120.-** (502).-**La densidad de carga en una región del espacio vale $\rho = \frac{k}{r}$, k es una constante y r cumple la condición $0 < r < R$. Calcular el campo eléctrico y el potencial en todos los puntos del espacio.

En la figura 1 se representa una esfera de radio r y concéntrica con ella se ha trazado una corona esférica de radio x. y espesor dx.

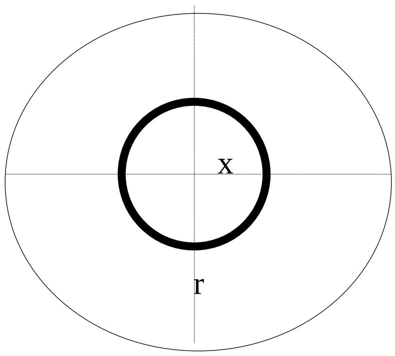


Fig.1

La carga de esa corona vale

$$dQ = 4\pi x^2 dx \cdot \frac{k}{x} = 4\pi k\, x\, dx$$

Para calcular la carga de la esfera de radio r sumamos todas las contribuciones anteriores entre cero y r

$$Q = \int_0^r 4\pi k\, x\; dx = 4\pi k\, \frac{r^2}{2} = 2\pi k r^2$$

Dado que conocemos la carga que hay en el interior de la esfera de radio r, aplicamos el teorema de Gauss

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_O} \quad \Rightarrow \quad E\,4\pi r^2 = \frac{2\pi k r^2}{\varepsilon_O} \Rightarrow \quad E = \frac{k}{2\varepsilon_O} \quad \text{para} \quad 0 < r \le R$$

E es el módulo de valor constante para cada punto del campo, el vector es radial dirigido hacia el exterior, por swer la densidad cúbica de carga positiva.

Para puntos del exterior que cumplan $r \ge R$, aplicamos de nuevo el teorema de Gauss a través de una superficie esférica ideal (superficie gaussiana) de radio r y habremos de tener en cuenta que toda la carga está en el interior de la esfera de radio R ,con lo que $Q = 2\pi k R^2$.

$$E' \cdot 4\pi r^2 = \frac{2\pi k R^2}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \qquad E' = \frac{k R^2}{2\varepsilon_o r^2} \qquad \text{para} \quad r \ge R$$

Para calcular el potencial hacemos uso de la relación en módulo

$$E = -\frac{dV}{dr} \quad \Rightarrow \quad \int -dV = \int Edr$$

Se sustituye el valor del módulo del campo para $0 < r \le R$

$$-V = \int \frac{k}{2\varepsilon_o} dr \quad \Rightarrow \quad -V = \frac{k}{2\varepsilon_o} r + Cte \quad \Rightarrow \quad V = -\frac{k}{2\varepsilon_o} r - Cte \quad (1)$$

No podemos hallar el valor de la constante al sustituir r por infinito , pues el campo entre la superficie de la esfera de radio R y el infinito no vale lo mismo que dentro en r<R cuyo valor del campo E estamos ahora utilizando. Lo haremos después de calcular el potencial para puntos en que $r \ge R$

$$-V' = \int \frac{kR^2}{2\varepsilon_o r^2} dr = -\frac{kR^2}{2\varepsilon_o r} + Cte \Rightarrow \quad V' = \frac{kR^2}{2\varepsilon_o r} - Cte \quad (1)$$

Si en la ecuación anterior sustituimos r por infinito y tomamos como referencia que el potencial en el infinito es nulo, Cte=0 y el potencial

$$V' = \frac{kR^2}{2\varepsilon_o r} \ \text{para} \ r \ge R \qquad (2)$$

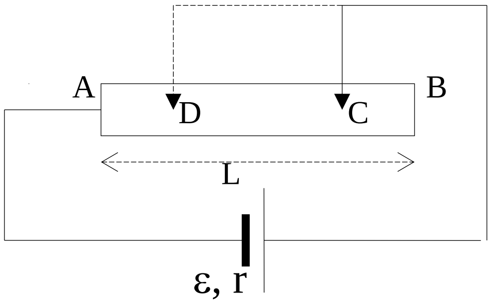
Los valores de los potenciales dados por las ecuaciones (1) y (2) deben ser iguales cuando r=R

$$-\frac{k}{2\varepsilon_o} R - Cte = \frac{kR^2}{2\varepsilon_o R} \Rightarrow \quad Cte = -\frac{kR}{\varepsilon_o}$$

Sustituyendo en (1)

$$V = -\frac{k}{2\varepsilon_o} r + \frac{kR}{\varepsilon_o} = \frac{k}{\varepsilon_o}\left(R - \frac{r}{2}\right)$$

121.- *(505).-* ***En la figura inferior se representa un circuito eléctrico que consta de una pila de fuerza electromotriz ε y resistencia interna r, y de un reóstato de longitud L y resistencia R. Cuando el cursor del reóstato se coloca en la posición C, la potencia consumida por él es la misma que si el cursor se coloca en la posición D. Las distancias AD y CB son iguales y se designan con x. a) Determinar el valor de r en función de R, L y x.***



b) Suponer que la resistencia del reóstato es R= 100 Ω, y su longitud L=50 cm y que BC = DA = 5 cm y ε = 20 V. Determinar la curva potencia frente a la distancia al extremo B. Calcular analíticamente el valor máximo de la potencia.

a) La intensidad I_1 que circula por el circuito cuando el cursor está en la posición C es:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_{CA} + r}$$

La potencia consumida en el reóstato es.

$$P_1 = I_1^2 \cdot R_{CA} = \frac{\varepsilon^2}{(R_{CA} + r)^2} \cdot R_{CA}$$

La intensidad I_2 que circula por el circuito cuando el cursor está en la posición D es:

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R_{DA} + r}$$

La potencia consumida en el reóstato es.

$$P_2 = I_2^2 \cdot R_{DA} = \frac{\varepsilon^2}{(R_{DA} + r)^2} \cdot R_{DA}$$

Según el enunciado $P_1 = P_2$, luego:

$$\frac{R_{CA}}{(R_{CA}+r)^2}=\frac{R_{DA}}{(R_{DA}+r)^2} \quad \Rightarrow \quad R_{CA}\left(R_{DA}^2+r^2+2R_{DA}r\right)=R_{DA}\left(R_{CA}^2+r^2+2R_{CA}r\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; R_{CA}R_{DA}^2+R_{CA}r^2+2R_{CA}R_{DA}r=R_{DA}R_{CA}^2+R_{DA}r^2+2R_{DA}R_{CA}r \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; r^2\left(R_{CA}-R_{DA}\right)=R_{DA}R_{CA}^2-R_{CA}R_{DA}^2 \quad \Rightarrow \quad r^2\left(R_{CA}-R_{DA}\right)=R_{DA}R_{CA}\left(R_{CA}-R_{DA}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2=R_{DA}R_{CA} \quad \Rightarrow \quad r=\sqrt{R_{DA}R_{CA}}$$

La resistencia por unidad de longitud del reóstato es R/L, por tanto,

$$R_{DA}=\frac{R}{L}x \quad ; \quad R_{CA}=\frac{R}{L}(L-x) \quad \Rightarrow \quad r=\frac{R}{L}\sqrt{x(L-x)}$$

