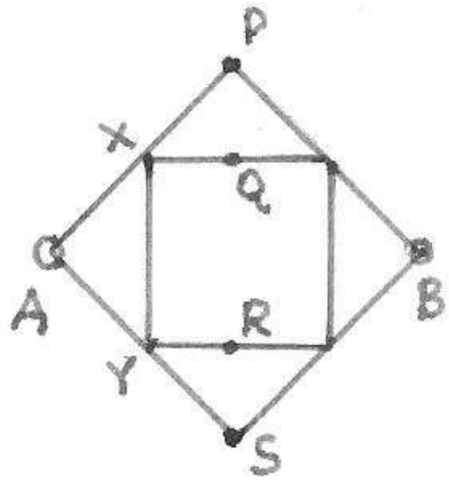
$$\Rightarrow Qq + 0{,}1925q^2 = Q^2 - 0{,}1925q^2 \Rightarrow \quad 0{,}385q^2 + Qq - Q^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$$q = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 + 1{,}54Q^2}}{0{,}77} = \frac{-Q\left(1 \pm \sqrt{2{,}54}\right)}{0{,}77} = \frac{-Q(1 \pm 1{,}59)}{0{,}77}$$

La solución es la positiva: q=0,77Q

106. (432)- ***Con alambre del mismo grosor y la misma resistividad eléctrica se construye el dispositivo indicado en la figura.***



La resistencia es proporcional a la longitud y el lado AP=L tiene una resistencia R. AX=AY=L/2. APBS es un cuadrado y dentro de él está inscrito otro. Calcular en función de R la resistencia eléctrica entre A y B.

Si en la figura del enunciado trazamos una línea vertical que pase por PQRS se observa que la mitad a la izquierda de esa línea es igual a la mitad derecha, por consiguiente, se trata de un circuito con simetría. Los puntos P,Q,R,S se encuentran al mismo potencial Nos basta con calcular la resistencia del lado izquierdo.

La resistencia de AX=AY=XP=YS= R/2.

La longitud de XY vale: $\sqrt{AX^2+AY^2} = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{L}{\sqrt{2}}$ y su resistencia $\frac{R}{\sqrt{2}}$.

La resistencia de XQ=YR es: $\frac{R}{2\sqrt{2}}$.

Establezcamos el circuito de una manera más clara, para ello consideramos cuatro puntos A, X ,Y y el que abarca a P, Q, R y S por estarlos cuatro puntos al mismo ‘potencial. Luego vamos de cada punto al que se conecta a notando la resistencia encontrada en el camino, el resultado es la figura 1.

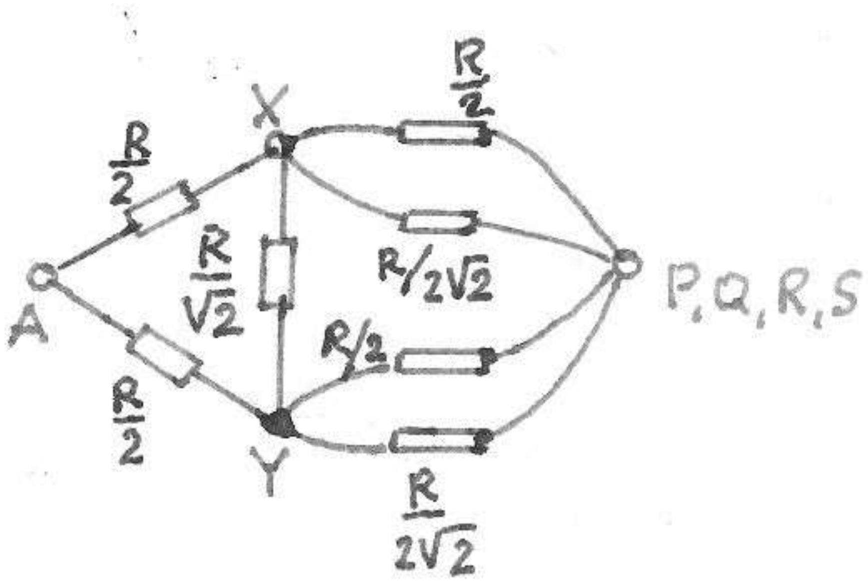


Fig 1

Las resistencias entre X y PQRS están en paralelo y lo mismo sucede entre Y y PQRS. Las sustituimos por una sola resistencia en cada tramo.

$$\frac{1}{R_E} = \frac{2}{R} + \frac{2\sqrt{2}}{R} \quad \Rightarrow \quad R_E = \frac{R}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}$$

El circuito de la figura 1 queda como el de la figura 2.

