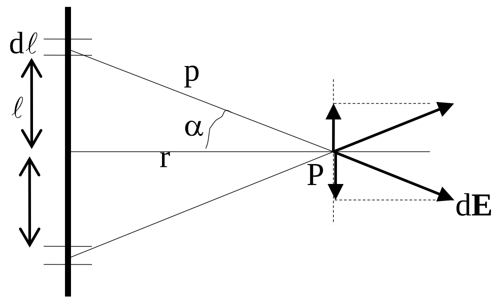
130.-**(550).-* ***En el eje Z y entre las coordenadas +Z y –Z existe una distribución uniforme de carga cuya densidad es λ en culombios partido por metro.
a) Calcular por integración directa el campo y el potencial en un punto P situado sobre el eje Y a una distancia r.
b) Simplificar las ecuaciones obtenidas suponiendo que Z es mucho mayor que r.
c) Comprobar que la versión simplificada del campo se puede obtener a partir de la versión simplificada del potencial.

Propuesto en el libro Fundamentos de electricidad y magnetismo. F.M.Pugh-E.W. Pugh. Editorial Aguilar.

Ayuda: $\int \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{\mathbf{x}^2+\mathbf{a}^2}} = \mathbf{ln}\left(\mathbf{x}+\sqrt{\mathbf{x}^2+\mathbf{a}^2}\right)$

a) En la figura hemos escogido un elemento diferencial $d\ell$ de la distribución de carga, el cual crea un campo eléctrico elemental dE en P, cuya dirección va desde el elemento $d\ell$. hasta P y cuyo sentido es saliente, por estar el elemento cargado positivamente El elemento simétrico del anterior situado en el eje –Z crea un campo en P de tal modo que las componentes verticales se anulan entre sí y las horizontales se suman, como se observa en al figura

a)



El módulo del campo creado por el elemento $d\ell$ vale

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{p^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda\, d\ell}{r^2+\ell^2}$$

La componente horizontal es:

$$dE_X = dE\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda\, d\ell}{r^2+\ell^2}\cdot\cos\alpha$$

La variable ℓ la relacionamos con la variable α

$$\tan\alpha = \frac{\ell}{r} \;\Rightarrow\; \ell = r\tan\alpha \;\Rightarrow\; d\ell = \frac{r}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

Sustituyendo en dE

$$dE_X = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda\frac{r}{\cos^2\alpha}d\alpha}{r^2 + r^2\mathrm{tag}^2\alpha}\cdot\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda\, d\alpha}{r(1+\mathrm{tag}^2\alpha)\cos^2\alpha}\cdot\cos\alpha \quad \Rightarrow$$

$$dE_X = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda\, d\alpha}{r\left(\frac{\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\cos^2\alpha}\cdot\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{r}\cos\alpha\, d\alpha$$

Para hallar el valor del campo debido a la parte superior de la distribución es: entre O y +Z , el seno del ángulo vale: $\mathrm{sen}\,\alpha_Z = \frac{Z}{\sqrt{r^2+Z^2}}$

Integrando la ecuación

$$E_X = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{r}\int_0^{\alpha_Z}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{r}\,\mathrm{sen}\,\alpha\Big|_0^{\alpha_Z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{r}\mathrm{sen}\,\alpha_Z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{r}\frac{Z}{\sqrt{r^2+Z^2}}$$

Falta sumar la parte comprendida entre O y –Z la cual tiene el mismo valor anterior, por lo que el módulo del campo es el doble

$$E_p = 2E_X = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{r}\frac{Z}{\sqrt{r^2+Z^2}}$$

El potencial en P creado por el elemento $d\ell$ es:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{p} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda\, d\ell}{p} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\frac{d\ell}{\sqrt{\ell^2+r^2}} \quad \Rightarrow V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^{+Z}\frac{d\ell}{\sqrt{\ell^2+r^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\ln\left[\ell + \sqrt{\ell^2+r^2}\right]_0^{+Z} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\left[\ln\left(Z+\sqrt{Z^2+r^2}\right) - \ln r\right] \ ;$$

$$\Rightarrow \ V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\ln\frac{Z+\sqrt{Z^2+r^2}}{r}$$

Dado que solamente hemos calculado la mitad superior de la distribución, la otra mitad crea el mismo potencial, por lo que el potencial en P es

$$V_P = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{Z+\sqrt{Z^2+r^2}}{r}$$