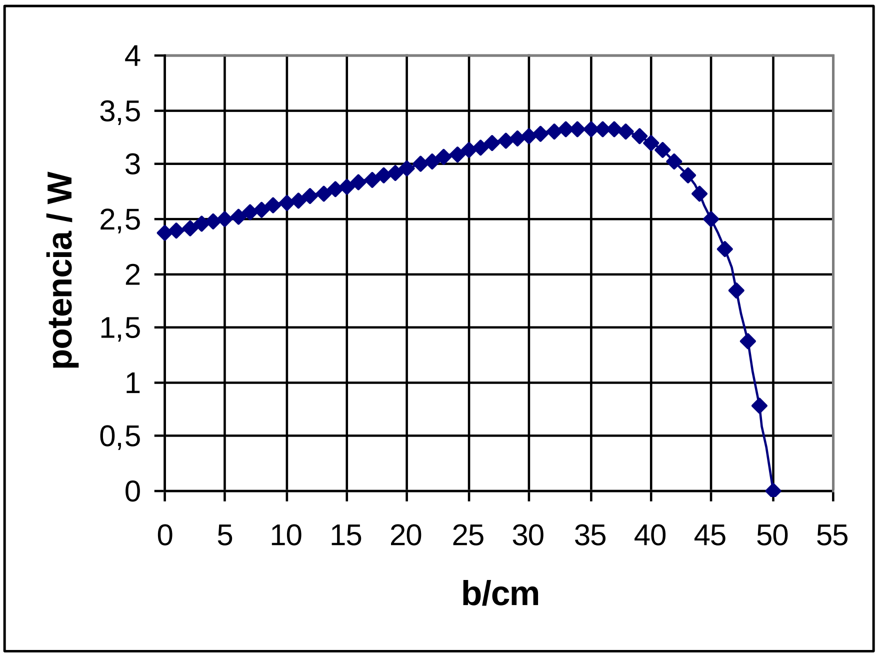
b) Calculamos la resistencia interna de la pila

$$\frac{R}{L}=\frac{100}{50}\frac{\Omega}{cm} \quad \Rightarrow \quad r=\frac{100}{50}\sqrt{5(50-5)}=30\Omega$$

Designamos con b la distancia desde B (figura del enunciado) a un punto cualquiera del reóstato, por tanto, b es una variable entre cero y cincuenta centímetros. La potencia consumida por el reóstato en función de la variable b es:

$$P=I^2R=\frac{\varepsilon^2}{(R_{bA}+r)^2}\cdot R_{bA}=\frac{400}{\left[\frac{100}{50}\cdot(50-b)+30\right]^2}\cdot\frac{100}{50}\cdot(50-b)=\frac{400}{(130-2b)^2}\cdot(100-2b)$$

Dando valores a la variable entre cero y 50 cm obtenemos los valores de la potencia. La gráfica es la siguiente.



Para calcular la potencia máxima derivamos la función potencia respecto de la variable b e igualamos a cero

$$\frac{dP}{db} = 400\left[\frac{(130-2b)^2\cdot(-2)-(100-2b)\cdot 2(130-2b)\cdot(-2)}{(130-2b)^4}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 130-2b = 2\cdot(100-2b) \quad \Rightarrow \quad 2b = 200-130 \Rightarrow \quad b = 35cm$$

El valor de la potencia a 35 cm de B es

$$P = \frac{400}{(130-2\cdot 35)^2}\cdot(100-2\cdot 35) = 3{,}33\ W$$

122.- *(513).-**Dos conductores rectilíneos de longitud 2a cada uno y con densidad lineal uniforme de carga positiva L están situados sobre unos ejes coordenados cartesianos. Uno sobre el eje de abscisas siendo las coordenadas de sus extremos (a, 3a), el otro sobre el eje de ordenadas con sus extremos de coordenadas (a ,3a).***

a) Calcular el potencial y el campo eléctrico en el origen de coordenadas

b) Calcular el potencial en el punto P de coordenadas (a,a).

Ayuda.- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+Cte$

En la figura 1 aparece la situación de los conductores

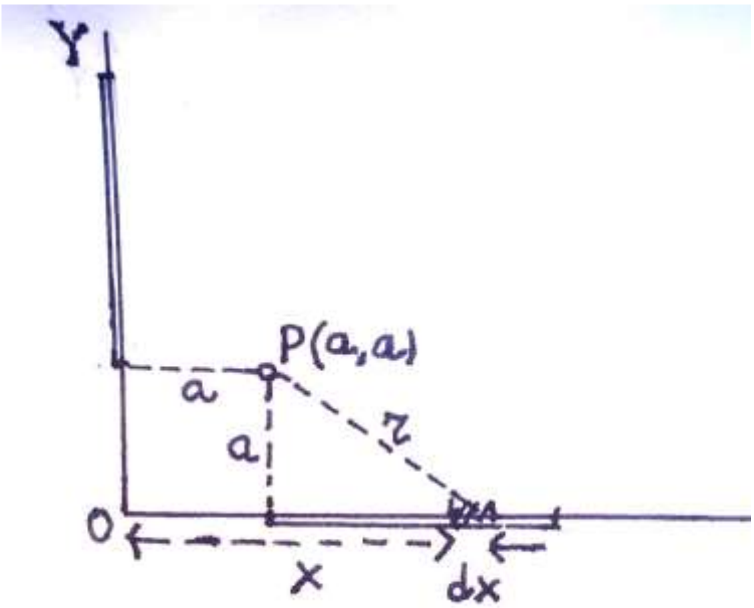


Fig.1

a) Sobre el conductor situado sobre el eje de abscisas hemos considerado una longitud dx que dista del origen x,. La carga de ese elemento es $dq = \lambda dx$, y el potencial que crea en el origen de coordenadas es:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda dx}{x}$$

El potencial que crea todo el conductor lo obtenemos sumando todas las contribuciones de los elementos que podamos crear sobre el conductor, en otras palabras debemos integrar la ecuación anterior

$$V_1 = \int_a^{3a} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dx}{x} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\ln x\Big|_a^{3a} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\left(\ln 3a - \ln a\right) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\ln\frac{3a}{a} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\ln 3$$

El potencial en O creado por el conductor situado sobre el eje de ordenadas se calcula igual que el anterior, salvo que dx es dy y que la distancia en lugar de x es y, dado que lo límites son iguales, el potencial es el mismo, por consiguientes el potencial debido a los dos conductores es:

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln 3$$

El elemento dx cuya carga es dq= λdx crea en O un campo eléctrico dirigido según el eje de abscisas negativo y cuyo módulo es:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda\,dx}{x^2}$$

El módulo del campo debido a todo el conductor vale.