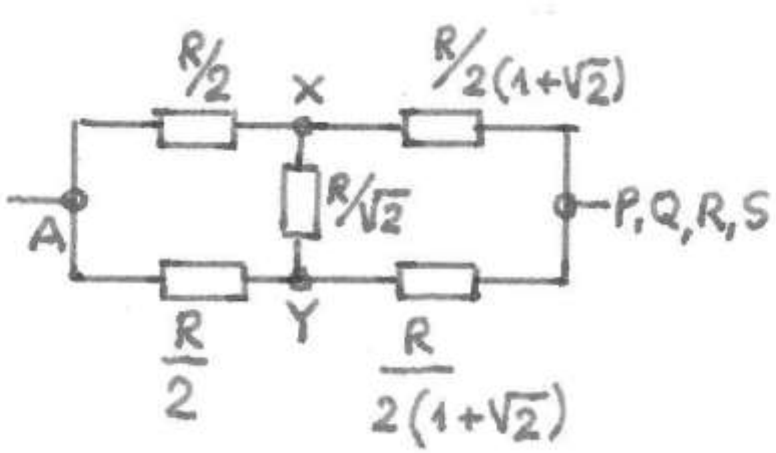


Fig.2

Los puntos X y el Y se encuentran al mismo potencial. Supongamos que por A llega una corriente I, esta se bifurca en dos cada una de valor I/2

$$V_A - V_X = \frac{I}{2}\cdot\frac{R}{2} \; ; \; V_A - V_Y = \frac{I}{2}\cdot\frac{R}{2} \quad \Rightarrow \quad V_A - V_X = V_A - V_Y \quad \Rightarrow \quad V_X = V_Y$$

Al ser los potenciales de X e Y iguales por la resistencia $\frac{R}{\sqrt{2}}$ no pasa corriente y por ello es como si hubiese no estuviese (figura3).

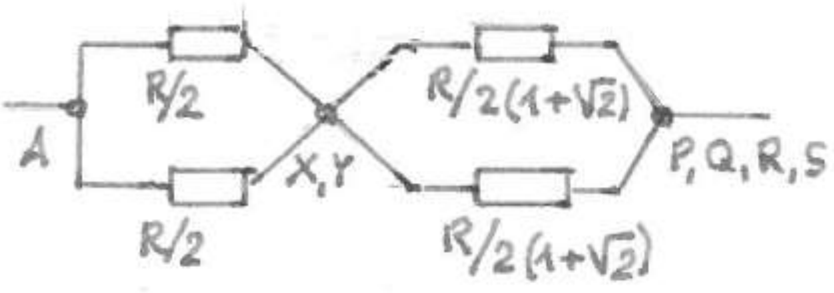


Fig.3

Entre A y X,y entre A e Y hay dos resistencias en paralelo y entre X,Y y P,Q,R.S otras dos en paralelo

$$\frac{1}{R_E} = \frac{2}{R} + \frac{2}{R} \quad \Rightarrow \quad R_E = \frac{R}{4} \quad ;$$

$$\frac{1}{R_E} = \frac{2\left(1+\sqrt{2}\right)}{R} + \frac{2\left(1+\sqrt{2}\right)}{R} = \frac{4\left(1+\sqrt{2}\right)}{R} \quad \Rightarrow \quad R_E = \frac{R}{4\left(1+\sqrt{2}\right)}$$

El circuito es el de la figura 4 con dos resistencias en serie.

