110. (451)- ***A una fuente de corriente alterna se unen de forma sucesiva, primero una resistencia, segundo una autoinducción y tercero un condensador. Las intensidades de las corrientes son 4 A , 2 A y 1 A respectivamente. Ahora se colocan en serie estos tres dispositivos y se unen a la misma fuente de alimentación a) Determinar la intensidad de la corriente b) La diferencia de fase entre esta intensidad y el voltaje de la fuente.***

a) Designamos con V el voltaje eficaz de la fuente de corriente alterna. Aplicamos la ley de Ohm

$$I_R = \frac{V}{R} \;\; ; \;\; I_L = \frac{V}{L\omega} \;\; ; \;\; I_C = \frac{V}{\frac{1}{C\omega}}$$

Al colocar los tres dispositivos en serie la impedancia del circuito es

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{\frac{V^2}{16} + \left(\frac{V}{2} - \frac{V}{1}\right)^2} = \sqrt{\frac{V^2}{16} + \frac{V^2}{4}} = \frac{V\sqrt{5}}{4}$$

La intensidad que circula por el circuito en serie es:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\frac{V\sqrt{5}}{4}} = 1{,}79\,A$$

b) El ángulo que mide la diferencia de fase es:

$$\operatorname{tag}\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \frac{\frac{V}{I_L} - \frac{V}{I_C}}{\frac{V}{I_R}} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{4}} = -2 \;\Rightarrow\; \varphi = -63{,}4^{\circ}$$

La intensidad de la corriente está adelantada respecto del voltaje de la fuente de alimentación.

111. (452)- ***La frecuencia de resonancia de un circuito serie R, L, C, es ω_o. Para esa frecuencia la intensidad de la corriente en el circuito es máxima y vale I_o. Existen dos intensidades de corriente que cumplen la relación $I = \frac{I_o}{\sqrt{2}}$, a las cuales corresponden frecuencias $\omega_1 < \omega_o$ y $\omega_2 > \omega_o$***

a) Determinar la relación entre la frecuencia de resonancia y ω_1 y ω_2

b) En un circuito serie RLC los valores numéricos son R =100 Ω, L = 0,15 H y C = 1 μF, V_{eficaz} = 100 V¸ calcular ω_o , ω_1 y ω_2

a) En la figura 1 está representada una curva de resonancia de un circuito serie, para el cual ω_o= 1000 s^{-1} , la intensidad I_o=0,316 A, y la intensidad $I = \frac{0,316}{\sqrt{2}} = 0,223A$

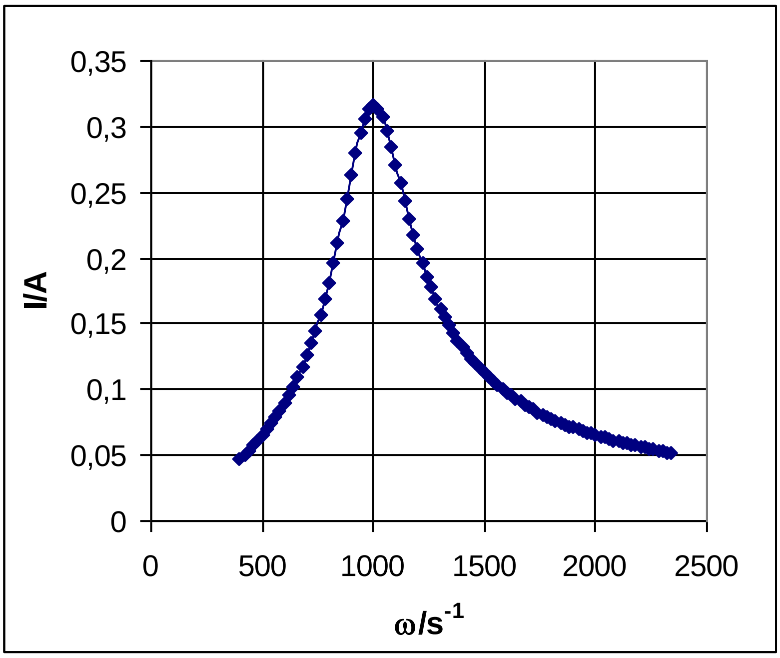


Fig.1

Las frecuencias ω_1< 1000 s^{-1} y ω_2> 1000 s^{-1}

Cuando en el circuito la frecuencia es inferior a ω_o la reactancia capacitiva X_C es mayor que la reactancia inductiva X_L . Veamos el porqué
A la frecuencia de resonancia se cumple:

$$L\omega_o = \frac{1}{C\omega_o} \quad \Rightarrow \quad \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

En la figura 2 se representa la situación de las reactancias para un valor inferior a ω_o y cundo se alcanza la resonancia..

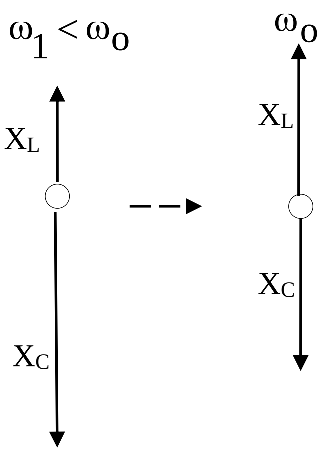


Fig 2

$X_L = L\omega_1$; $X_C = \dfrac{1}{C\omega_1}$ Al pasar de ω_1 a ω_o X_L aumenta y X_C disminuye.(como se observa en la figura 2). Si X_L fuese mayor que X_C , al aumentar la frecuencia, X_L seguiría siendo mayor que X_C y no podría alcanzarse la resonancia. Cuando la frecuencia es mayor que la de resonancia X_L es mayor que X_C.

En resumen a frecuencia menores que ω_o, $X_C>X_L$, en la resonancia $X_C= X_L$ y cuando las frecuencias son mayores que ω_o., $X_L>X_C$

Aplicamos la ley de Ohm para las frecuencias ω_1 y ω_2

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_1 - \dfrac{1}{C\omega_1}\right)^2}} \; ; \; I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_2 - \dfrac{1}{C\omega_2}\right)^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; R^2 + \left(L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1}\right)^2 = R^2 + \left(L\omega_2 - \frac{1}{C\omega_2}\right)^2 \; \Rightarrow \; L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1} = L\omega_2 - \frac{1}{C\omega_2}$$

De acuerdo con lo visto anteriormente el primer miembro de la última ecuación es negativo y en cambio el segundo miembro es positivo, para quitar esta incompatibilidad escribimos la ecuación de la siguiente manera

$$\frac{1}{C\omega_1} - L\omega_1 = L\omega_2 - \frac{1}{C\omega_2} \Rightarrow \frac{1}{C}\left[\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right] = L(\omega_1 + \omega_2) \Rightarrow \frac{1}{C}\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 \cdot \omega_2}\right] = L(\omega_1 + \omega_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow LC = \frac{1}{\omega_1 \cdot \omega_2} \Rightarrow \quad \omega_1 \cdot \omega_2 = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2} = \omega_o$$

b)

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L\,C}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}15\cdot 10^{-6}}} = 2582\,s^{-1} \quad\Rightarrow\quad f_o = \frac{\omega_0}{2\,\pi} = \frac{2582}{2\pi} = 411\,Hz \quad ;$$