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\int_a^{3a}\frac{dx}{x^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\left(-\frac{1}{x}\right)_a^{3a} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{3a}\right) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2}{3a} = \frac{\lambda}{6\pi\varepsilon_o a}$$

Dado que el campo eléctrico es un vector que está sobre el eje de abscisas y dirigido en sentido negativo escribimos el campo vectorial

$$\vec{E}_X = -\frac{\lambda}{6\pi\varepsilon_o a}\vec{i}$$

El campo creado por el conductor situado en el eje Y se calcula del mismo modo solo que dx es dy y al ser los mimos límites el módulo es el mismo que antes pero el vector campo está sobre el eje de ordenadas y de sentido negativo

$$\vec{E}_Y = -\frac{\lambda}{6\pi\varepsilon_o a}\vec{j} \quad ; \quad \vec{E} = \vec{E}_X + \vec{E}_Y = \vec{E} = -\frac{\lambda}{6\pi\varepsilon_o a}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$$

b) El potencial en el punto P debido al elemento dx vale

$$dV_X = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O}\frac{\lambda\,dx}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O}\frac{\lambda\,dx}{\sqrt{a^2+(x-a)^2}}$$

El potencial debido a todo el conductor se obtiene integrando la ecuación anterior

$$V_X = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\int_a^{3a}\frac{dx}{\sqrt{a^2+(x-a)^2}}$$

Para resolver la integral hacemos el cambio de variable siguiente

$$x - a = u \quad ; \quad dx = du \qquad \Rightarrow \int\frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}}$$

Esta integral es la misma que la de ayuda del enunciado

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln\left[u+\sqrt{a^2+u^2}\right] = \ln\left[(x-a)+\sqrt{a^2+(x-a)^2}\right]$$

Yendo a la ecuación de V_X

$$V_X = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\int_a^{3a}\frac{dx}{\sqrt{a^2+(x-a)^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\ln\left[x-a+\sqrt{a^2+(x-a)^2}\right]_a^{3a} \quad \Rightarrow$$

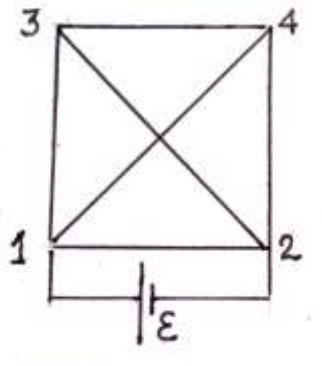
$$\Rightarrow \quad V_X = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\left[\ln(3a-a)+\sqrt{a^2+(3a-a)^2}-\ln a\right] = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\ln\frac{2a+a\sqrt{5}}{a}$$

$$\Rightarrow \quad V_X = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$$

El potencial creado por el conductor situado en el eje de ordenadas es el mismo que el anterior, por lo que el potencial en P debido a los dos conductores es:

$$V_P = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_o}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$$

123.-** (515).-**El circuito eléctrico de la figura inferior se construye con hilos conductores de sección constante y está formado por un cuadrado y sus diagonales.



La resistencia eléctrica es directamente proporcional a la longitud del hilo. Los vértices 1 y 2 están unidos a una pila de fuerza electromotriz ε y resistencia interna despreciable. Calcular la relación del calor producido por unidad de tiempo entre el hilo 1-2 y el 3-4.
Olimpiadas de Moscú

El circuito eléctrico propuesto es simétrico por lo que podemos trazar la línea de simetría O_1, O_2 y O_3 y así queda dividido en dos partes iguales. Designamos con R a la resistencia de un lado del cuadrado y con r a la mitad de una diagonal, tal como puede verse en la figura 1. Así AX es R; $XO_1 = AO_3$ es R/2 y $XO_2 = AO_2$ es r.

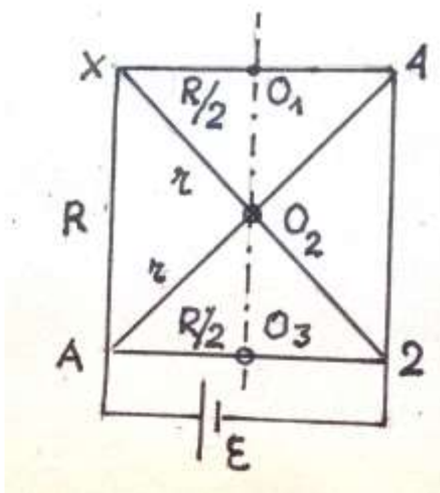


Fig.1

Si solamente nos ocupamos de la mitad del circuito, esa mitad está unida a una pila de fuerza electromotriz ε/2.colocada en A y O_3 y la otra mitad del circuito a una pila colocada entre O_3 y el vértice 2. En la figura 2 se indica que ese circuito es equivalente al del problema. La resistencia R_T equivale a las resistencias de la mitad del circuito, esto es, las comprendidas entre A,X,O_1,O_3 y el otro R_T a las resistencias comprendidas en O_3 ,2 ,4 ,O_1

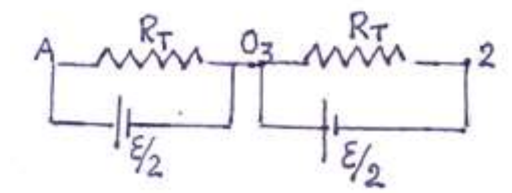


Fig.2

La simetría del circuito supone que los puntos O_1; O_2 y O_3 están al mismo potencial. Por eso en la figura 3 los ponemos juntos. y partimos de A y llegamos a los puntos O a través de las resistencias. Por ejemplo de A a O_2 está la resistencia r, de A a O_3 la resistencia R/2, de A a X la resistencia R, etc, de esta manera dibujamos el circuito de la figura 3 con sus resistencias

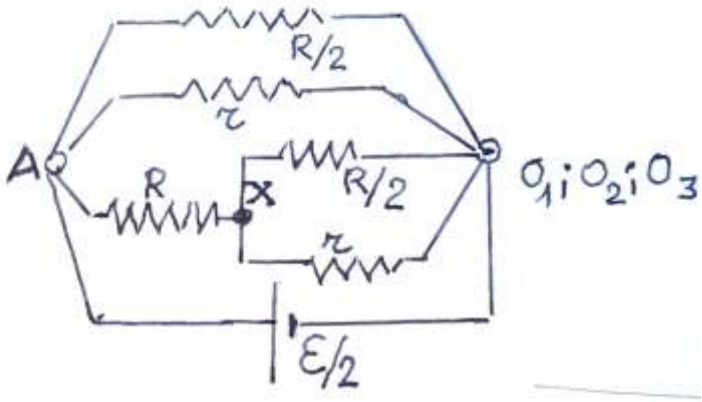
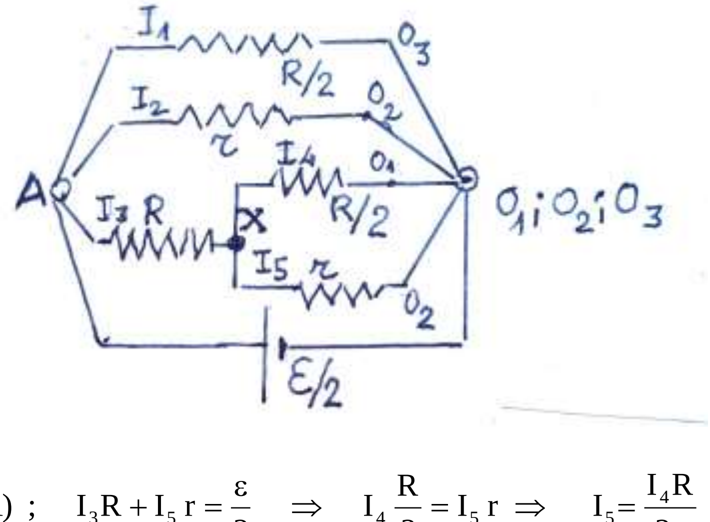


Fig.3

Repetimos la figura 3 añadiendo los puntos de partida y llegada y designamos a las intensidades que pasan por cada rama



$$I_3R + I_4\frac{R}{2} = \frac{\varepsilon}{2}\ (1)\ ; \quad I_3R + I_5\, r = \frac{\varepsilon}{2} \quad \Rightarrow \quad I_4\frac{R}{2} = I_5\, r \Rightarrow \quad I_5 = \frac{I_4R}{2r} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ I_3 = I_4 + I_5 = I_4 + \frac{I_4R}{2r} = I_4\left(1 + \frac{R}{2r}\right)$$