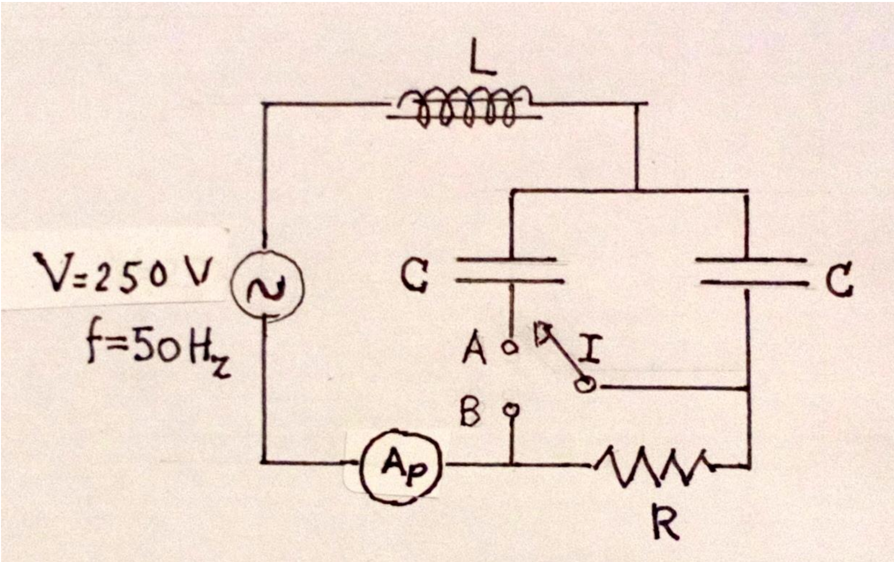
b) Si Z>> r, entonces $Z^2 + r^2 = Z^2$ y el campo y el potencial son:

$$E_P = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{r} \quad ; \quad V_P = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{2Z}{r}$$

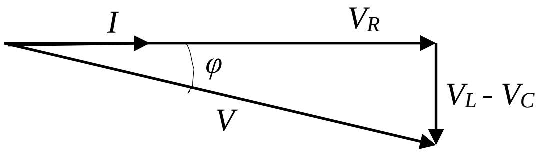
b) La relación entre el campo y el potencial
c)

$$E_P = -\frac{dV_P}{dr} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{\frac{2Z}{r}}\cdot\frac{-2Z}{r^2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\frac{Z}{r}$$

131.-(556)- El esquema de un circuito eléctrico es el de la figura. Cuando el interruptor I se encuentra en la posición indicada, la intensidad de la corriente está adelantada 20º respecto del voltaje. Si el interruptor I hace contacto con A, la intensidad de la corriente está retrasada respecto del voltaje 10º. Si el interruptor I hace contacto con el borne B la intensidad de la corriente medida por el amperímetro A_P es 1 ,25 A. Calcular L, C y R.



En el dispositivo de la figura, la bobina L, el condensador C de la derecha y la resistencia R están en serie. Como la intensidad está adelantada respecto del voltaje, se cumple que el ángulo φ es negativo y también su tangente.



Al estar todos los elementos en serie y ser la intensidad la misma en todos los elementos, la tangente del ángulo φ se puede expresar

$$\operatorname{tag}(-20^\circ) = -0{,}364 = \frac{L2\pi f - \dfrac{1}{C\,2\pi f}}{R} \quad \Rightarrow \quad 0{,}364 = \frac{\dfrac{1}{C\,2\pi f} - L2\pi f}{R} \qquad (1)$$

Cuando el interruptor I hace contacto con el borne A, la bobina L, los dos condensadores en paralelo y la resistencia R están en serie y la intensidad de la corriente está retrasada repacto del voltaje. Ahora se cumple que

$$\frac{1}{C_E\,2\pi f} < L2\pi f \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2C\cdot 2\pi f} < L2\pi f$$

Se deduce que $\quad \mathrm{tag}10^{o} = 0{,}176 = \dfrac{L2\pi f - \dfrac{1}{2C\cdot 2\pi f}}{R} \quad (2)$

Si el interruptor I hace contacto con el borne B, la bobina y el condensador de la derecha están en serie

$$I = \frac{V}{\dfrac{1}{C\,2\pi f} - L2\pi f} \quad \Rightarrow \quad 1{,}25 = \frac{250}{\dfrac{1}{C\,2\pi f} - L2\pi f} \quad (3)$$

De la ecuación (3) $\dfrac{1}{C\,2\pi f} - L2\pi f = 200$, sustituyendo en la ecuación (1)

$$0{,}364 = \frac{200}{R} \quad \Rightarrow \; R = 549\ \Omega$$

De la ecuación (2) $\; 0{,}176\cdot 549 = L2\pi f - \dfrac{1}{2C\cdot 2\pi f} \quad \Rightarrow \; L2\pi f - \dfrac{1}{2C\cdot 2\pi f} = 96{,}6$