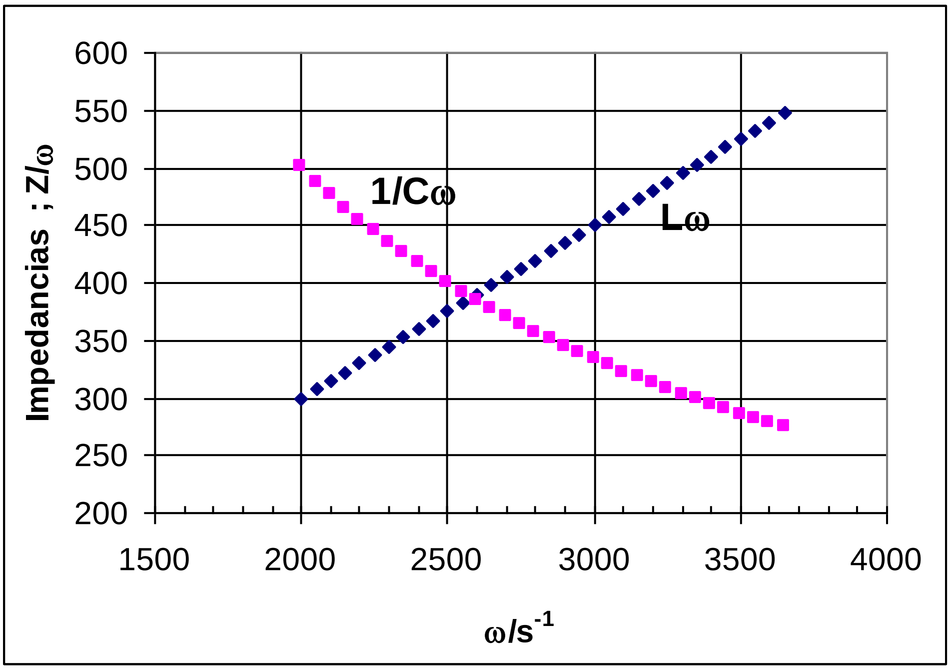
$$I_o = \frac{V}{R} = \frac{100}{100} = 1\,A \Rightarrow I = \frac{I_o}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,A$$

Calculamos una de las frecuencias

$$I = \frac{Veficaz}{Z} = 0{,}707 = \frac{100}{\sqrt{100^2 + \left(0{,}15\omega_2 - \frac{1}{10^{-6}\omega_2}\right)^2}} \Rightarrow 1 = \frac{141{,}4^2}{100^2 + \left(0{,}15\omega_2 - \frac{1}{10^{-6}\omega_2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(0{,}15\omega_2 - \frac{1}{10^{-6}\omega_2}\right)^2 = 141.44^2 - 10^4 \Rightarrow 0{,}15\omega_2 - \frac{10^6}{\omega_2} = 100{,}03 \quad (1)$$

En la ecuación (1) damos valores a ω y hacemos la representación gráfica del primer término y del segundo frente a ω.



El punto de corte corresponde a la frecuencia de resonancia, para valores inferiores la reactancia capacitiva supera a la inductiva y para valores mayores es al revés, tal como se hizo en la parte a .

Resolvemos la ecuación (1)

$$0,15\omega_2^2 - 100,03\omega_2 - 10^6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{100,03 \pm \sqrt{100,03^2 + 4 \cdot 0,15 \cdot 10^6}}{0,30} = \frac{100,03 \pm 781,03}{0,30}$$

Las soluciones son 2937 s^{-1} y -2270 s^{-1} , las cuales corresponden ambas en valor positivo a las frecuencias ω_2 y ω_1 respectivamente

Comprobamos

$$\omega_0 = \sqrt{2937 \cdot 2270} = 2582 s^{-1}$$

112. (455)- ***Sobre una barra aislante y horizontal están colocadas dos argollas a una distancia entre sí de D= 1 m y de ellas penden sendos hilos aislantes de longitud L=1 metro cada uno. En el extremo libre de cada hilo existen dos esferas conductoras, una de radio r y la otra de radio R=2r, ambas tienen la misma masa m = 1,00 gramo. A cada esfera se le suministra una carga de q= 8.10^-7^ C.***

a) Calcular el ángulo que forma cada hilo con la dirección vertical cuando el sistema esté en equilibrio.

b) Ahora se ponen en contacto ambas esferas y luego se separan, determinar el ángulo con la vertical.

c) Construir la gráfica ángulo con la vertical frente a D a partir de la situación del apartado a), esto es, cuando ambas esferas tienen la misma carga q. Nota. Este apartado del problema debe hacerse con ayuda de una hoja de cálculo

a) En la figura 1 se ha dibujado la situación en equilibrio de las esferas y las fuerzas que actúan sobre una de ellas.

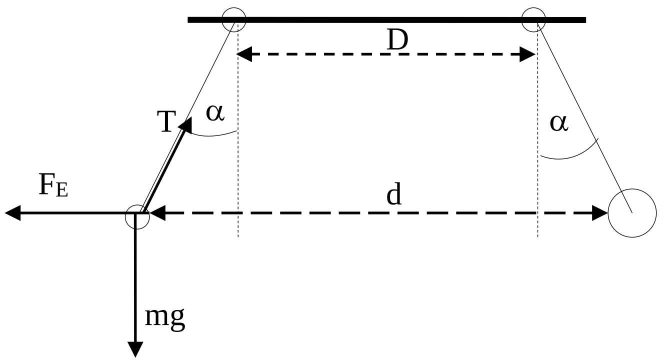


Fig.1

a) Igualando componentes de las fuerzas sobre los ejes horizontal y vertical

$$T\,\mathrm{sen}\alpha = F_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{d^2} \quad ; \quad T\,\mathrm{sen}\,\alpha = mg \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tag}\,\alpha = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{d^2}}{m\,g} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{tag}\,\alpha = \frac{9.10^9\left(8.10^{-7}\right)^2}{10^{-3}\cdot 9{,}8}\frac{1}{d^2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tag}\,\alpha = \frac{0{,}5878}{d^2} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{0{,}7667}{\sqrt{\mathrm{tag}\,\alpha}} \quad (1)$$

Observando la figura 1 se deduce

$$d = D + 2\;\; L\,\mathrm{sen}\alpha \quad \Rightarrow \quad d = 1 + 2\;\mathrm{sen}\,\alpha \quad (2)$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2)

$$1+2\ \mathrm{sen}\,\alpha=\frac{0{,}7667}{\sqrt{\mathrm{tag}\alpha}}\quad (3)$$

La ecuación (3) la resolvemos por tanteo, dando un valor a α y calculando ambos miembros. Cuando los dos sean iguales esa es la solución por ejemplo

$$\alpha=14^{\circ},\quad 1{,}4838<1{,}5359\quad;\ \alpha=15^{\circ},\quad 1{,}5176>1{,}4812\quad;\quad \alpha=14{,}6^{\circ},\ 1{,}5041\approx 1{,}5022$$

b) Al poner en contacto las esferas la carga se distribuye de modo que una adquiere más carga a costa de la que pierde la otra. El proceso de este trasvase termina cuando los potenciales son iguales. Designamos con q_1 a la carga de la esfera de radio r y con q_2 a la de radio R

Dado que la carga se conserva: $q_1+q_2=2q=16.10^{-7}$ (4)

Igualando los potenciales y recordando que la capacidad de una esfera es

$$C_1=4\pi\,\varepsilon r=\frac{q_1}{V}\quad;\ C_2=4\pi\,\varepsilon R=\frac{q_2}{V}\ \Rightarrow\ \frac{q_1}{r}=\frac{q_2}{R}\ \Rightarrow 2q_1=q_2\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_1+2q_1=2q=16.10^{-7}\quad\Rightarrow\qquad q_1=\frac{16.10^{-7}}{3}$$

Cuando de nuevo se alcance el equilibrio designamos al ángulo con la vertical por β y a la nueva distancia entre las esferas por ρ

$$\mathrm{tag}\,\beta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_2}{m g\rho^2}=9.10^9\,\frac{\frac{16.10^{-7}}{3}\cdot 2\frac{16.10^{-7}}{3}}{10^{-3}\cdot 9{,}8\rho^2}=\frac{0{,}5224}{\rho^2}\Rightarrow\quad \rho=\frac{0{,}7228}{\sqrt{\mathrm{tag}\,\beta}}$$

$$\Rightarrow\qquad \rho=1+2\,\mathrm{sen}\,\beta\quad\Rightarrow\qquad 1+2\,\mathrm{sen}\,\beta=\frac{0{,}7228}{\sqrt{\mathrm{tag}\,\beta}}\quad (5)$$