Sustituimos I_3 en la ecuación (1)

$$I_4\left(1+\frac{R}{2r}\right)\cdot R+I_4\frac{R}{2}=\frac{\varepsilon}{2}\qquad I_4\left(R+\frac{R^2}{2r}+\frac{R}{2}\right)=\frac{\varepsilon}{2}\ \Rightarrow I_4\left(\frac{3R}{2}+\frac{R^2}{2r}\right)=\frac{\varepsilon}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ I_4=\frac{\varepsilon}{3R+\dfrac{R^2}{r}}$$

La resistencia r de la mitad de una diagonal vale $r=\frac{\sqrt{2}}{2}R$, luego

$$I_4=\frac{\varepsilon}{3R+\dfrac{2R^2}{\sqrt{2}\,R}}=\frac{\sqrt{2}\,\varepsilon}{R\,(3\sqrt{2}+2)}$$

La intensidad I_1 es la intensidad que circula por 1-2(ver figura enunciado) y vale $I_1=\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{R}{2}}=\frac{\varepsilon}{R}$; I_4 es la que circula por 3-4.

$$\frac{Q_{12}}{Q_{34}}=\frac{I_1^2R\,t}{I_4^2R\,t}=\frac{\dfrac{\varepsilon^2}{R^2}}{\dfrac{2\varepsilon^2}{R^2(3\sqrt{2}+2)^2}}=\frac{(3\sqrt{2}+2)^2}{2}=\frac{18+4+12\sqrt{2}}{2}=11+6\sqrt{2}$$

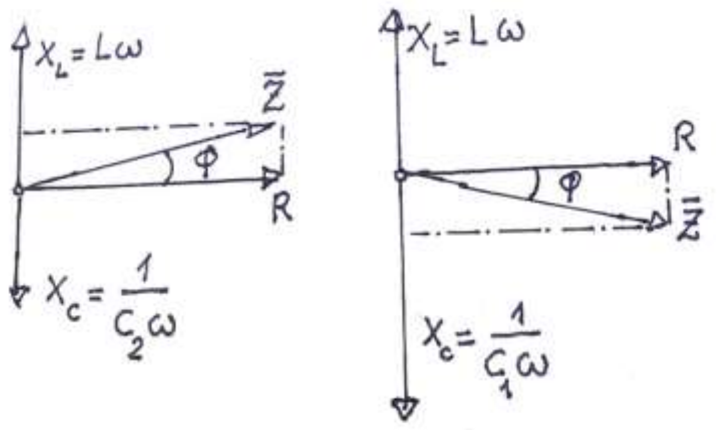
124**.-.(521) **Un circuito serie de corriente alterna consta de una resistencia R = 100Ω, una bobina sin resistencia óhmica y un condensador. Dicho circuito está conectado a una fuente de corriente alterna de 230 V y 50 Hz. Cuando el condensador tiene una capacidad C_1= 12 μF la intensidad eficaz que circula por el circuito es la misma que cuando se cambia por un condensador de C_2=17 μF

1) Calcular el coeficiente de autoinducción de la bobina.

2) Determinar la diferencia de fase entre el voltaje de la fuente y la intensidad de la corriente cuando está colocado el condensador C_1=12 μF

3) Calcular la capacidad de un condensador C que determina que el circuito esté en resonancia.

1) La reactancia inductiva es: $X_L = L\omega = L\cdot 2\pi f$ .La reactancia capacitiva es $X_C = \dfrac{1}{C\omega} = \dfrac{1}{C\cdot 2\pi f}$ .Los diagramas para los dos condensadores son:



Cuando C_2 , X_L>Xc y cuando C_1 , X_L<X_C . La impedancia del circuito es la misma y el ángulo de desfase es igual numéricamente, pero en el primer caso la tangente es positiva y en el segundo caso negativa.

$$\mathrm{tag}\,\varphi = \frac{L\omega - \dfrac{1}{C_2\omega}}{R} \quad ; \quad \mathrm{tag}\,\varphi = -\frac{L\omega - \dfrac{1}{C_1\omega}}{R} \quad \Rightarrow L\omega - \frac{1}{C_2\omega} = -\left(L\omega - \frac{1}{C_1\omega}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2L\omega = \frac{1}{C_1\omega} + \frac{1}{C_2\omega} = \frac{C_1\omega + C_2\omega}{C_1\omega\cdot C_2\omega} \quad \Rightarrow L = \frac{C_1 + C_2}{2C_1C_2\,\omega^2} = \frac{(12+17)\cdot 10^{-6}}{2\cdot 12\cdot 17\cdot 10^{-12}\cdot 4\pi^2\,50^2} = 0{,}72\,\mathrm{H}$$

2)

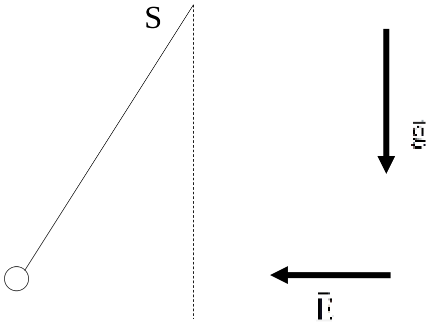
$$\operatorname{tag}\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \frac{0{,}72\cdot 2\pi\cdot 50 - \frac{1}{12.10^{-6}\cdot 2\pi\cdot 50}}{100} = -0{,}39 \quad \Rightarrow \quad \varphi = -21{,}3^{o}$$

En este caso al ser predominante la capacidad la intensidad de la corriente está adelantada respecto del voltaje un ángulo de 21,3º.

3) En un circuito resonante se cumple que $X_L = X_C$

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \quad \Rightarrow C = \frac{1}{L\,\omega^2} = \frac{1}{0{,}72\cdot 4\,\pi^2\cdot 50^2} = 14{,}1.10^{-6}\,F = 14{,}1\ \mu F$$

125.- *(522).-* ***Un péndulo consta de una varilla delgada y homogénea de longitud L y masa M, en su extremo lleva una carga puntual +q. El péndulo se hace oscilar en el conjunto de dos campos: el gravitatorio de dirección vertical y el eléctrico de módulo E en dirección horizontal (ver la figura inferior).***
La separación máxima del péndulo respecto de la vertical es pequeña.