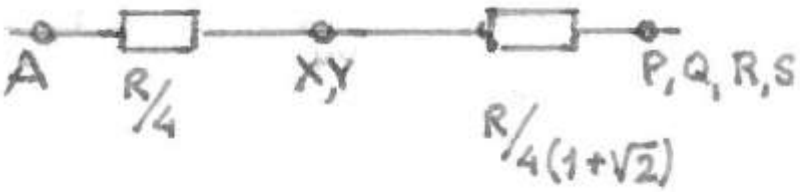


Fig.4

La resistencia es la suma de las dos

$$R_E = \frac{R}{4} + \frac{R}{4\left(1+\sqrt{2}\right)} = \frac{R\left(1+\sqrt{2}\right)+R}{4\left(1+\sqrt{2}\right)} = \frac{R\left(2+\sqrt{2}\right)}{4\left(1+\sqrt{2}\right)}$$

Hasta ahora solo hemos calculado la mitad del circuito del problema, la resitencia total es la suma

$$R_t = \frac{R\left(2+\sqrt{2}\right)}{4\left(1+\sqrt{2}\right)} + \frac{R\left(2+\sqrt{2}\right)}{4\left(1+\sqrt{2}\right)} = \frac{R\left(2+\sqrt{2}\right)}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}$$

107. (437)-***Una partícula de masa m posee una carga +q. Desde el origen de coordenadas cartesianas (situado el eje X en un suelo horizontal) y con una velocidad v_o se lanza la partícula formado un ángulo θ con el eje de abscisas. Durante el vuelo de la partícula actúa sobre ella un campo eléctrico de módulo E cuya dirección y sentido es el eje positivo de abscisas***

a) Calcular el ángulo θ para el que el alcance de la partícula sobre el eje X sea máximo.

b) Sea m = 1 kg , v_o = 50 m/s y qE=6 N , representar gráficamente la trayectoria de la partícula para el ángulo del apartado anterior y para dos ángulos más, uno mayor y otro menor.

c) Ahora el campo E actúa en dirección y sentido negativo del eje X. Determinar el ángulo θ que determina que la partícula después de lanzarla con velocidad v_o regrese al lugar inicial, esto es, al origen de coordenadas. Hacer una representación gráfica de la trayectoria cuando v_o = 50 m/s , m = 1 kg y qE= 36 N. En la misma gráfica representar las trayectorias para dos ángulos mayores que el anterior.

a) La partícula esta sometida a dos aceleraciones: una vertical y hacia abajo g= 9,8 m/s y otra con la dirección positiva del eje X. La fuerza eléctrica vale qE y de acuerdo con la ley de Newton

$$qE = m a_x \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{qE}{m}$$

Sobre la partícula existen dos movimientos uniformemente acelerados

$$x = v_o(\cos\theta)t + \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2 \quad ; \quad y = v_o(\operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}g t^2$$

Cuando la partícula alcance el eje X la coordenada y es cero

$$0 = v_o(\operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}g t^2$$

La solución de la ecuación anterior t=0 corresponde a la posición inicial de la partícula en el eje de coordenadas, la otra solución es.

$$0 = v_o\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}g t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2 v_o \operatorname{sen}\theta}{g}$$

Sustituimos ese tiempo en la ecuación de la abscisa

$$x = v_0 \cos\theta \cdot \frac{2 v_o \,\mathrm{sen}\theta}{g} + \frac{1}{2}\frac{qE}{m}\frac{4 v_o^2 \,\mathrm{sen}^2\theta}{g^2} = \frac{v_o^2}{g}\left(\mathrm{sen}\,2\theta + \frac{qE}{m}\frac{2\,\mathrm{sen}^2\theta}{g}\right) \quad (1)$$

Como hemos de calcular el alcance máximo derivamos la función anterior x=x(t) respecto a θ e igualamos acero.

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{v_o^2}{g}\left(2\cos 2\theta + \frac{2qE}{mg}\cdot 2\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos 2\theta + \frac{qE}{mg}\mathrm{sen}\,2\theta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{sen}\,2\theta = -\frac{mg}{qE}\cos 2\theta \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tag}\,2\theta = -\frac{mg}{qE} \quad (2)$$

b) Sustituimos en (2) los valores numéricos

$$\mathrm{tag}\,2\theta = -\frac{1\cdot 9{,}8}{6} = -1{,}63$$

Una solución de la ecuación anterior es 2θ =-58,47º ; θ =-29,24º. Esta solución no es válida para el problema pues no es posible lanzar desde el suelo con un ángulo negativo. Otra solución es que el ángulo 2θ esté en el segundo cuadrante.