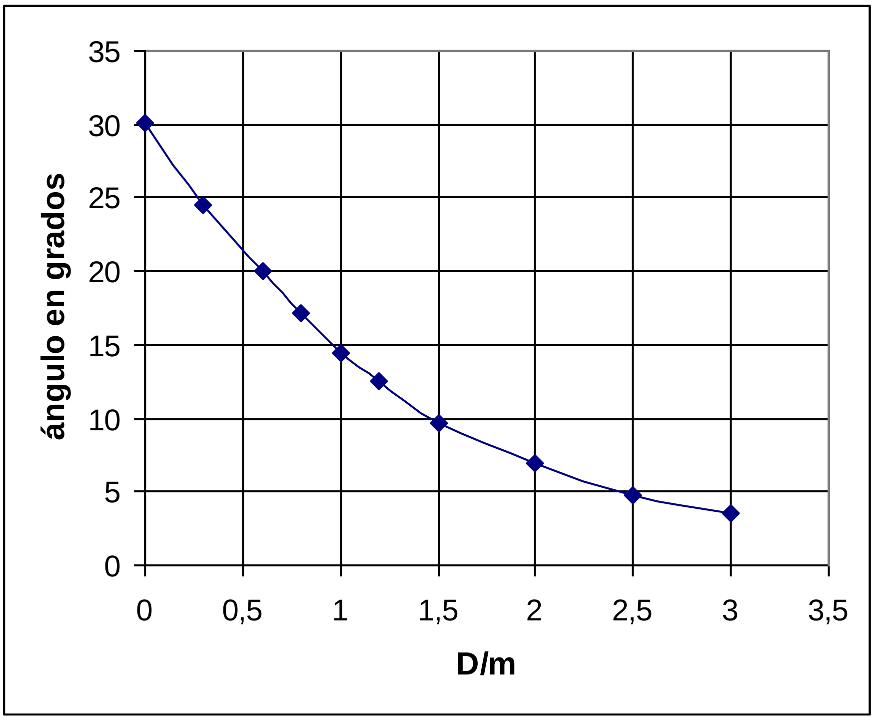
La ecuación (%) es semejante a la (3) y se resuelve por tanteo: β=13,6º

c) Las ecuaciones son las mismas que en el apartado a) salvo que aquí D es variable

$$d=D+2\ \mathrm{sen}\,\alpha\ ;\ \ \mathrm{tag}\,\alpha=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{m g d^2}=\frac{0{,}5878}{d^2}\Rightarrow\qquad d=\frac{0{,}7667}{\sqrt{\mathrm{tag}\,\alpha}}\quad\Rightarrow$$

$$D+2\,\mathrm{sen}\,\alpha=\frac{0{,}7667}{\sqrt{\mathrm{tag}\,\alpha}}$$

Damos un valor a D y en la hoja de cálculo representamos el primer miembro de la ecuación para distintos valores de α, hacemos lo mismo con el segundo miembro. Las dos graficas se cortan y ese punto es la solución de α para el valor dado a D. El procedimiento se repite para todos los valores de D.



113. (470)- ***Una carga positiva está distribuida de manera uniforme sobre un cilindro muy largo de radio R. La densidad de carga por unidad de volumen es*** $\boldsymbol{\rho}$***.***

a) Encontrar el módulo del campo eléctrico en función de la distancia desde el eje del cilindro al punto interior (x) y exterior del cilindro (r).,

b) Determinar para las mismas distancias el potencial eléctrico tomando como referencia de potencial nulo la superficie del cilindro.

c) Hacer lo mismo que en el apartado anterior pero tomando como referencia el potencial nulo cuando la distancia r= 3R.

d) Calcular que la diferencia de potencial entre y los puntos exteriores r = 10R y r = R y entre los puntos interiores x= R/6 y x=R/3 ; empleando los dos criterios de potencial nulo. Comentar el resultado.

e) Hacer la representación grafica de la distancia frente al potencial con el criterio del apartado b). Repetir pero con el criterio del apartado c).

Suponer que $\boldsymbol{\dfrac{\rho}{\varepsilon_o} = 1}$

a) Aplicamos el teorema de Gauss, suponiendo primero que una superficie cilíndrica de radio r>R rodea por completo al cilindro de radio R y longitud L>>R.. En este caso, dada la simetría, se cumple en cada punto de la superficie cilíndrica de radio r que el vector campo y el vector superficie forman un ángulo de cero grados, y por ello $\mathbf{E}\cdot\mathbf{dS} = E\,dS\cos 0^o = E\,dS$

$$\int E\,dS = \frac{\sum Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow \quad E\,S = \frac{V\rho}{\varepsilon_o} \Rightarrow \quad E\cdot 2\pi r L = \frac{\pi R^2 L\rho}{\varepsilon_o} \Rightarrow \quad E_E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o r} \quad r \geq R$$

Para los puntos interiores consideramos una superficie cilíndrica de radio x<R y longitud L incrustada en el interior del cilindro y aplicamos la ley de Gauss

$$\int E\,dS = \frac{\sum Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow \quad E\,S = \frac{V\rho}{\varepsilon_o} \Rightarrow \quad E\cdot 2\pi x L = \frac{\pi x^2 L\rho}{\varepsilon_o} \Rightarrow \quad E_I = \frac{\rho x}{2\varepsilon_o} \quad r \leq R$$

b) Entre el campo y el potencial existe la siguiente relación

$$E_E = -\frac{dV_E}{dr} \quad \Rightarrow \quad -V_E = \int E_E dr = \int \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o r} dr = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} \ln r + Cte$$

Cuando r= R el potencial es nulo de acuerdo con el criterio del enunciado

$$\text{Cte} = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\ln R \quad \Rightarrow -V_E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\ln r - \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\ln R \Rightarrow \quad V_E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\ln\frac{R}{r} \quad r \geq R \ \ (1)$$

Para puntos del interior del cilindro

$$E_I = -\frac{dV_I}{dx} \quad \Rightarrow \quad -V_I = \int E_I\, dr = \int \frac{\rho x}{2\varepsilon_o}dx = \frac{\rho x^2}{4\varepsilon_o} + \text{Cte}' \ \Rightarrow$$

$$\text{Cte}' = 0 - \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \ -V_I = \frac{\rho x^2}{4\varepsilon_o} - \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad V_I = \frac{\rho}{4\varepsilon_o}\left(R^2 - x^2\right) \quad x \leq R \qquad (2)$$

c) La diferencia con el apartado b) es que la constante de integración es distitnta . Partimos de las ecuaciones de anterior apartado

$$-V_E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\ln r + \text{Cte}$$

Cuando r= 3R al potencial se le atribuye el valor nulo, ahora la constante vale

$$0 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\ln 3R + \text{Cte} \quad \Rightarrow \quad \text{Cte} = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\ln 3R \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -V_E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\ln r - \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\ln 3R \quad \Rightarrow \quad V_E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\left(\ln\frac{3R}{r}\right) \qquad (3)$$

Para V_I, utilizamos el hecho de que el potencial de V_E e V_I es el mismo cuando x=r=R

$$-V_I = \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_o} + \text{Cte}' \ \Rightarrow \ V_I = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_o} - \text{Cte}' = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\left(\ln\frac{3R}{R}\right) \Rightarrow \text{Cte}' = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\left(\ln 3 + \frac{1}{2}\right) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad V_I = -\frac{\rho x^2}{4\varepsilon_o} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\left(\ln 3 + \frac{1}{2}\right) \ \ (4)$$

d) *Puntos exteriores al cilindro*

Empleando la ecuación (1)

$$\Delta V_E = V_{10R} - V_R = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\ln\frac{R}{10R} - 0 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}(-\ln 10) \quad (5)$$