De (1) $\quad L2\pi f = \dfrac{1}{C2\pi f} - 0{,}364\cdot 549$. Combinando estas dos ecuaciones resulta:

$$\frac{1}{C2\pi f} - 0{,}364\cdot 549 - \frac{1}{2C\cdot 2\pi f} = 96{,}6 \;\Rightarrow\; \frac{1}{C2\pi f}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 296 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad C = \frac{1}{296\cdot 4\pi f} = 5{,}38.10^{-6}\,F$$

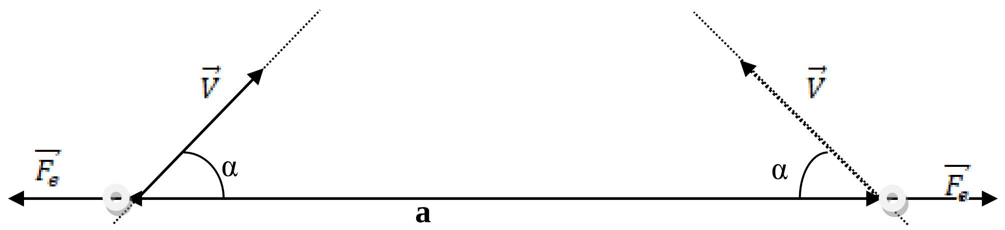
En la ecuación (3)

$$\frac{1}{C2\pi f} - L2\pi f = 200 \;\Rightarrow\quad L2\pi f = \frac{1}{C2\pi f} - 200 \;\Rightarrow\; L = \frac{1}{C4\pi^2 f^2} - \frac{200}{2\pi f} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad L = \frac{1}{5{,}38.10^{-6}\cdot 4\pi^2\cdot 50^2} - \frac{200}{2\pi\cdot 50} = 1{,}25\,H$$

132.- (573).-Dos electrones en un determinado instante están separados una distancia a y su vectores velocidad son del mismo módulo y forman ángulos iguales α con la recta que los une. La situación está representada en la figura inferior. Se pide la distancia mínima a la que se acercarán los electrones.
Las velocidades se consideran pequeñas frente a la de la luz en el vacío, de modo que se pueden despreciar los efectos relativistas.

Nota.-_No tenga en consideración la fuerza magnética que ejerce cada electrón debido al campo magnético que produce, sobre el otro electrón._
Así mismo las velocidades se consideran pequeñas frente a la de la luz en el vacío, de modo que se pueden despreciar los efectos relativistas.



Propuesto en el libro de problemas de física de O. Ya. Sávchenko. Editorial Mir.

Los vectores velocidad de ambos electrones se descomponen en dos componentes perpendiculares, una $\bar{v}\cos\alpha$ sobre la recta a y otra $\bar{v}\,\text{sen}\,\alpha$ en dirección perpendicular. Las componentes de los vectores sobre la recta **a** apuntan uno hacia el otro. Las fuerzas de repulsión electrostática están sobre la recta **a** y tienen sentido contrario respecto a esa componente de la velocidad, para cada electrón. En consecuencia, esa fuerza crea una aceleración en sentido contrario a esta componente de la velocidad, y por tanto, esa componente se anulará, mientras que la componente en dirección perpendicular no se ve afectada. El máximo acercamiento se produce cuando la componente sobre **a** de la velocidad se anule.
Dado que el sistema es conservativo podemos aplicar el `principio de conservación de la energía para la situación inicial y final. Recordemos que tienen energía cinética y potencial electrostática. y cuando se acerquen a la mínima distancia que designamos con r se cumple:

$$2\left[\frac{1}{2}m_e\left[(v\cos\alpha)^2+(v\,\text{sen}\,\alpha)^2\right]\right]+\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{a}=2\left[\frac{1}{2}m_e\left[(v\,\text{sen}\,\alpha)^2\right]\right]+\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{r}$$

En la ecuación anterior m_e es la masa del electrón, e su carga y r la distancia mínima