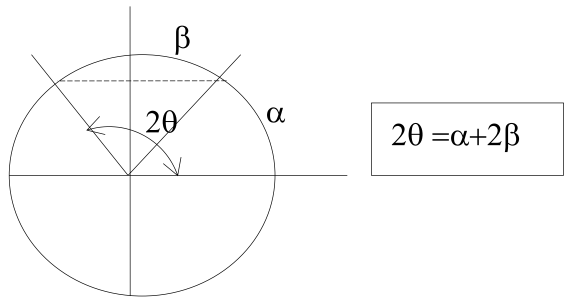


Fig.1

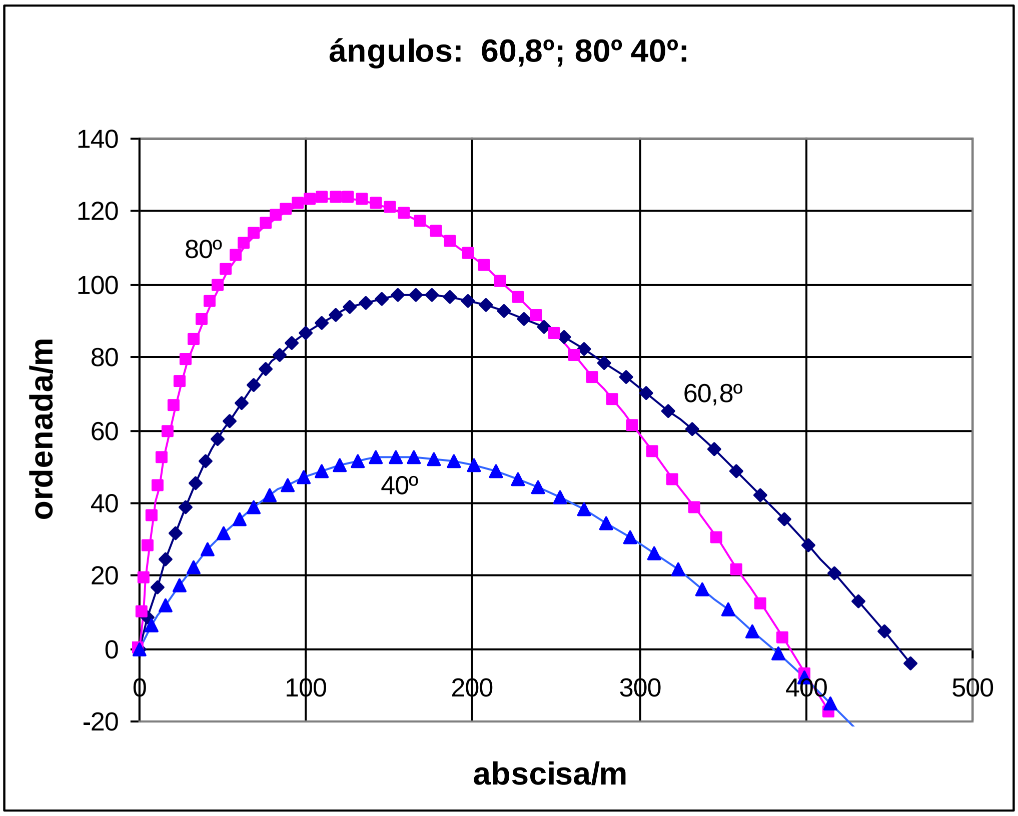
En la figura 1, el ángulo α y el 2θ tienen el mismo valor absoluto de la tangente, por tanto, la tangente del ángulo α vale 1,63 y el ángulo α = 58,47º , el β vale 90º-58,47 = 31,53º y

$$2\theta = 58{,}47º + 2\cdot 31{,}53 = 121{,}53º \Rightarrow \theta = 60{,}8º$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = 50\cdot(\cos 60{,}8º)t + 3t^2 \quad ; \quad y = 50\cdot(\mathrm{sen}60{,}8º)\,t - 4{,}9t^2$$

En la hoja de cálculo se dan valores a t y se representa x frente a y .Lo mismo se hace con otros dos ángulos uno mayor y otro menor que 60,7º



c) Las ecuaciones para este caso son:

$$x = v_o(\cos\theta)t - \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2 \quad ; \quad y = v_o(\operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}g t^2 \quad (3)$$

Cuando y=0, se deduce que $t = \dfrac{2v_o \operatorname{sen}\theta}{g}$ .Sustituyendo este valor de t en x, resulta:

$$x = v_0\cos\theta \cdot \frac{2v_o \operatorname{sen}\theta}{g} - \frac{1}{2}\frac{qE}{m}\frac{4v_o^2 \operatorname{sen}^2\theta}{g^2} = \frac{v_o^2}{g}\left(\operatorname{sen}2\theta - \frac{qE}{m}\frac{2\operatorname{sen}^2\theta}{g}\right)$$