Empleando la ecuación (3)

$$\Delta V_E = V_{10R} - V_R = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\ln\frac{3R}{10R} - \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\ln\frac{3R}{R} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}(\ln\frac{3}{10} - \ln 3) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\left(\ln 3 - \ln 10 - \ln 3\right)$$

$$\Rightarrow \ \Delta V_E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\left(-\ln 10\right) \quad (6)$$

Puntos interiores al cilindro

Empleando la ecuación (2)

$$\Delta V_I = V_{R/6} - V_{R/3} = \frac{\rho}{4\varepsilon_o}\left(R^2 - \frac{R^2}{36}\right) - \frac{\rho}{4\varepsilon_o}\left(R^2 - \frac{R^2}{9}\right) = \frac{\rho}{4\varepsilon_o}\cdot\frac{35R^2}{36} - \frac{\rho}{4\varepsilon_o}\frac{8R^2}{9} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V_I = \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_o}\left(\frac{35}{36} - \frac{32}{36}\right) \ \Rightarrow \quad \Delta V_I = \frac{\rho R^2}{48\varepsilon_o} \quad (7)$$

Empleando la ecuación (4)

$$\Delta V_I = -\frac{\rho R^2}{36\cdot 4\varepsilon_o} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\left(\ln 3 + \frac{1}{2}\right) - \left[-\frac{\rho R^2}{9\cdot 4\varepsilon_o} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\left(\ln 3 + \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_o}\left(-\frac{1}{36} + \frac{1}{9}\right) \Rightarrow$$

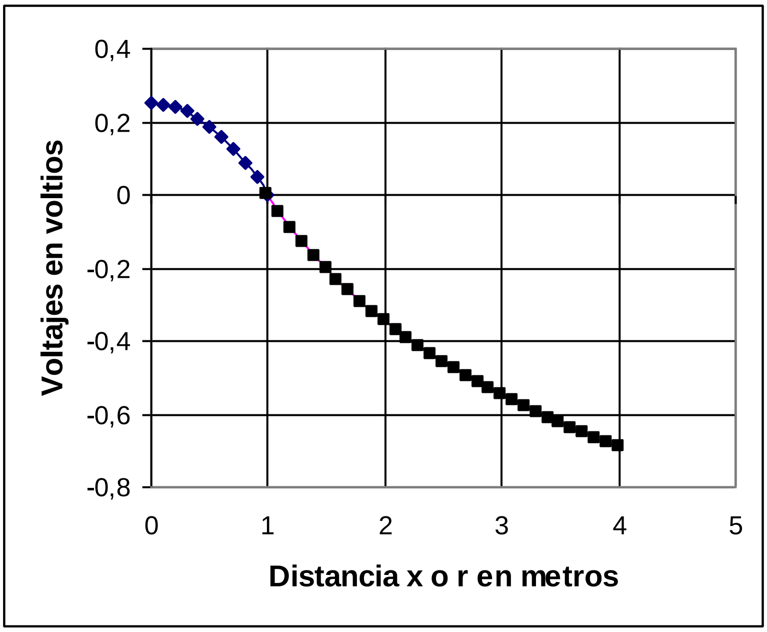
$$\Rightarrow \ \Delta V_I = \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_o}\left(\frac{-1+4}{36}\right) = \frac{\rho R^2}{48\varepsilon_o} \quad (8)$$

El valor del potencial depende del referencial elegido, por eso las ecuaciones (1) y (3) son diferentes y también lo son las ecuaciones (2) y (4).
Pero la diferencia de potencial entre dos puntos no depende del referencial elegido y así son iguales las ecuaciones (5) y (6) deducidas con distinto referencial y las ecuaciones (7) y (8) también elegidas con diferente referencial.
Esto ocurre porque sería absurdo que al cambiar el referencial variase la diferencia de potencial, ya que esta mide el trabajo por unidad de carga positiva entre los dos puntos. De no ser así nos encontraríamos que con cambiar de referencial y llevar la carga entre 1os puntos A y B se necesita un trabajo pero entre B y A cambiando de referencial otro trabajo, esto nos permitiría obtener trabajo gratuito y eso es imposible pues violaría el principio de conservación de la energía.

e) Utilizando el criterio de que el voltaje en la superficie del cilindro es nulo,las ecuaciones son:

$$V_I = \frac{\rho}{4\varepsilon_o}\left(R^2 - x^2\right) = \frac{1}{4}\left(1 - x^2\right) \quad ; \quad V_E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\ln\frac{R}{r} = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{r}$$

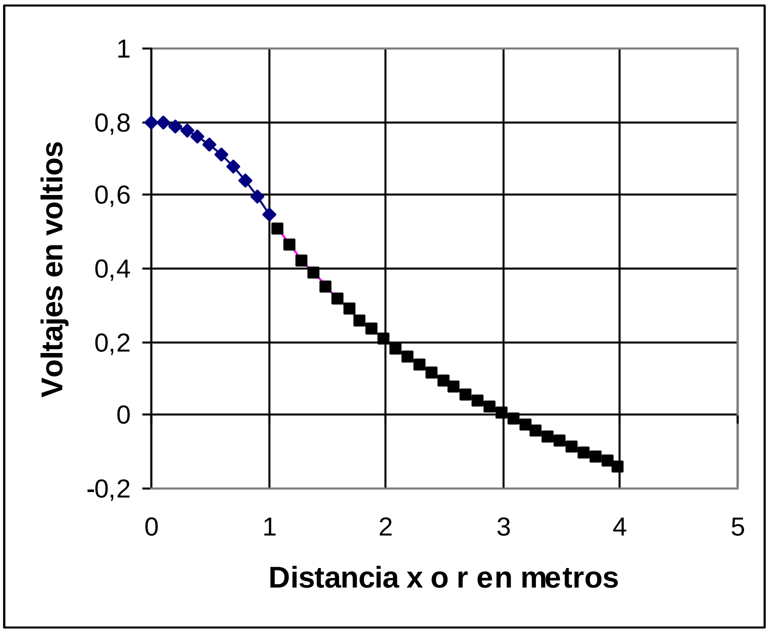
La gráfica de las ecuaciones anteriores es:



Utilizando el criterio de que cuando r=3R el voltaje es cero, las ecuaciones son

$$V_I = -\frac{\rho x^2}{4\varepsilon_o} + \left(\ln 3 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\left(\ln 3 + \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad V_E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} \ln \frac{3R}{r} = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{r}$$

La gráfica de las ecuaciones anteriores es:



114. (471)- ***Una delgada varilla de longitud L se encuentra situada sobre el eje X, un extremo en el origen y el otro en la coordenada +L. La densidad lineal de carga de la varilla es : λ = (+k) x. a) Calcular el potencial eléctrico en los puntos P y Q , siendo sus coordenadas P(-r,0) y Q (0, +r) b) Dibujar las gráficas del potencial (eje Y) frente a distintos valores de r (eje X) siendo L = 1 m y $k=\frac{1}{9}10^{-9}\,\frac{C}{m^2}$. c) Calcular la diferencia de potencial ΔV entre los puntos P y Q para distintos valores de r. Construir la gráfica ΔV frente a r. d) Calcular el valor de r correspondiente al máximo de esa diferencia***

a) En la figura 1 se detalla la situación de la varilla y los puntos P y Q. También se indica un elemento de la varilla de longitud dx situado a una distancia x del origen