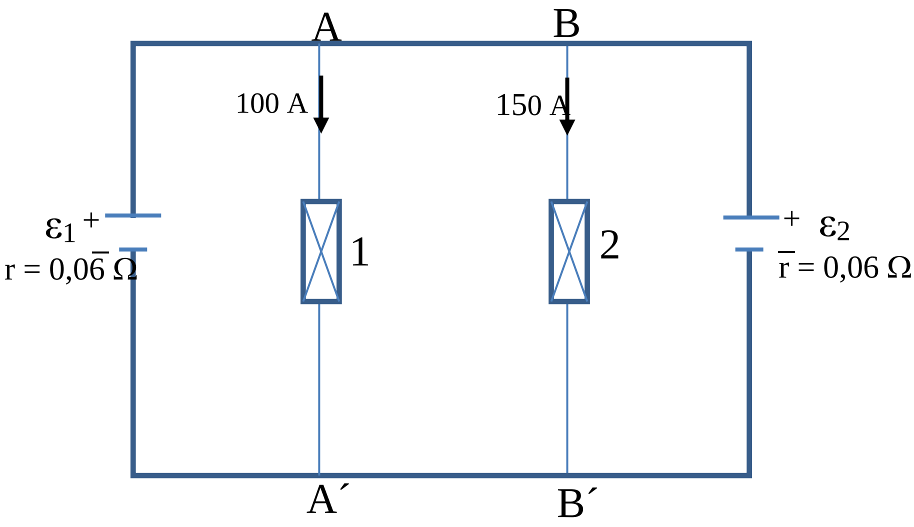
Operando en la ecuación

$$m_e v^2 \cos^2\alpha + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{r} \quad \Rightarrow \; 4\pi\varepsilon_o m_e v^2 \cos^2\alpha + \frac{e^2}{a} = \frac{e^2}{r} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4a\ \pi\varepsilon_o m_e v^2 \cos^2\alpha + e^2}{a} = \frac{e^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{e^2 a}{4a\,\pi\varepsilon_o m_e v^2 \cos^2\alpha + e^2}$$

133.-**(580).- **Dos generadores de corriente suministran energía a dos receptores (1) y (2) por medio de cables de conexión de resistencia 0,34 Ω/ km. El generador situado a la izquierda en el gráfico inferior tiene una fuerza electromotriz de ε_1=115 V y una resistencia interna de r= 0,06 Ω y el situado a la derecha ε_2= 115 V y resistencia interna r =0,06 Ω. Las longitudes de los cables en cada una de las mallas es 200 m. Por el receptor 1 discurre una intensidad de 100 A y por el receptor 2, 150 A. Calcular la intensidad de corriente que circula por cada generador

b) Determinar la potencia que consume cada uno de los receptores.



Los receptores 1 y 2 consumen energía de los generadores, como en el problema no nos dan ninguna información sobre ellos, podemos adscribir a cada receptor una resistencia ya que es un dispositivo que consume energía de los generadores. Esas resistencias se designan con R_1 y R_2, respectivamente..

El problema consiste en asignar corrientes a cada malla, establecer un convenio de signos y aplicar las leyes de Kirchhoff.

En la figura 1 se han asignado con su sentido las corrientes I_1, I_2 e I_3 para cada malla.. El sentido positivo se conviene el de giro de las agujas del reloj, tal como se indica por el signo más rodeado de una circunferencia.

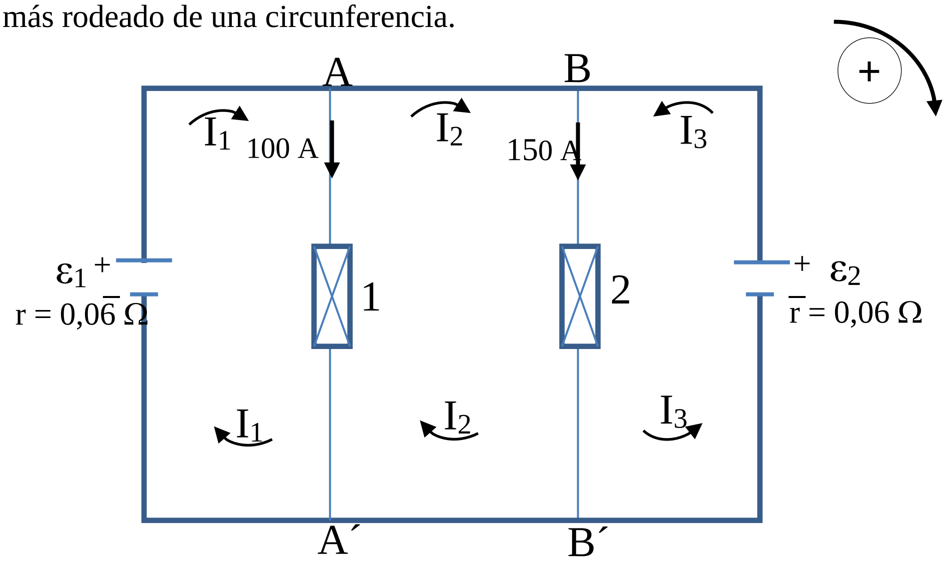


Fig.1

Ley de los nudos
Los nudos elegidos se designan con las letras A y B y se conviene que las corrientes que lleguen a un nudo son positivas y negativas las que se alejen. Dela figura 1 se deduce:

Nudo A $\quad I_1 - 100 - I_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = I_1 - 100 \qquad (1)$

Nudo B $\quad I_2 - 150 + I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_3 = 150 - I_2 = 150 - (I_1 - 100) = 250 - I_1 \qquad (2)$

Ley de las mallas. Para aplicar la regla de las mallas, hemos de recordar que una malla se trata de un circuito cerrado que se habrá de recorrer sin pasar dos veces por un mismo tramo, en el mismo sentido. En él, los productor R·I se tomarán positivos cuando el sentido asignado a la corriente coincide con el de recorrido de la malla previamente elegido (en nuestro caso es el de las agujas del reloj señalado a la derecha en la parte superior de la imagen, que será el mismo en cada malla). El signo de la fuerza electromotriz ε se considera positiva, cuando según el sentido convencional de recorrido, se entra en el elemento por la placa negativa y se sale por la positiva. En caso contrario se considera negativa.

$$\sum \varepsilon_i = \sum R \cdot I$$

Se han separado las tres mallas para mayor claridad

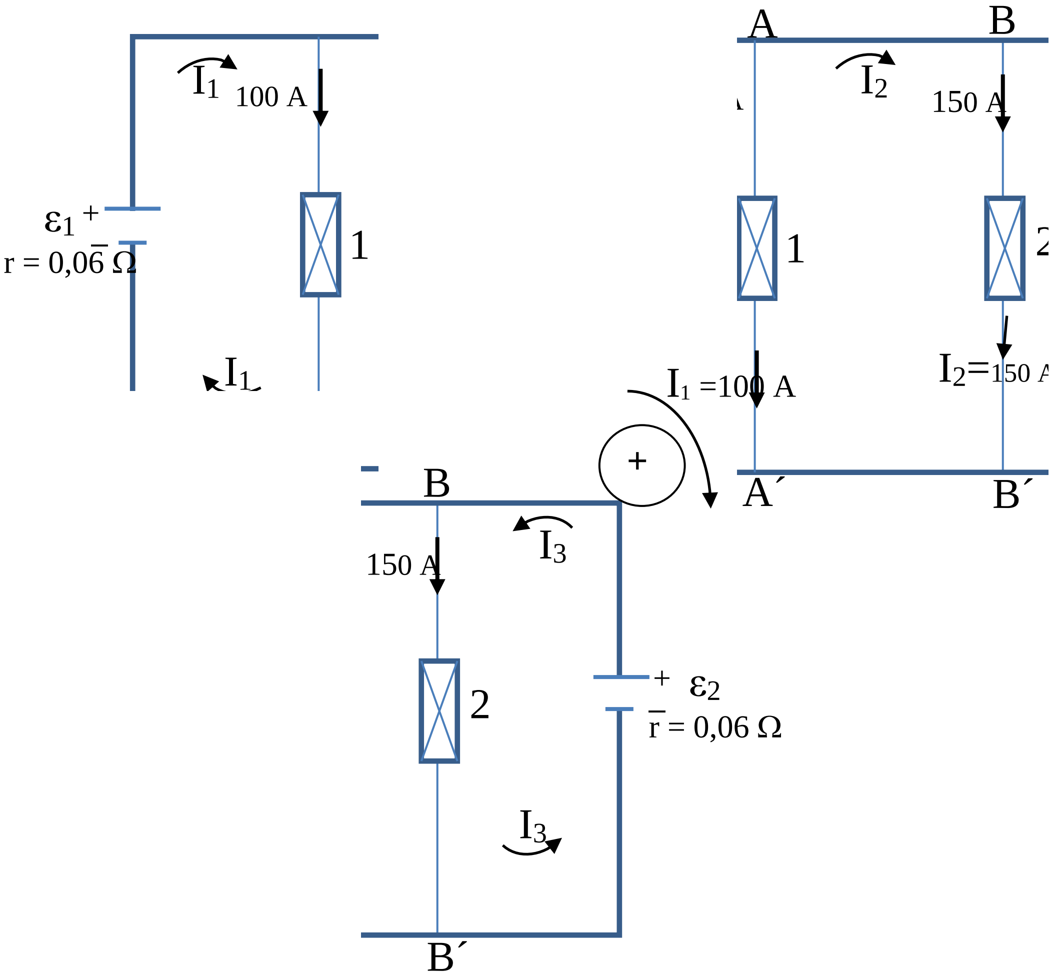


Fig 2

Resistencia de los cables de conexión en cada malla $R = 200\,\text{m}\cdot\frac{0{,}34\,\Omega}{1000\,\text{m}} = 0{,}068\,\Omega$