Si la partícula ha de volver al origen de coordenadas, entonces x=0

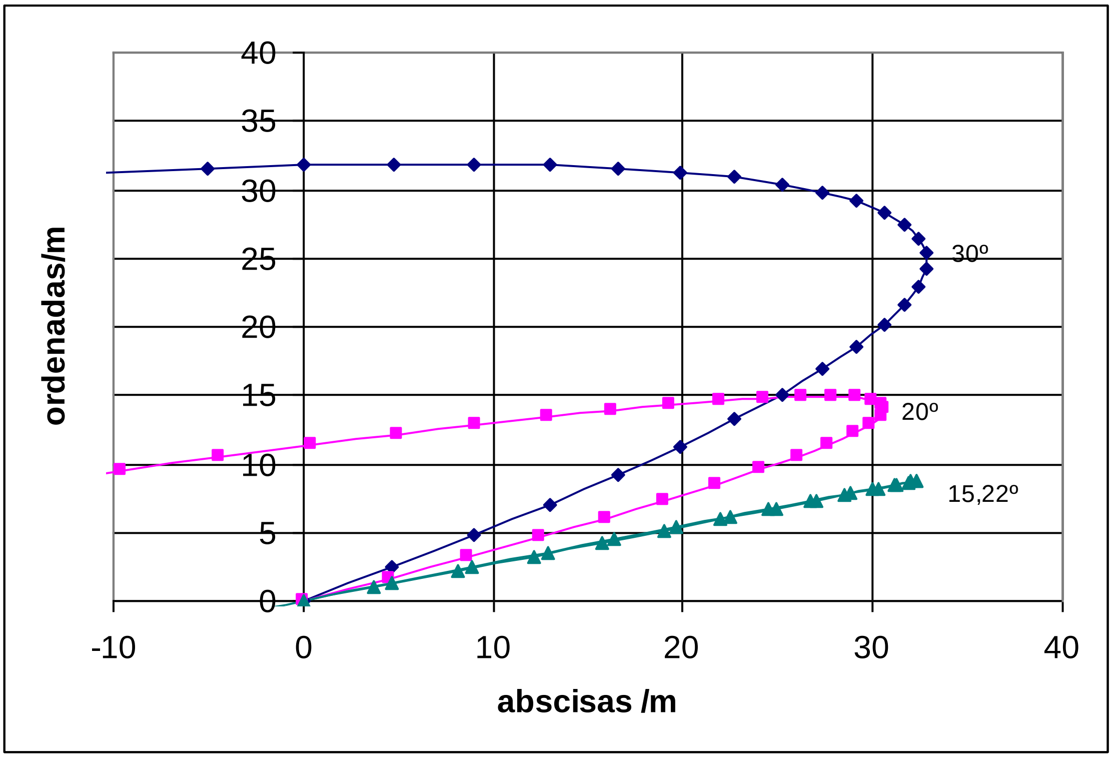
$$\frac{v_o^2}{g}\left(\operatorname{sen}2\theta - \frac{qE}{m}\frac{2\operatorname{sen}^2\theta}{g}\right) = 0 \Rightarrow \quad \operatorname{sen}2\theta - \frac{qE}{m}\frac{2\operatorname{sen}^2\theta}{g} \Rightarrow \quad 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{qE}{m}\frac{2\operatorname{sen}^2\theta}{g} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{qE}{m}\frac{\operatorname{sen}\theta}{g} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tag}\theta = \frac{mg}{qE} = \frac{1\cdot 9{,}8}{36} = 0{,}2722 \quad \Rightarrow \quad \theta = 15{,}22^{\circ}$$

Sustiuyendo los valores numéricos en (3)

$$x = 50 \cdot (\text{sen}15{,}22^{o}) \cdot t - \frac{36}{2 \cdot 9{,}8} t^2 \quad ; \quad y = 50 \cdot (\text{sen}15{,}22^{o}) \cdot t - 4{,}9 t^2$$

En la hoja de cálculo se dan valores a t y se representa x frente a y .Lo mismo se hace con otros dos ángulos mayores que 15,22º