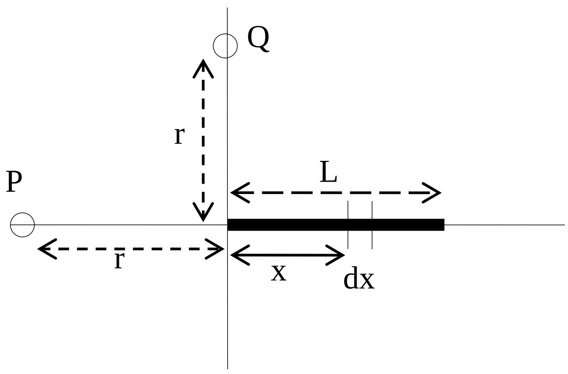


Fig. 1

La carga del elemento dx es: dq = λ dx = k x dx y crea un potencial en P

$$dV_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O}\frac{dq}{x+r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O}\frac{k\,x\,dx}{x+r}$$

El potencial creado por toda la carga de la varilla es

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^L \frac{k\,x}{x+r}dx$$

Para resolver la integral hacemos el cambio de variable

$$x + r = b \;\Rightarrow dx = db \;\Rightarrow \quad \int_0^L \frac{k\,(b-r)}{b}db = k\int_0^L\left(1-\frac{r}{b}\right)db = k\left[b - r\,\ln b\right]_0^L =$$

$$= \left[k\,(x+r) - k\,r\ln(x+r)\right]_o^L \quad \Rightarrow V_P = \frac{k}{4\pi\varepsilon_o}\left[(x+r) - r\ln(x+r)\right]_o^L \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_P = \frac{k}{4\pi\varepsilon_o}\left[L + r - r\ln(L+r) - (r - r\ln r)\right] \;\Rightarrow V_P = \frac{k}{4\pi\varepsilon_o}\left(L - r\,\ln\frac{L+r}{r}\right)$$

Siguiendo el procedimiento anterior, calculamos el potencial en el punto Q teniendo en cuenta que la distancia entre el elemento dx y el punto Q es; $\sqrt{x^2+r^2}$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^L \frac{k\,x}{\sqrt{x^2+r^2}}dx$$

Para resolver la integral hacemos el cambio de variable: $x^2+r^2=v^2$

$$x^2+r^2=v^2 \quad \Rightarrow\ 2\,x\,dx = 2\,v\,dv \quad \Rightarrow\ x\,dx = v\,dv \ \Rightarrow\ V_Q = \frac{k}{4\pi\varepsilon_O}\int_o^L \frac{v\,dv}{v} \quad \Rightarrow$$

$$V_Q = \frac{k}{4\pi\varepsilon_o}[v]_o^L = \frac{k}{4\pi\varepsilon_o}\left[\sqrt{x^2+r^2}\right]_o^L \ \Rightarrow\ V_Q = \frac{k}{4\pi\varepsilon_o}(\sqrt{L^2+r^2}-r)$$

b) Sustituyendo valores en las ecuaciones de los potenciales

$$V_Q = \frac{\frac{1}{9}\cdot 10^{-9}\,\frac{C}{m^2}}{4\pi\varepsilon_o}(\sqrt{L^2+r^2}-r) = \frac{1}{9}\cdot 10^{-9}\,\frac{C}{m^2}.9.10^9\,\frac{N\,m^2}{C^2}(\sqrt{L^2+r^2}-r) = 1\cdot\frac{N}{C}(\sqrt{L^2+r^2}-r)$$

Las distancias L y r se expresarán en metros para que V_Q se obtenga en voltios, ya que

$$\text{Voltio} = \frac{\text{Trabajo}}{\text{carga}} = \frac{N\,m}{C}$$

Las ecuaciones que se representan son

$$V_Q = \sqrt{1+r^2}-r \quad y \quad V_P = 1-r\ \ln\frac{1+r}{r}$$

Para hacer la representación gráfica damos valores a r en las dos ecuaciones anteriores y hacemos con ellos la representación de la figura 2.

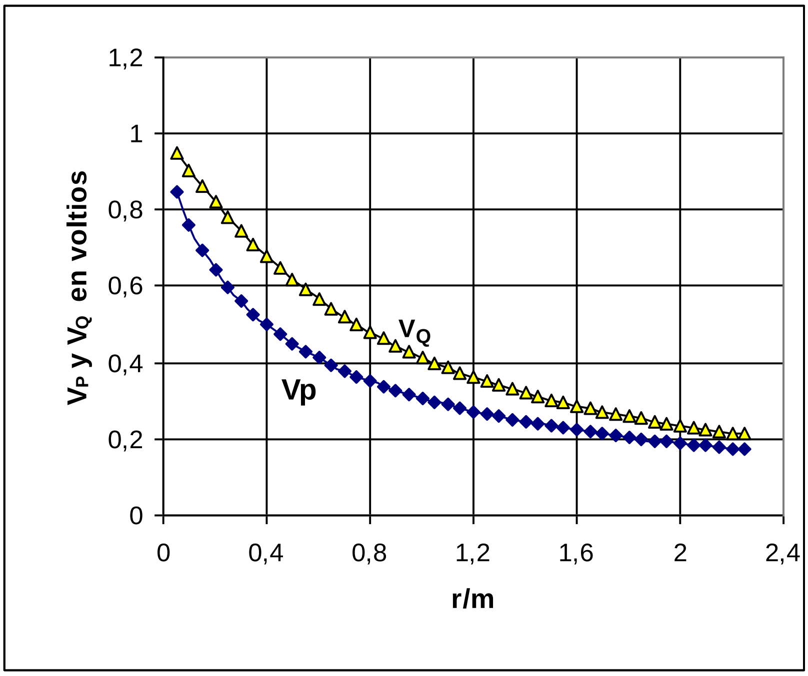


Fig.2

c) La diferencia entre ambos potenciales es

$$\Delta V = \sqrt{1+r^2} - r - \left(1 - r \ln\frac{1+r}{r}\right) = \sqrt{1+r^2} - r - \left[1 - r\ln(1+r) + r\ln r\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta V = \sqrt{1+r^2} - r - 1 + r\ln(1+r) - r\ln r$$

Dando valores a r se obtiene la gráfica de la figura 3.

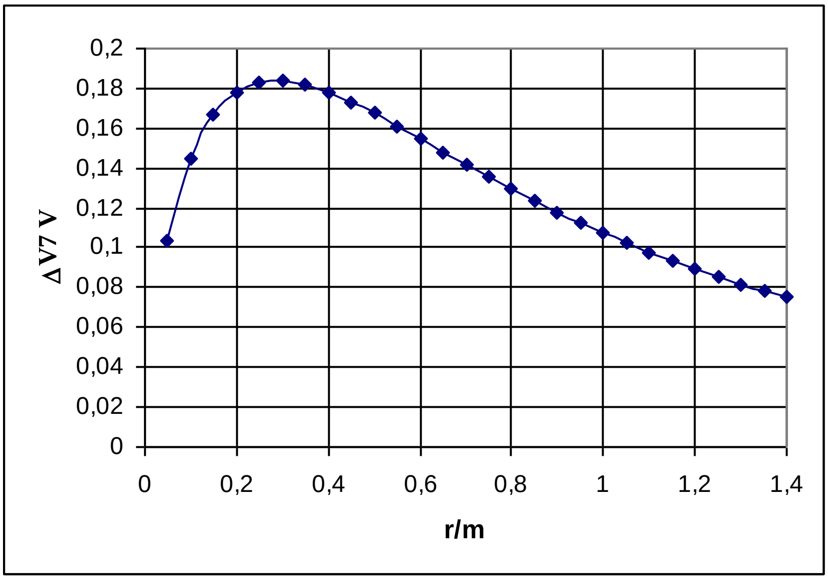


Fig. 3

d) Para calcular el máximo derivamos la función ΔV respecto de r e igualamos a cero.

$$\frac{d(\Delta V)}{dr} = \frac{2r}{2\sqrt{1+r^2}} - 1 + r\cdot\frac{1}{1+r} + \ln(1+r) - \left(r\cdot\frac{1}{r} + \ln r\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} + \frac{r}{1+r} + \ln(1+r) = 2 + \ln r \Rightarrow r\left(\frac{1}{\sqrt{1+r^2}} + \frac{1}{1+r}\right) = 2 + \ln\frac{r}{1+r}$$

La ecuación última la resolvemos por tanteo, teniendo en cuenta dónde se encuentra el máximo en la figura 3, empezamos por el valor r = 0,26

$$0{,}26\left(\frac{1}{\sqrt{1+0{,}26^2}} + \frac{1}{1+0{,}26}\right) = 2 + \ln\frac{0{,}26}{1+0{,}26} \Rightarrow 0{,}4580 > 0{,}4228$$

$$0{,}28\left(\frac{1}{\sqrt{1+0{,}28^2}} + \frac{1}{1+0{,}28}\right) = 2 + \ln\frac{0{,}28}{1+0{,}28} \Rightarrow 0{,}4883 > 0{,}4801$$

$$0{,}286\left(\frac{1}{\sqrt{1+0{,}286^2}} + \frac{1}{1+0{,}286}\right) = 2 + \ln\frac{0{,}286}{1+0{,}286} \Rightarrow 0{,}4973 > 0{,}4967$$

El máximo se encuentra en r = 0,286 m.