1.- Si el péndulo oscila sin la presencia del campo eléctrico determinar el periodo de oscilación.
2.-Si están los dos campos actuando, determinar el ángulo β de equilibrio del péndulo respecto de la vertical.
3.- Si el péndulo se separa de la anterior posición de equilibrio un ángulo α encontrar el periodo de oscilación
Momento de inercia de una varilla homogénea respecto de su centro de masas $I_{CM} = \dfrac{M\,L^2}{12}$ ***Datos M=10^{-3} kg ; L= 1,00 m ; q=10^{-6} C ; E=$2{,}83.10^{3}$ N/C***

1.- Sobre la varilla actúan dos fuerzas el peso en su centro de masas y la reacción del soporte S sobre la varilla.. El peso ejerce un momento respecto de S

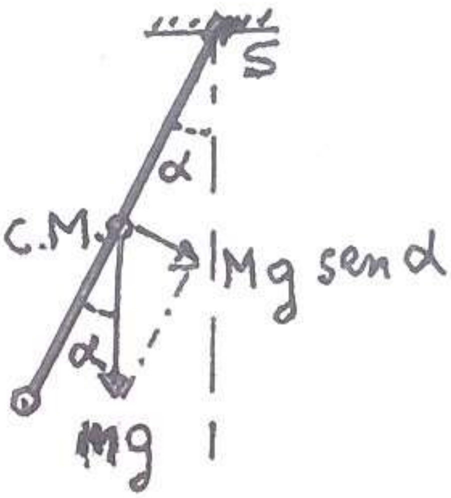


Fig.1

El momento del peso respecto de S es $Mo = M g \operatorname{sen}\alpha \cdot \frac{L}{2}$. Según la dinámica de rotación

$$M g \operatorname{sen}\alpha \cdot \frac{L}{2} = I_S \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

Si el ángulo α es pequeño podemos sustituir el seno por el ángulo

$$\frac{M g L}{2} \cdot \alpha = I_S \frac{d^2\alpha}{dt^2} \Rightarrow k \cdot \alpha = I_S \frac{d^2\alpha}{dt^2} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{I_S}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\, I_S}{M g L}}$$

Se trata de un movimiento armónico de rotación

Para calcular Is utilizamos el teorema de Steiner

$$I_S = I_{CM} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{M L^2}{12} + \frac{M L^2}{4} = \frac{M L^2}{3}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\, ML^2}{3 M g L}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3 \cdot 9{,}8}} = 1{,}64 s$$

2.- Cuando están actuando los dos campos de forma simultánea la situación está reflejada en la figura 2.

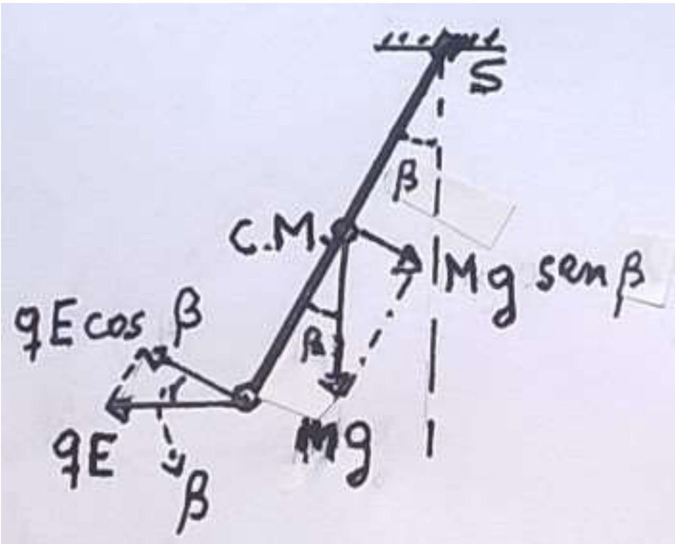


Fig 2

Hay dos momentos respectos del el punto de suspensión S, sus módulos son:

$$: \quad M g \operatorname{sen}\beta \frac{L}{2} \quad ; \quad q E \cos\beta \;\; L$$

Estos momentos tienen la misma dirección pero sentido contrario, por tanto, existe un ángulo β de equilibrio para el que los dos módulos de los momentos son iguales

$$Mg\,sen\beta\cdot\frac{L}{2}=qE\cos\beta\cdot L\Rightarrow\quad tag\beta=\frac{2qE}{Mg}=\frac{2.10^{-6}\cdot 2{,}83.10^{3}}{10^{-3}\cdot 9{,}8}=0{,}58\quad\Rightarrow\quad\beta=30^{o}$$

3.- En la figura 3 el péndulo se separa de la posición de equilibrio un ángulo α. Ahora el momento del peso es mayor que el momento debido al campo

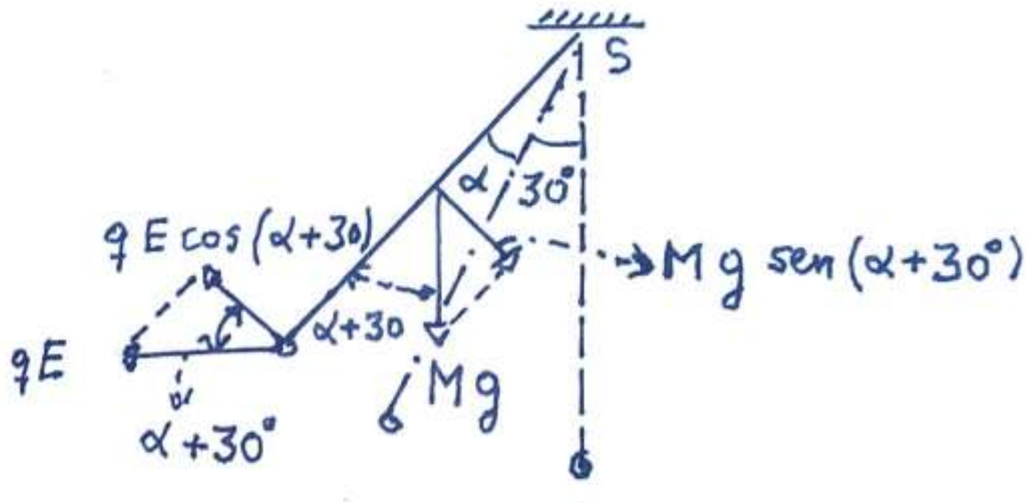


Fig.3

Para calcular los momentos de las fuerzas gravitatoria y electrostática respecto del punto S, por sencillez, vamos a determinar sus componentes perpendiculares a la varilla representas den la fig 3 como qE cos(α+30) y Mg sen (α+30) porque forman con la misma un ángulo recto y así tendremos lasa únicas componentes de las fuerzas de interacción que van a proporcionar los momentos. Las otras componentes de estas fuerzas(no representadas en la figura 3) están en la misma dirección de la varilla y su línea de acción pasa por S dando un momento nulo.

$$Mg\,sen(\alpha+30)\cdot\frac{L}{2}-qE\cos(\alpha+30)\cdot L=I_S\,\frac{d^2(\alpha+30)}{dt^2}\quad\Rightarrow$$

$$Mg\frac{L}{2}(sen\alpha\cos 30+\cos\alpha\, sen 30)-qE\,L(\cos\alpha\cos 30-sen\alpha\, sen 30)=I_S\,\frac{d^2(\alpha+30)}{dt^2}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow sen\alpha\cdot L\left(\frac{Mg}{2}\cos 30+qE\,sen 30\right)+\cos\alpha\cdot L\left(\frac{Mg}{2}sen 30-qE\cos 30\right)=I_S\,\frac{d^2(\alpha+30)}{dt^2}$$

El paréntesis segundo es nulo tal como se ha visto en el apartado 2.

$$\mathrm{sen}\,\alpha\cdot L\left(\frac{Mg}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{qE}{2}\right)=I_s\,\frac{d^2(\alpha+30)}{dt^2}$$

Si α es pequeño se sustituye el seno por el ángulo

$$\alpha\left(\frac{\sqrt{3}\,MgL}{4}+\frac{qEL}{2}\right)=k\,\alpha=I_S\,\frac{d^2(\alpha+30)}{dt^2}\quad\Rightarrow\quad T=2\pi\sqrt{\frac{I_S}{k}}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{\frac{\sqrt{3}\,MgL}{4}+\frac{qEL}{2}}}=2\,\pi\sqrt{\frac{\frac{4}{3}ML}{\sqrt{3}\,Mg+2qE}}\quad\Rightarrow$$

$$T=2\,\pi\sqrt{\frac{\frac{4}{3}\cdot 10^{-3}\cdot 1{,}00}{\sqrt{3}\,10^{-3}\cdot 9{,}8+2.10^{-6}\,2{,}83.10^{3}}}=1{,}52\,s$$