Malla 1 $\quad I_1(0{,}068+0{,}06)+100\cdot R_1 = \varepsilon_1 = 115 \quad\Rightarrow\quad 0{,}128\,I_1 + 100\cdot R_1 = 115 \qquad (3)$

Malla 2 $\quad I_2\cdot 0{,}068 + 150\,R_2 - 100\,R_1 = 0 \qquad (4)$

Malla 3 $\quad -I_3\cdot(0{,}068+0{,}06) - 150\cdot R_2 = -112 \quad\Rightarrow\quad 0{,}128\,I_3 + 150\,R_2 = 112 \quad (5)$

Sumamos las ecuaciones (3) (4) $\quad 0{,}128\,I_1 + 0{,}068\,I_2 + 150\,R_2 = 115 \qquad (6)$

Restamos a (6) la (5) $\quad 0{,}128\,I_1 + 0{,}068\,I_2 - 0{,}128\,I_3 = 115 - 112 = 3 \qquad (7)$

Sustituimos en (7), I_2 por (1) e I_3 por (2)

$$0{,}128\,I_1 + 0{,}068(I_1 - 100) - 0{,}128(250 - I_1) = 3 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad I_1(0{,}128+0{,}068+0{,}128) - 6{,}8 - 32 = 3 \;\Rightarrow\quad I_1 = \frac{41{,}8}{0{,}324} = 129\ \text{A}$$

$$I_2 = 129 - 100 = 29\,\text{A} \quad;\quad I_3 = 250 - 129 = 121\,\text{A}$$

Sustituyendo en la ecuación (3)

$$0{,}128\cdot 129 + 100\,R_1 = 115 \quad\Rightarrow\quad R_1 = \frac{115 - 0{,}128\cdot 129}{100} = 0{,}985\,\Omega$$

Sustituyendo en la ecuación (5)

$$0{,}128\cdot 121 + 150\,R_2 = 112 \quad\Rightarrow\quad R_2 = \frac{112 - 0{,}128\cdot 121}{150} = 0{,}643\,\Omega$$

Potencia consumida por el receptor 1

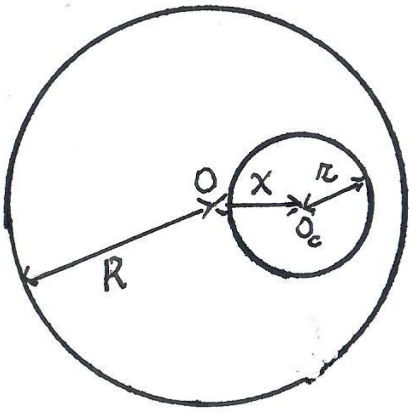
$$P_1 = I_1^2\cdot R_1 = 100^2\cdot 0{,}985 = 9{,}85.10^3\,\text{W} = 9{,}85\,\text{kW}$$

Potencia consumida por el receptor 2

$$P_2 = I_2^2\cdot R_1 = 150^2\cdot 0{,}643 = 14{,}5.10^3\,\text{W} = 14{,}5\ \text{kW}$$

.

134.-** (595.)-**Una esfera de radio R posee una densidad de carga uniforme ρ, excepto en una cavidad de radio r, siendo R>r y ρ=0. El centro de la cavidad O_C está a una distancia x del centro de la esfera, $x < R - r$ (ver la figura inferior) .Determinar el campo eléctrico dentro de la cavidad.



Vamos a aplicar el principio de superposición que nos permite considerar el problema como la suma de una esfera completa de carga positiva de radio R más una esfera completa de carga negativa de radio r .

Calculamos el campo creado por una esfera positiva de densidad +ρ mediante la aplicación del teorema de Gauss. En la figura 1 con centro en O trazamos una esfera de radio y<R que es la denominada superficie gaussiana.