Ricardo David Fernández Cruz José Luis Hernández Pérez

115. (479)- ***Un circuito está formado por una batería de 18 V y resistencia interna 0,1 Ω, en serie con dos resistencias de 0,4 Ω y 6,0 Ω independientes de la intensidad de la corriente que las atraviese. En paralelo con la resistencia de 6 Ω se conecta un semiconductor cuya resistencia en ohmios es $R=\sqrt{\frac{18}{I}}$, siendo I la intensidad de la corriente que lo atraviesa medida en amperios. Calcular I.***

Propuesto en el libro "Fundamentos de electricidad y magnetismo" E.M Pugh y E.W. Pugh. Editorial Aguilar

En la figura 1 se encuentra el esquema del circuito

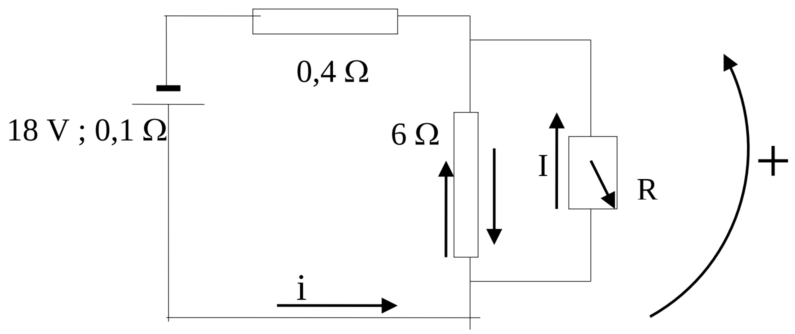


Fig. 1

La intensidad i atraviesa la batería y la resistencia de 0,4 Ω. La intensidad I atraviesa el semiconductor y las intensidades i hacia arriba e I hacia abajo la resistencia de 6 Ω. Aplicamos la ley de ohm generalizada a las dos mallas del circuito

$$i\cdot 0{,}5+i\cdot 0{,}4+(i-I)\cdot 6=18 \quad ; \quad I\,R+(I-i)\cdot 6=0$$

Sumamos las dos ecuaciones

$$i\cdot 0{,}5+IR=18 \;\Rightarrow\; i=\frac{18-IR}{0{,}5} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow IR+\left(I-\frac{18-IR}{0{,}5}\right)\cdot 6=0 \;\Rightarrow IR+6I-18\cdot 12+12\,IR=0 \;\Rightarrow\; 13IR+6I-216=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13I\sqrt{\frac{18}{I}}+6I=216 \;\Rightarrow 13\sqrt{18I}+6I=216 \;\Rightarrow\; 39\sqrt{2I}=216-6I\Rightarrow$$

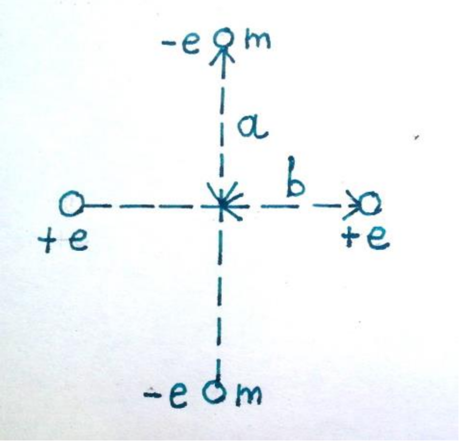
$$\Rightarrow 3042I=46656+36I^2-2592I \;\Rightarrow\; 36I^2-5634I+46656=0 \;\Rightarrow\; I^2-156{,}5+1296=0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$$I = \frac{156{,}5 \pm \sqrt{156{,}5^2 - 4 \cdot 1296}}{2} = \frac{156{,}5 \pm 139}{2} \quad \text{Solución } 1 = 8{,}75\text{A}\ ; \text{Solución } 2 = 147{,}75\text{A}$$

La solución válida es 8,75 que al sustituir ese valor en i da un número positivo, mientras que la solución 2 da para i un valor negativo.

116. (482)- ***El sistema de la figura está formado por cuatro cargas, cada una de módulo e, colocadas en el vacío. Las dos cargas negativas están asentadas sobre una masa m. Las dos positivas se encuentran fijas, y las dos negativas giran en una circunferencia de centro en la mitad del segmento de longitud 2b y radio a, siendo a perpendicular a la línea de longitud 2b en su punto medio.***



a) Calcular la relación entre a y b para segurar que existe equilibrio estático del sistema.
b) ¿A qué velocidad angular deben girar las cargas negativas para que haya equilibrio dinámico?
Se desprecian las posibles interacciones gravitatorias.

a) En la figura 1 se han dibujado las fuerzas que actúan sobre una carga positiva y una negativa. Sobre la positiva de la derecha actúan tres fuerzas cuya suma vectorial debe ser nula. Escribimos la suma de las componentes sobre el eje horizontal

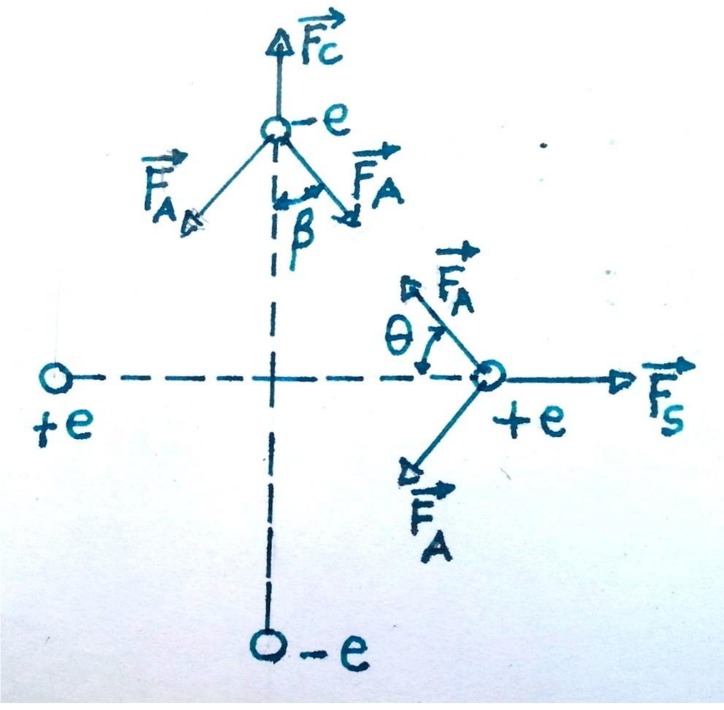


Fig.1

$$F_S - 2F_A\cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; K\frac{e^2}{(2b)^2} = 2K\frac{e^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \;\Rightarrow\; \frac{1}{4b^2} = \frac{2b}{\left(a^2+b^2\right)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8b^3 = \left(a^2+b^2\right)^{\frac{3}{2}} \;\Rightarrow\; \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} b = \left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow\; 2b = \left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; 4b^2 = a^2+b^2$$

$$\Rightarrow 3b^2 = a^2 \qquad \Rightarrow\; \frac{a}{b} = \sqrt{3}$$

La fuerza resultante sobre la carga negativa es la que proporciona a la masa m la fuerza centrípeta que necesita para girar

$$2F_A\cos\beta - F_C = m\omega^2 a \;\Rightarrow 2K\frac{e^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - K\frac{e^2}{4a^2} = m\omega^2 a \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{Ke^2}{ma}\left[\frac{2a}{\left(a^2+b^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4a^2}\right] = \omega^2$$