108. (441)- ***Un haz de protones de 1,00 microamperios se acelerada mediante una diferencia de potencial de 10000 voltios.***
a) Calcular la densidad de carga después de la aceleración de los protones, suponiendo que la densidad de corriente es uniforme dentro de un diámetro d= 2,00 mm y nula fuera de ese diámetro.
b) Calcular la componente radial de la intensidad del campo eléctrico fuera y dentro del haz.
c) Representar gráficamente el campo frente a la distancia
d) Suponiendo ahora que el haz está situado en el eje de un tubo cilíndrico conductor a potencial cero y radio interior 1,00 cm. Representar gráficamente el potencial dentro del tubo

Datos . Carga del protón, q_p= 1,602.10^{-19} C, masa del protón, m_p =1,672.10^{-27} kg ;
permitividad del espacio vacio ε_o= 8,85.10^{-12} C^{2}N^{-1}m^{-2}

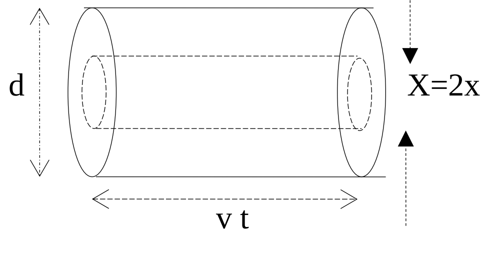
a) Calculamos la velocidad de los protones cuando han sido sometidos a la diferencia de potencial de diez mil voltios.

$$\frac{1}{2}m_p v^2 = \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2 q_p \,\Delta V}{m_p}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}672.10^{-19}\cdot 10^4}{1{,}672.10^{-27}}} = 1{,}38.10^6\ \frac{m}{s}$$

La relación entre la intensidad en amperios y la carga en culombios es: $Q = I\,t$.
En un tiempo t los protones se desplazan una longitud v t ocupando el volumen de un cilindro de altura v t y sección S .
La densidad volumétrica de carga es:

$$\rho = \frac{Q}{S\,v\,t} = \frac{I\,t}{S\,v\,t} = \frac{10^{-6}}{\pi\frac{\left(2.10^{-3}\right)^2}{4}\cdot 1{,}38.10^6} = 2{,}31.10^{-7}\ \frac{C}{m^3}$$

b) Para calcular la componente radial del campo eléctrico aplicamos el teorema de Gauss



En la figura superior la línea continua representa el cilindro con los protones y dentro de él se ha representado otro cilindro (en línea discontinua) que representa la superficie gaussiana. de radio x, siendo $x \le d$. El área lateral de esta superficie es $2\pi x v t$ y la carga contenida en su interior es:

$$\frac{Q}{\pi \frac{d^2}{4} v t} = \frac{q}{\pi x^2 v t} \quad \Rightarrow \quad q = 4Q\frac{x^2}{d^2}$$

Aplicamos el teorema de Gauss

$$\int E_i \cdot dS = \frac{\sum Q}{\varepsilon_O} \Rightarrow \quad E \cdot 2\pi x v t = \frac{4Q\frac{x^2}{d^2}}{\varepsilon_O} \Rightarrow E \cdot 2\pi x v t = \frac{4 I x^2 t}{\varepsilon_O d^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad E_i = \frac{2 I x}{\cdot \pi \; v d^2 \varepsilon_o} = \frac{2.10^{-6} x}{\pi \cdot 1{,}38.10^6 \cdot 4.10^{-6} \cdot 8{,}85.10^{-12}} = 1{,}30.10^4 x \; \frac{N}{C}$$

Este campo radial está dentro del haz de protones siendo $x \le \frac{d}{2}$

Para calcular el campo radial en el exterior del haz tomamos un cilindro de radio $x > \frac{d}{2}$ envolviendo al haz. La carga abarcada por este cilindro es la total del haz, esto es, Q. Aplicando el teorema de Gauss para este cilindro.