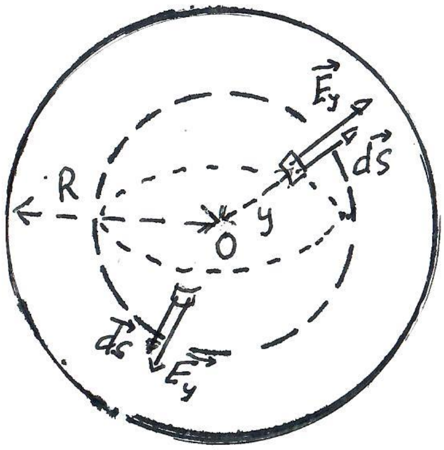


Fig.1

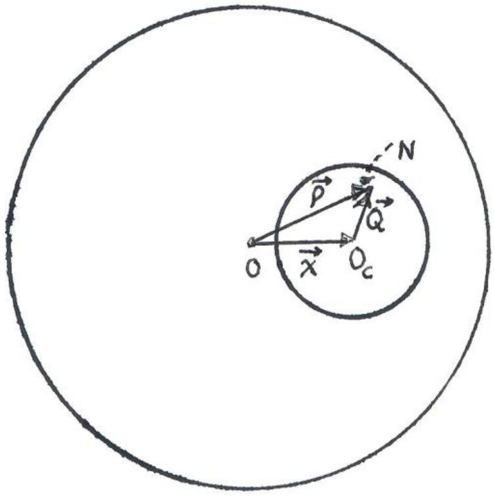
La carga interior a esa esfera es

$$q_y = \text{Volumen} \cdot \text{densidad de carga} = \frac{4}{3}\pi y^3 \rho$$

Dada la simetría el vector campo es radial y del mismo módulo en tofos los lugares de la esfera, además el flujo saliente indica que el vector **dS** y el vector campo $\mathbf{E_y}$ forman entre sí un ángulo nulo
Y de acuerdo con el teorema señalado

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_y}{\varepsilon_0} = \int E_y\, dS \cos 0^o = \frac{\frac{4}{3}\pi y^3 \rho}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_y = \frac{\frac{4}{3}\pi y^3 \rho}{\varepsilon_o\, 4\pi y^2} = \frac{y\rho}{3\varepsilon_o} \quad (1)$$

Aplicamos la ecuación (1) en un punto cualquiera de la esfera de carga positiva designado con N en la figura 2.



Fig, 2

$$E_+ = \frac{P\rho}{3\varepsilon_o}$$

Esta expresión es el módulo del vector campo creado por la esfera de carga positiva , expresando el vector

$$\vec{E}_+ = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\vec{P}$$

Siguiendo el mismo procedimiento para la esfera d3e carga negativa

$$\vec{E}_- = -\frac{\rho}{3\varepsilon_o}\vec{Q}$$

El campo en la cavidad es la suma de los dos vectores

$$\vec{E}_C = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}(\vec{P}-\vec{Q}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\vec{x}$$

135.-** (598)-**Dos cargas positivas puntuales iguales cada una de magnitud Q se mantienen fijas a una distancia 2a. Determinar

a) El campo eléctrico E(z) creado por esta distribución de cargas en un punto P de un plano perpendicular al segmento que une las dos cargas y que pasa por su punto medio si la distancia del punto a la intersección de la recta con el plano es z.

b) Los puntos del plano para los que la intensidad del campo es máxima

c) El valor de dicha intensidad máxima

d) Representa E(z) en función de z.

Propuesto en el libro: Problemas de Física. J, Ruiz Vázquez. Selecciones Científicas

a) En la figura 1, $Q=Q_S$ indica la carga que está por encima del plano y $Q = Q_I$ la que está por su parte inferior. P representa un punto del plano que dista z de O. $\vec{E}_S$ es el vector campo promovido por la carga Q_S y $\vec{E}_I$ el creado por la carga Q_I. Ambos, de

direcciones radiales y saliendo de las cargas por ser estas positivas

.

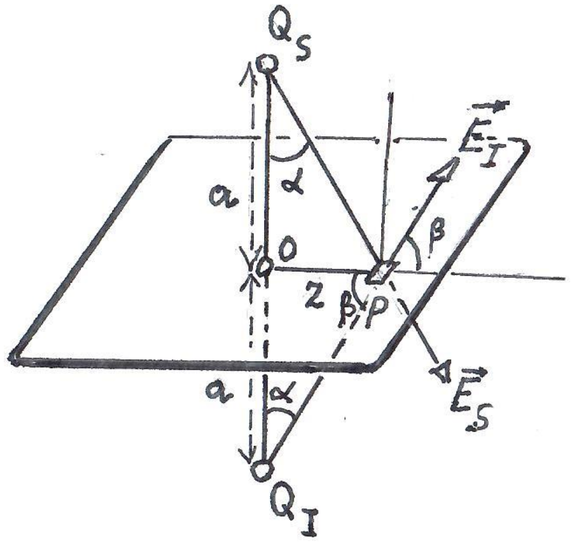


Fig.1

El segmento Oz , y los vectores campo, $\vec{E}_S$ $\vec{E}_I$, se encuentran en el mismo plano, el cual es vertical al plano perpendicular al segmento que une las dos cargas. . El campo resultante en P es la suma vectorial de los campos creados por cada carga. Observando la figura las componentes verticales se anulan, y la que están en la prolongación de z se suman, además los módulos de esos dos vectores son iguales, por serlo las cargas y las distancias. Recuerde:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r \ ; \qquad \cos\beta = \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} \ ; \qquad r^2 = a^2 + z^2$$