126.- *(526).-* ***Dentro de una esfera de radio R se distribuye una carga eléctrica cuya densidad cúbica de carga obedece a la ley $\rho = \rho_o r$, siendo r $\le R$ la distancia al centro de la esfera y ρ_o una constante. Calcular a) la carga de la esfera. b) El campo y el potencial para puntos $r \ge R$ c) El campo y el potencial para puntos $r \le R$.***

Escuela de Ingeniería y Aeronáutica y del Espacio de Madrid

a) Consideramos una corona esférica de radio r y espesor dr. La variable r esta comprendida entre cero y R El volumen de la corona es:

$$dV = \frac{4}{3}\pi(r+dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(r^3 + 3r^2\,dr + 3r\,dr^2 + dr^3\right) - \frac{4}{3}\pi r^3$$

Despreciando los infinitésimos de orden superior $dV = 4\pi r^2\,dr$. La carga eléctrica de la corona es: $dQ = 4\pi r^2 \rho_o r\,dr = 4\pi\rho_o r^3\,dr$. La carga de la esfera se obtiene integrando entre los valores extremos de r

$$Q = \int_0^R 4\pi\rho_o r^3 dr = 4\pi\rho_o \frac{R^4}{4} = \pi\rho_o R^4$$

b) Aplicamos la ley de Gauss a una esfera de radio $r \ge R$ concéntrica con la esfera de radio R Por la simetría del campo eléctrico en el caso presente, éste es radial, saliente y del mismo módulo en todos los puntos de la esfera de Gauss de radio r, mientras que dS es un elemento de esta superficie, perpendicular a la misma, dirección radial y saliente por definición del vector superficie. En definitiva estos dos vectores son en cada elemento de superficie de la misma dirección sentido.

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{interior}}{\varepsilon_o}$$

$$\int E\,dS = \frac{Q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E\,4\pi r^2 = \frac{\pi\rho_o R^4}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow E = \frac{\rho_o R^4}{4\varepsilon_o r^2}$$

El campo es una magnitud vectorial y en un punto exterior es:

$$\vec{E} = \frac{\rho_o R^4}{4\varepsilon_o r^2}\vec{u}$$

El vector $\vec{u}$ es un unitario situado en la recta que une el centro de la esfera con el punto elegido del campo y apuntando hacia afuera.

Para calcular el potencial aplicamos la relación entre campo y potencial

$$E = -\frac{dV}{dr} \quad \Rightarrow \quad \int -dV = \int \frac{\rho_o R^4}{4\varepsilon_o}\frac{1}{r^2\,dr} \quad \Rightarrow \quad -V = -\frac{\rho_o R^4}{4\varepsilon_o}\frac{1}{r} + Cte$$

Cuando r es infinito el potencial es nulo, Cte =0 , luego. $V = \frac{\rho_o R^4}{4\varepsilon_o r}$

En el caso particular de considerar un punto en la superficie de la esfera de radio R el potencial vale: $V_S = \frac{\rho_o R^3}{4\varepsilon_o}$

c) Consideramos la superficie de una esfera de radio $r \le R$ concéntrica con la esfera y aplicamos el teorema de Gauss

$$\int E\,dS = \frac{q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E\,4\pi r^2 = \frac{\int_0^r 4\pi x^2 \rho_o x\,dx}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{4\pi\rho_o \frac{r^4}{4}}{4\pi r^2\,\varepsilon_o} = \frac{\rho_o\, r^2}{4\varepsilon_o}$$

La expresión vectorial del campo es. $\vec{E} = \frac{\rho_o\, r^2}{4\varepsilon_o}\vec{u}$, $\vec{u}$ es un vector unitario que está en la recta que une el centro de la esfera con el punto interior que consideramos y dirigido hacia el exterior de la esfera de radio R.

Cálculo del potencial.

$$\frac{\rho_o\, r^2}{4\varepsilon_o} = -\frac{dV}{dr} \quad \Rightarrow \int \frac{\rho_o\, r^2}{4\varepsilon_o} dr = -V \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_o\, r^3}{12\varepsilon_o} + Cte = -V$$

Cuando r = R , el potencial en la superficie se ha calculado en el apartado anterior

$$Cte = -\frac{\rho_o R^3}{4\varepsilon_o} - \frac{\rho_o R^3}{12\varepsilon_o} = -\frac{4\,\rho_o R^3}{12\varepsilon_o} = -\frac{\rho_o R^3}{3\varepsilon_o}$$

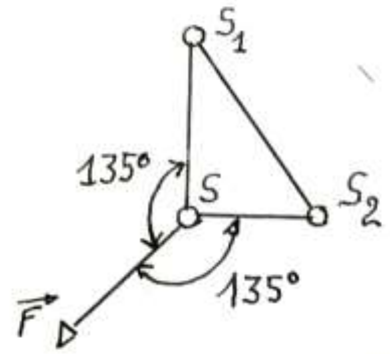
Sustituyendo en el potencial

$$V = -Cte - \frac{\rho_o r^3}{12\varepsilon_o} = \frac{\rho_o R^3}{3\varepsilon_o} - \frac{\rho_o r^3}{12\varepsilon_o} = \frac{\rho_o}{12\varepsilon_o}\left(4R^3 - r^3\right)$$

Como se habrá observado, para hallar el potencial en un punto de la superficie de la esfera, se calcula la integral de línea del campo desde un punto al que se le asigna potencial cero, por considerarlo en el infinito y muy lejos de las cargas. Sin embargo para el potencial en puntos del interior, hay que calcular la integral de línea del campo desde la superficie de la esfera, cuyo potencial se ha calculado anteriormente, hasta el punto situado a una distancia r del centro de la esfera.

127.- (528).- ***Tres cargas puntuales S , S_1 , S_2 ocupan los vértices de un triángulo rectángulo. Las distancias SS_1 y SS_2 cumplen la relación $\frac{SS_1}{SS_2}=\frac{3}{2}$. En la figura la fuerza $\vec{F}$ es la resultante de la acción que en el vacío ejercen las cargas S_1 y S_2 sobre la carga S.***

a) Determinar la relación entre las cargas S_1/S_2



Si ahora se intercambian las posiciones de las cargas S_1 y S_2 la fuerza sobre la carga S la representamos por $\vec{F}_1$.

b) Calcular la relación entre los módulos $\frac{F_1}{F}$.