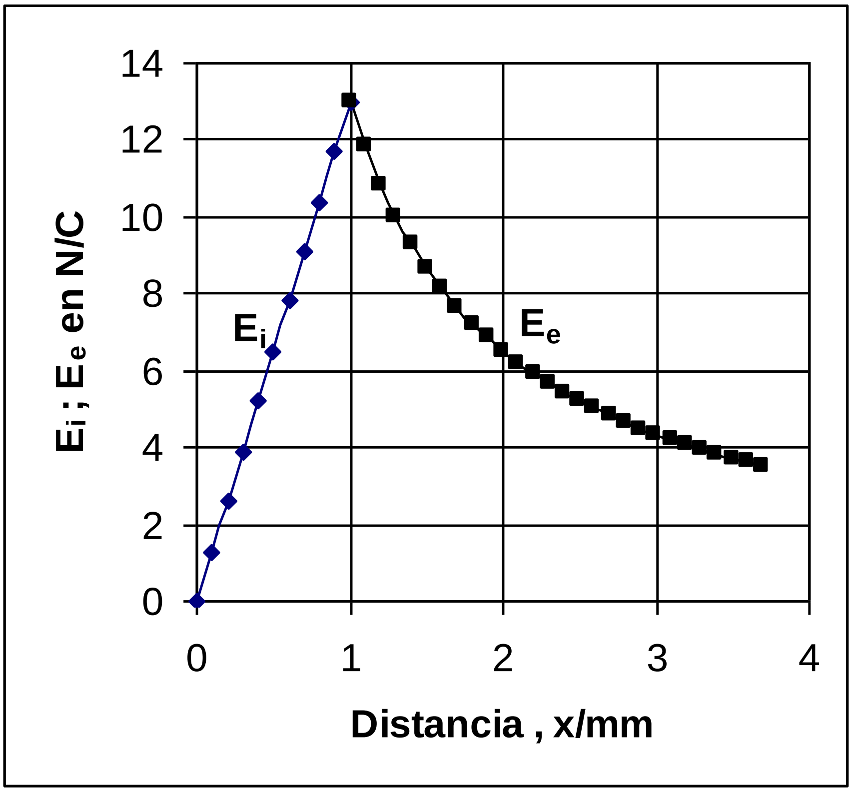
$$E_e \cdot 2\pi x v t = \frac{Q}{\varepsilon_o} = \frac{I t}{\varepsilon_o} \Rightarrow \quad E_e = \frac{I}{2\pi x v \varepsilon_o} = \frac{10^{-6}}{2\pi \cdot 1{,}38.10^6 \cdot 8{,}85.10^{-12}} \frac{1}{x} = \frac{1{,}30.10^{-2}}{x}$$

Este campo radial es exterior del haz de protones siendo $x \ge \frac{d}{2}$.

Cuando x=d/2 los dos campos deben dar el mismo valor

$$E_i = 1{,}30.10^4 \cdot 1.10^{-3} = 13\frac{N}{C} \;;\; E_e = \frac{1{,}30.10^{-2}}{1.10^{-3}} = 13\frac{N}{C}$$

c)



d) Calculamos el potencial exterior, esto es, entre la parte externa del haz y la interior del cilindro. Si designamos con R el radio interior del cilindro conductor , x toma los siguientes valores $\frac{d}{2} \le x \le R$. El valor del campo está ya calculado $E_e = \frac{I}{2\pi v \varepsilon_o}\frac{1}{x}$.

$$E_e = -\frac{dV_e}{dx} \Rightarrow \int -dV_e = \int \frac{I}{2\pi v\varepsilon_o}\frac{dx}{x} \Rightarrow \quad -V_e = \frac{I}{2\pi v\varepsilon_o}\ln x + Cte$$

Según el enunciado cuando x=R , el potencial V_e es nulo

$$0 = \frac{I}{2\pi v\varepsilon_o}\ln R + Cte \quad \Rightarrow \quad Cte = -\frac{I}{2\pi v\varepsilon_o}\ln R \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -V_e = \frac{I}{2\pi v\varepsilon_o}\ln x - \frac{I}{2\pi v\varepsilon_o}\ln R = \frac{I}{2\pi v\varepsilon_o}(\ln x - \ln R) = 1{,}30.10^{-2}(\ln x + 4{,}61) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad V_e = -1{,}30.10^{-2}(\ln x + 4{,}61)$$