Sustituimos b en función de a: $b = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$$\frac{Ke^2}{ma}\left[\frac{2a}{\left(a^2+\frac{a^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4a^2}\right] = \omega^2 \Rightarrow \frac{Ke^2}{ma}\left[\frac{2a}{\left(\frac{4a^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4a^2}\right] = \omega^2 \Rightarrow \frac{Ke^2}{ma}\left[\frac{3^{\frac{3}{2}}\cdot 2a}{4^{\frac{3}{2}}a^3} - \frac{1}{4a^2}\right] = \omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Ke^2}{ma}\left(\frac{3\sqrt{3}a}{8a^3} - \frac{1}{4a^2}\right) = \omega^2 \Rightarrow \quad \frac{Ke^2}{ma}\left(\frac{3\sqrt{3}-1}{4a^2}\right) = \omega^2 \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{ma}}\,\frac{e\sqrt{3\sqrt{3}-1}}{2a}$$

117. (483)-***En el circuito de la figura están instalas 30 bombillas en paralelo cada una con una resistencia de 30 Ω. Además existe una batería de fuerza electromotriz $\varepsilon_B = 24V$ y resistencia interna r_B =0,02Ω y un generador de resistencia interna r_G =0,04 Ω y de fuerza electromotriz variable ε_G .Los polos del generador y de la batería están conectados positivo con positivo y negativo con negativo.***

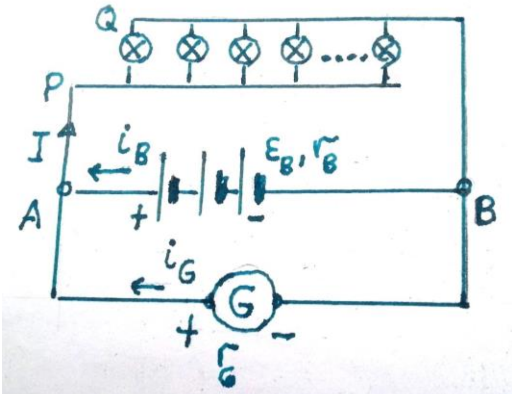


Fig.1

a) Calcular si la batería suministra corriente a las bombillas cuando la fuerza electromotriz del generador es 24,2 V.
b) Calcular la fuerza electromotriz del generador a partir de la cual la batería no suministra corriente a las bombillas.
c) Cuando la fuerza electromotriz del generador es 22,5 V determinar la intensidad de la corriente que lo atraviesa.

a) Calculamos la resistencia de las bombillas dispuestas en paralelo

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + ...\frac{1}{30} = \frac{30}{30} \Rightarrow \qquad R = 1\Omega$$

En la figura 1 se ha dibujado el circuito de una manera más conocida

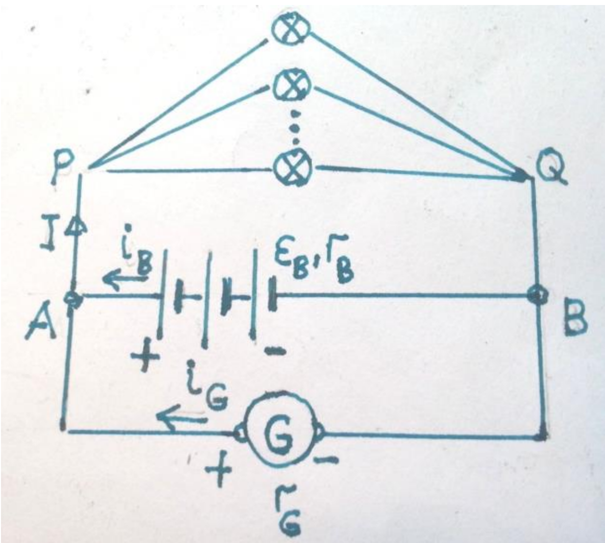


Fig.1

$$I = \frac{V_{PQ}}{1} = V_{AB} \;\; ; \qquad V_{AB} = \varepsilon_B - i_B 0{,}02 \;\; ; \qquad V_{AB} = \varepsilon_G - i_G 0{,}04 \quad ; \quad I = i_B + i_G$$

A partir de las ecuaciones anteriores

$$I = \varepsilon_B - i_B 0{,}02 = i_B + i_G \qquad ; \quad I = \varepsilon_G - i_G 0{,}04 = i_B + i_G$$

Despejamos i_G en la primera ecuación y sustituimos en la segunda

$$i_G = \varepsilon_B - i_B 1{,}02 \;\Rightarrow\quad \varepsilon_G - (\varepsilon_B - i_B 1{,}02)\cdot 1{,}04 = i_B \;\; ; \; \varepsilon_G - 1{,}04\,\varepsilon_B + 1{,}0608\,i_B = i_B \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}0608\,i_{\mathbf{B}} = 1{,}04\,\varepsilon_B - \varepsilon_G \quad \Rightarrow i_B = \frac{1{,}04\cdot 24 - 24{,}2}{0{,}0608} = 12{,}5\,\mathrm{A}$$

La batería suministra energía a las bombillas pues el signo es positivo de acuerdo con la figura 1.

b) Si no suministra energía a las bombillas, i_B=0

$$0{,}0608\,i_B = 1{,}04\,\varepsilon_B - \varepsilon_G = 0 \quad \Rightarrow \varepsilon_G = 1{,}04\cdot 24 = 24{,}96\ \mathrm{V}$$

c)

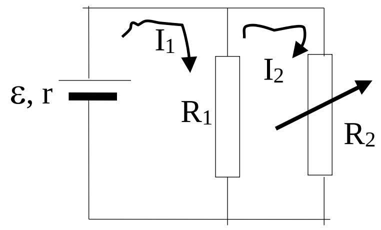
$$0{,}0608\,i_{\mathbf{B}} = 1{,}04\,\varepsilon_B - \varepsilon_G \;\Rightarrow\quad i_B = \frac{1{,}04\cdot 24 - 22{,}5}{0{,}0608} = 40{,}5\,\mathrm{A} \;\Rightarrow$$

$$\varepsilon_G - i_G\, 0{,}04 = i_B + i_G \Rightarrow 22{,}5 - i_G\, 0{,}04 = 40{,}5 + i_G \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 1{,}04\,i_G = +22{,}5 - 40{,}5 \quad \Rightarrow i_G = \frac{-18}{1{,}04} = -17{,}3\,\mathrm{A}$$

El signo menos indica que la intensidad de la corriente circula en sentido contrario al indicado en la figura 1.