Propuesto en las Olimpiadas de Suiza

a) En la figura 1 se observa que el vector **F** tiene dos componentes iguales en módulo sobre los ejes cartesianos. designamos con 3d a la distancia SS_1 y con 2d a la distancia SS_2

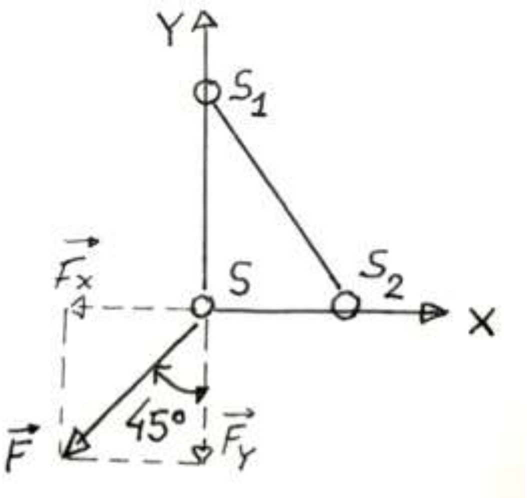


Fig .1

$$F_X=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{S\cdot S_2}{4d^2}=F_y=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{S\cdot S_1}{9d^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{S\cdot S_2}{4}=\frac{S\cdot S_1}{9}\quad\Rightarrow\frac{S\cdot S_2}{S\cdot S_1}=\frac{4}{9}$$

El módulo de **F** es:

$$F=\sqrt{\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{S\cdot S_1}{9d^2}\right]^2+\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{S\cdot S_2}{4d^2}\right]^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o d^2}\sqrt{\frac{(S\cdot S_1)^2}{81}+\frac{(S\cdot S_2)^2}{16}}\qquad(1)$$

b) Al intercambiar las posiciones de las cargas, es lo que hacemos en la ecuación (1)

$$F_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o d^2}\sqrt{\frac{(S\cdot S_1)^2}{16}+\frac{(S\cdot S_2)^2}{81}}\qquad(2)$$

$$\frac{F_1}{F}=\frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_o d^2}\sqrt{\frac{(S\cdot S_1)^2}{16}+\frac{(S\cdot S_2)^2}{81}}}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_o d^2}\sqrt{\frac{(S\cdot S_1)^2}{81}+\frac{(S\cdot S_2)^2}{16}}}=\frac{\sqrt{\frac{(S\cdot S_1)^2}{16}+\frac{(S\cdot S_2)^2}{81}}}{\sqrt{\frac{(S\cdot S_1)^2}{81}+\frac{(S\cdot S_2)^2}{16}}}=\frac{\sqrt{\frac{(S\cdot S_1)^2}{16}+\frac{(S\cdot S_1)^2}{81}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2}}{\sqrt{\frac{(S\cdot S_1)^2}{81}+\frac{(S\cdot S_1)^2}{16}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2}}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\frac{F_1}{F}=\sqrt{\frac{\frac{1}{16}+\frac{16}{81^2}}{\frac{1}{81}+\frac{1}{81}}}=1{,}62$$

128.- *(532).-* ***Dos aros de radio R cada uno se encuentran uno frente otro, con un eje común que pasa por sus centros. La distancia entre ellos es 4/3R, Uno de los aros tiene distribuida de forma uniforme una carga Q y el otro una -2Q.***

a) Calcular el potencial en el eje común.

b) Dibujar en una gráfica las curvas de los potenciales de cada aro y del conjunto de los dos siendo R = 1 m y Q= 10^{-9} C.

c) Determinar analíticamente las posiciones del máximo y mínimo del potencial común

Nota. El problema ha de hacerse con ayuda de una hoja de cálculo

a) Consideramos al eje común como eje de las X (ver la figura 1) y en él un punto P de coordenada x.

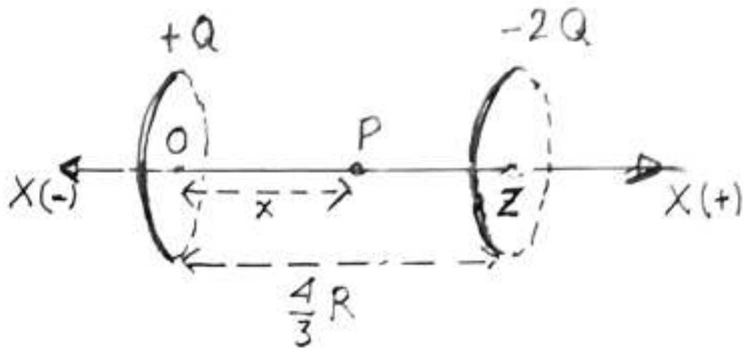


Fig. 1

Cualquier zona que escojamos del aro de la izquierda dista de P una distancia $d = \sqrt{R^2 + x^2}$, el potencial que origina dicho aro en P es:

$$V_Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{\sqrt{R^2 + x^2}}.$$

Para el otro aro la distancia es $d' = \sqrt{R^2 + \left(\frac{4}{3}R - x\right)^2}$ y el potencial es

$$V_{-2Q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{-2Q}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{4}{3}R - x\right)^2}}$$

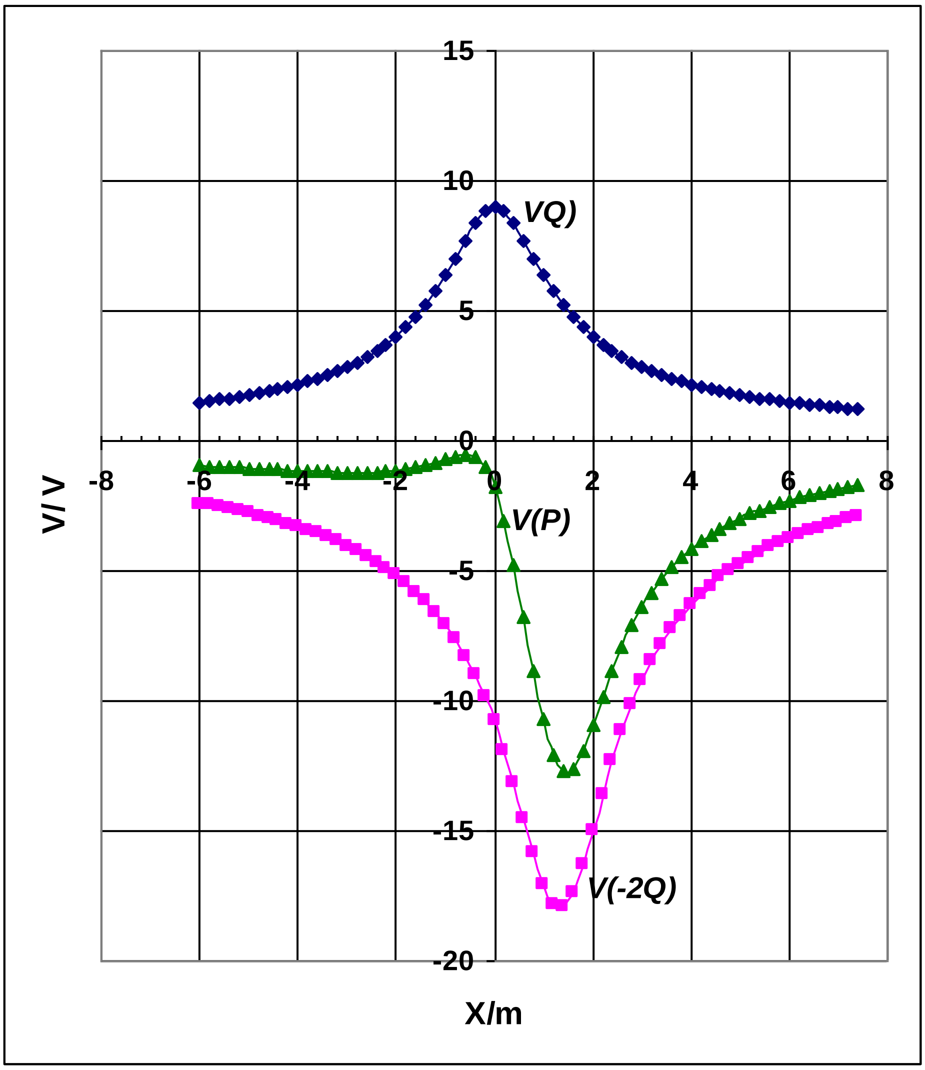
Al ser el potencial un escalar el potencial en P es la suma de los dos potenciales

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{Q}{\sqrt{R^2 + x^2}} - \frac{2Q}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{4}{3}R - x\right)^2}}\right)$$

b) Sustituyendo datos en V_Q, V_{-2Q} y V_P

$$V_Q = 9\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \quad ; \quad V_{-2Q} = 9\left(\frac{-2}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}-x\right)^2}}\right) \quad ; \quad V_P = 9\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}-x\right)^2}}\right)$$

Dando valores a la variable x en las ecuaciones anteriores y utilizando una hoja de cálculo obtenemos las siguientes curvas Asintóticamente tienden al valor cero en el infinito.