Cálculo del potencial interior

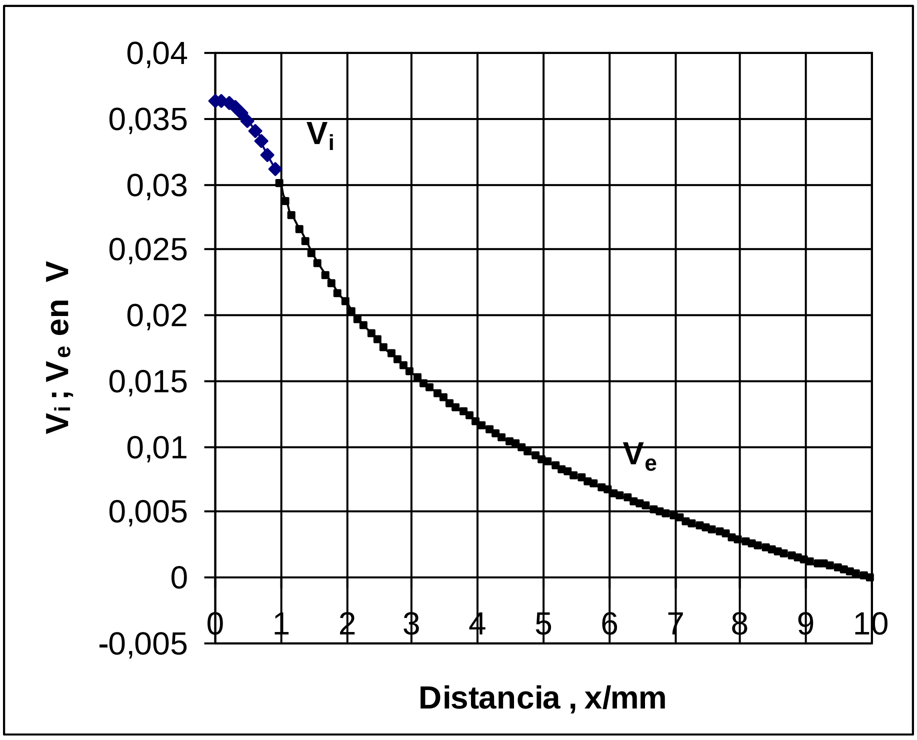
$$E_i = 1{,}30.10^4\, x = -\frac{dV_i}{dx} \Rightarrow \quad -V_i = 1{,}30.10^4\,\frac{x^2}{2} + Cte$$

Para calcular la Cte, hacemos uso del hecho de que los potenciales exterior e interior son iguales cuando $x = \frac{d}{2}$.

$$1{,}30.10^{-2}\left(\ln\frac{d}{2} + 4{,}61\right) = 1{,}30.10^{4}\cdot\frac{d^2}{8} + \text{Cte} \;\Rightarrow$$

$$\text{Cte} = 1{,}30.10^{-2}\left(\ln\frac{2.10^{-3}}{2} + 4{,}61\right) - 1{,}30.10^{4}\cdot\frac{\left(2.10^{-3}\right)^2}{8} = -0{,}0299 - 6{,}5.10^{-3} = 3{,}64.10^{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -V_i = 1{,}30.10^{4}\frac{x^2}{2} - 3{,}64.10^{-2} \quad\Rightarrow\quad V_i = 3{,}64.10^{-2} - 6{,}5.10^{3}x^2$$



109. (446)- ***N gotas de mercurio de forma esférica se cargan simultáneamente a un potencial V. Si estas gotas se unen entre sí formando una sola, calcular el potencial de ella.***

Designamos con q a la carga de cada gota, r su radio y con ρ a la densidad del mercurio. Calculamos en primer lugar la carga de una gota. El campo creado por una esfera de radio r en su superficie es

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2} = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow -V = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}dr = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad q = 4\pi\varepsilon_o rV \; (1)$$

La carga de la gota única es $Q = Nq = N4\pi\varepsilon_o rV$

La densidad de una gota pequeña es la misma que la de la gota grande de radio R

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow \; M = m\left(\frac{R}{r}\right)^3 \Rightarrow \; Nm = m\left(\frac{R}{r}\right)^3 \Rightarrow \; R^3 = N r^3 \Rightarrow \; R = \sqrt[3]{N}\, r$$

Aplicamos la ecuación (1) a la gota grande radio R

$$Q = 4\pi\varepsilon_o R\, V' = N\, 4\pi\varepsilon_o\, rV \quad \Rightarrow \quad V' = V\frac{N r}{R} = V\frac{N r}{\sqrt[3]{N}\, r} = N^{\frac{2}{3}} V$$