118. (484)- ***En el circuito de la figura inferior, r es la resistencia interna de la batería de fuerza electromotriz ε, R_1 es una resistencia fija y R_2 variable.***



Calcular R_2 en función de r , R_1 y ε, para que la potencia consumida en R_2 sea máxima

Olimpiada de Moscú

Dibujar la gráfica potencia frente a R_2 , siendo ε =4,5 V , r =30 Ω , R_1 =100 Ω

Aplicamos Kirchhoff a las dos mallas del circuito. Designamos con I_1 la intensidad de la primera malla y con I_2 la de la segunda

$$(I_1 - I_2)R_1 + I_1 r = \varepsilon \qquad ; \qquad I_2 R_2 + (I_2 - I_1)R_1 = 0$$

Despejamos I_1 de la primera ecuación: $I_1 = \dfrac{\varepsilon + I_2 R_1}{R_1 + r}$

Despejamos I_2 de la segunda ecuación y sustituimos I_1 de la primera

$$I_2 = \frac{I_1 R_1}{R_1+R_2} = \frac{\dfrac{\varepsilon + I_2 R_1}{R_1 + r}\cdot R_1}{R_1+R_2} \Rightarrow \quad I_2\,(R_1+R_2) = \frac{\varepsilon R_1 + I_2 R_1^2}{R_1+r} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I_2\,(R_1+R_2) - I_2 \frac{R_1^2}{R_1+r} = \frac{\varepsilon R_1}{R_1+r} \Rightarrow \quad I_2\left[(R_1+R_2)\cdot(R_1 + r) - R_1^2\right] = \varepsilon R_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I_2 = \frac{\varepsilon R_1}{(R_1+R_2)\cdot(R_1 + r) - R_1^2}$$

La potencia disipada en la resistencia R_2 vale:

$$P = I_2^2 R_2 = \left(\frac{\varepsilon R_1}{(R_1+R_2)\cdot(R_1+r) - R_1^2} \right)^2 \cdot R_2 = \varepsilon^2 R_1^2 \frac{R_2}{\left[(R_1+R_2)\cdot(R_1+r) - R_1^2\right]^2}$$

Como piden la potencia máxima derivamos la función anterior respecto de R_2 e igualamos a cero

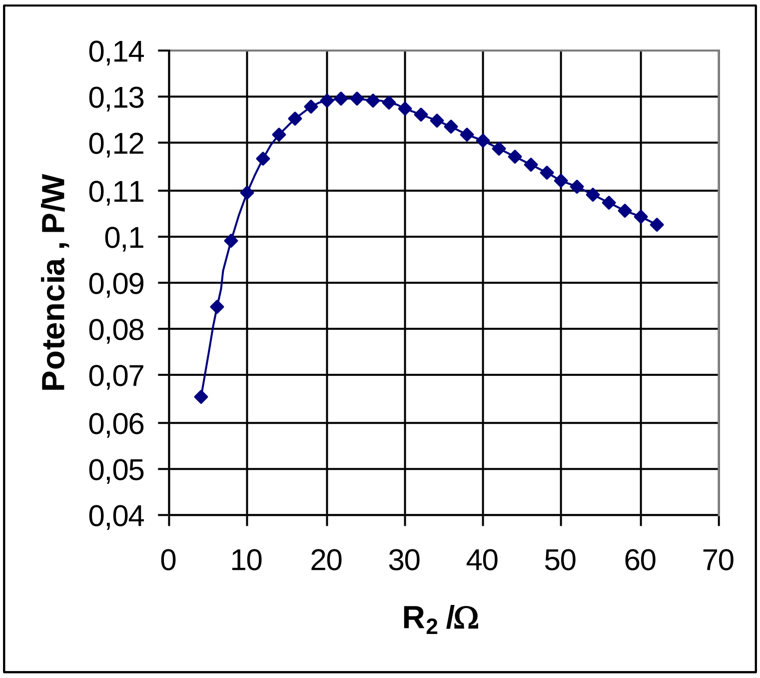
$$\frac{dP}{dR_2} = \varepsilon^2 R_1^2 \frac{\left[(R_1+R_2)(R_1+r) - R_1^2\right]^2 - R_2 \cdot \left[2(R_1+R_2)(R_1+r) - R_1^2\right] \cdot (R_1+r)}{\left[(R_1+R_2)(R_1+r) - R_1^2\right]^4} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (R_1+R_2)(R_1+r) - R_1^2 = 2R_2(R_1+r) \quad \Rightarrow \quad R_1^2 + R_1 r + R_2 R_1 + R_2 r - R_1^2 = 2R_2 R_1 + 2R_2 r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_1 r + R_2 R_1 + R_2 r = 2R_2 R_1 + 2R_2 r \Rightarrow R_2(R_1 + r - 2R_1 - 2r) = -R_1 r \Rightarrow R_2(-R_1 - r) = -R_1 r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad R_2 = \frac{R_1 r}{R_1 + r}$$

El valor de R_2 que hace a la potencia máxima es $R_2 = \dfrac{100 \cdot 30}{130} = 23{,}1\Omega$



119. (493)- ***Un material aislante tiene forma de semicircunferencia de radio R. La mitad de esa circunferencia tiene distribuida de forma uniforme una carga +Q y la otra mitad una carga –Q.***
Calcular el campo en el centro P de esa semicircunferencia.

En la figura 1 se ha representado el sistema. En el cuadrante primero se ha situado la carga negativa y en el segundo la carga positiva

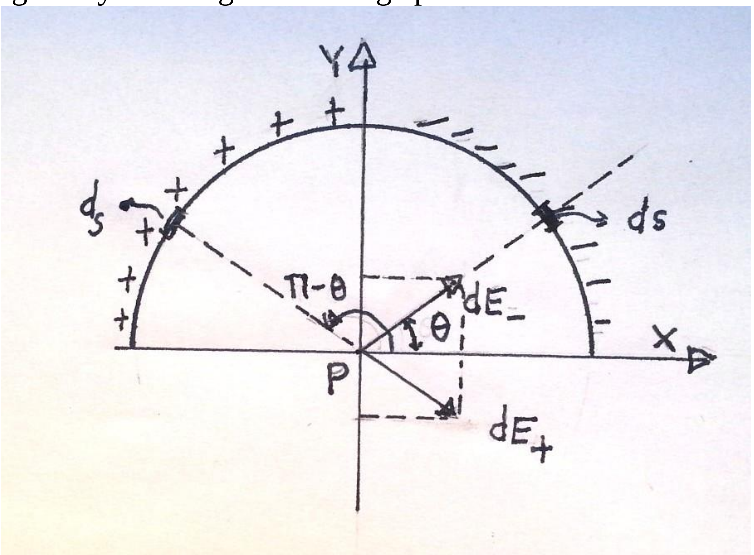


Fig 1

En la parte negativa escogemos un elemento del arco ds el cual crea un campo vectorial de módulo dE_- firmando el vector un ángulo θ con el semieje positivo de abscisas. Existe en la parte positiva un elemento ds simétrico al anterior respecto del eje Y que crea un campo vectorial de módulo dE_+, siendo $dE_- = dE_+$.
De la figura 1 se deduce que las componentes sobre el eje Y de los campos se anulan entre sí pero se suman respecto del eje X., en consecuencia sabemos que el campo total está sobre el eje X y en sentido positivo y por ello prestamos nuestra atención a la componente sobre el je X.

$$dE_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{R^2} \quad \Rightarrow (dE_-)_X = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{R^2}\cos\theta$$

La densidad de carga en cada cuadrante es $\lambda = \dfrac{Q}{\pi\frac{R}{2}} \quad \Rightarrow \quad dq = \dfrac{2Q}{\pi R}\cdot ds$

Además $ds = R\,d\theta$, luego

$$dE_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2Q}{\pi R^3}\,ds\cos\theta = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{\pi R^3}R\,d\theta\cos\theta = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{\pi R^2}d\theta\,\cos\theta \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int dE_- = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{\pi R^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta \quad \Rightarrow E_- = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{\pi R^2}\operatorname{sen}\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\pi^2\varepsilon_o}\frac{Q}{R^2}$$

El módulo del campo creado por la parte positiva es el mismo que el de la parte negativa

$$E_T = E_- + E_+ = 2E_- = \frac{1}{\pi^2 \varepsilon_o} \frac{Q}{R^2}$$

El vector campo en función del unitario $\vec{i}$

$$\vec{E}_T = \frac{Q}{\pi^2 \varepsilon_o R^2} \vec{i}$$