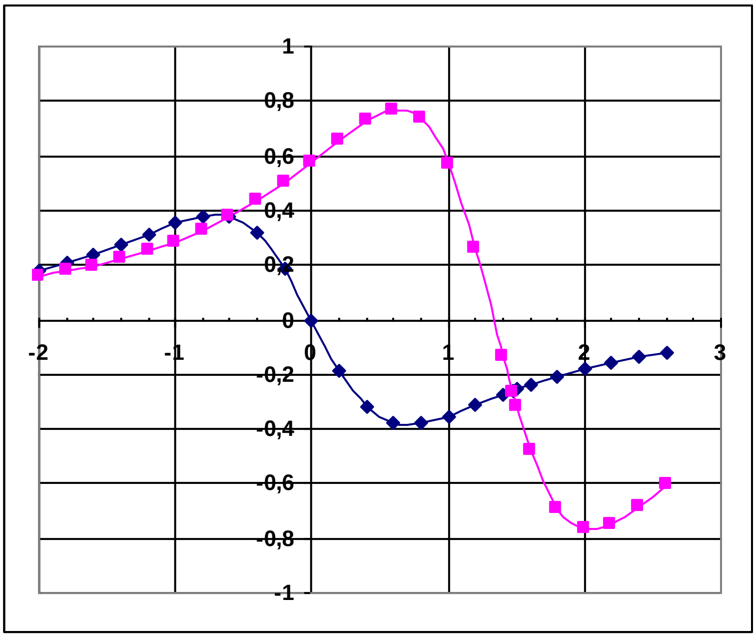


c) La curva V(P) tiene un máximo para un valor negativo de x y un mínimo para un valor positivo de x. Para hallar analíticamente esos valores debemos derivar V(P) con respecto de la variable x e igualar a cero.

$$\frac{dV(P)}{dx} = 9\left[\frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} - \frac{-\frac{2\left[2\left(\frac{4}{3}-x\right)\right](-1)}{2\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}-x\right)^2}}}{1+\left(\frac{4}{3}-x\right)^2}\right] = 0 \quad \frac{dV(P)}{dx} = -\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\left(\frac{4}{3}-x\right)}{\left[1+\left(\frac{4}{3}-x\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 0$$

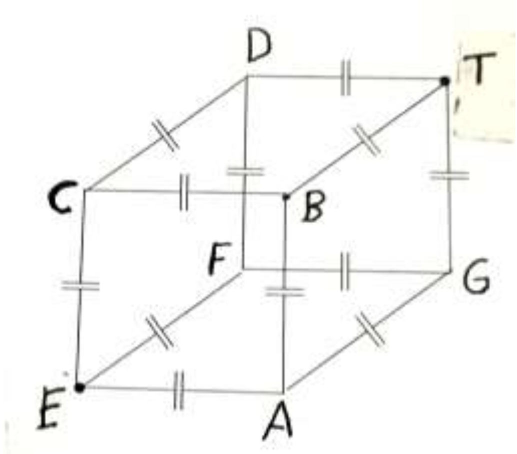
$$-\frac{x}{\left[1+x^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\left(\frac{4}{3}-x\right)}{\left[1+\left(\frac{4}{3}-x\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

Resolvemos la ecuación (1) con auxilio de la hoja de cálculo. Damos valores a la variable x y hacemos la presentación de la gráfica correspondiente al primer miembro y al segundo de (1). Dónde ambas se corten esos son los valores de x. a que esos puntos pertenecen a las dos curvas simultáneamente.



El valor máximo ocurre para x = -0,6 m y el mínimo para x = +1,47 m

129.-(541).-En la figura se han dispuesto 12 condensadores de la misma capacidad C. Están conectados de manera que cada condensador está en una arista de un cubo. Calcular la capacidad del sistema si se conecta la entrada de corriente en E y la salida en T.



Al llegar la corriente por E se divide de forma igual por las aristas EA, EC y EF con lo que los tres condensadores mantienen la mima diferencia de potencial, luego los vértices A C y F se pueden reunir en un solo punto tal como se ve en la parte izquierda de la figura 1. La corriente que sale por T viene de las aristas BT, DT y GT, los vértices B D y G se pueden reunir en un solo punto, como se observa en la parte derecha de la figura 1

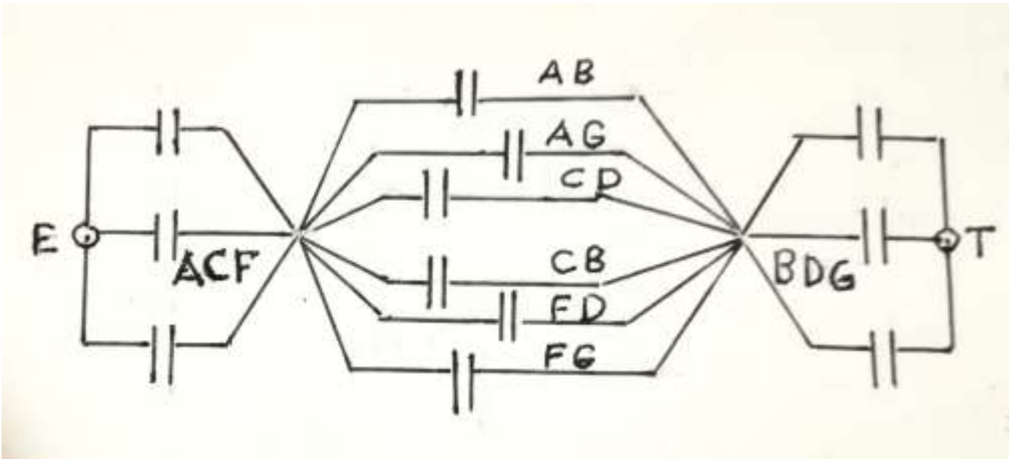


Fig.1

A partir de ACF dibujamos los condensadores que están unidos con los puntos BDG,. Se han puesto al lado de cada condensador los vértices de partida y de llegada, por ejemplo AB es el condensador que está en la arista AB del cubo..

La figura 1 queda dividida en tres zonas

De E a ACG tres condensadores en paralelo, capacidad equivalente,3C
De ACB a BDG , seis condensadores en paralelo, capacidad equivalente, 6C
De BDG a T, tres condensadores en paralelo, capacidad, 3C
Estos condensadores equivalentes están en serie, luego la capacidad del conjunto es:

$$\frac{1}{C_E} = \frac{1}{3C} + \frac{1}{6\,C} + \frac{1}{3C} = \frac{5}{6C} \quad \Rightarrow \quad C_E = \frac{6C}{5}$$