El módulo del campo en P es la suma de las proyecciones horizontales de los módulos de los vectores $\vec{E}_S$; $\vec{E}_I$

$$E(z) = E_S \cos\beta + E_I \cos\beta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2Q}{a^2+z^2}\cdot\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2Qz}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

b) Para calcular los valores de z para los que el campo es máximo, derivamos (1) con respecto a la variable z e igualamos a cero

$$\frac{dE(z)}{dz} = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - z\cdot\frac{3}{2}(a^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2z}{(a^2+z^2)^3} = 0 \quad \Rightarrow \; (a^2+z^2)^{\frac{3}{2}} = 3z^2(a^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}{(a^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = 3z^2 \quad \Rightarrow \quad a^2+z^2 = 3z^2 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

El lugar geométrico de los puntos del plano que cumplen la ecuación (2) es una circunferencia de radio $R = a\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Para determinar el módulo del campo máximo, sustituimos en (1) la ecuación (2)

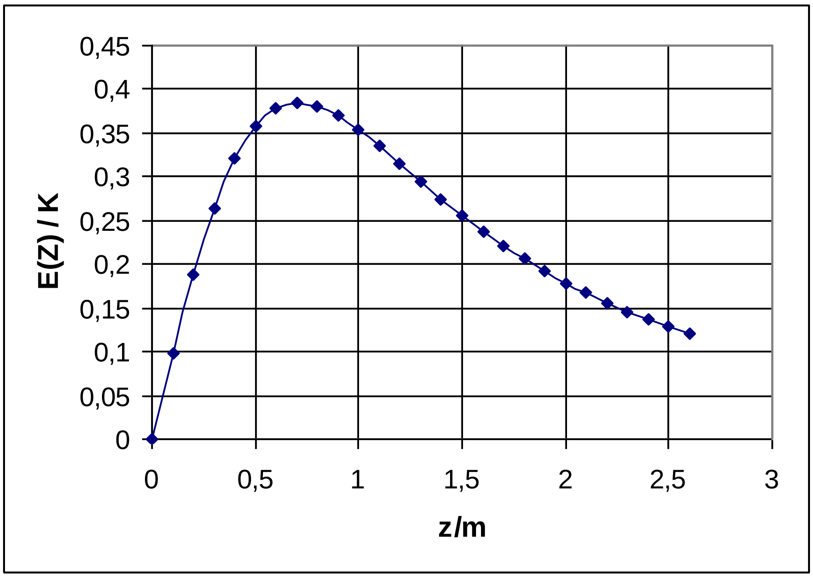
$$E_{max} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2\cdot a\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(a^2+\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{a\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}\,a^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o a^2}\frac{4}{3\sqrt{3}}$$

c) La grafica pedida la hacemos a partir de la ecuación (1) siendo a = 1 m
d)

$$E(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2Qz}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = K\frac{z}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{E(z)}{K} = \frac{z}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Dando valores a z. se obtiene la gráfica siguiente cuyo máximo es

$$Z(max) = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$$


0,45
0,4
0,35
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
E(Z) / K
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
z/m

136.-** (602.)-**Una línea de carga eléctrica de longitud infinita posee una densidad líneal +λ y yace a lo largo del eje X. Otra línea de las mismas característica está situada a lo largo del eje Y.

a) Determinar el campo eléctrico $\vec{E}(x,y)$ para cualquier punto del plano XY

b) Determinar el cambio del potencial electrostático ΔV entre los puntos de coordenadas (x=a , y=a) y (x=a y b=3a).

c) Determinar el cambio del potencial electrostático ΔV entre los puntos de coordenadas (x=a , y=a) y (x=3a y b=a).

d) Calcular el trabajo necesario para desplazar una pequeña carga -q desde el punto (x=3a , y=3a) al punto (x=a, y=a)

a) Supongamos que la línea de carga es un cable hueco de diámetro pequeño que tiene repartida su carga eléctrica de forma uniforme sobre la superficie. Consideremos un trozo de esa línea de longitud L. El campo eléctrico es perpendicular a la línea en todos los puntos y saliente por ser la distribución de carga positiva. Como el problema de calcular el campo en un punto del espacio presenta mucha simetría, lo resolveremos por aplicación del teorema de Gauss. Requiere que consideremos una superficie cerrada que pase por el punto donde vamos a determinar el campo eléctrico, siendo el vector superficie elemental $d\vec{S}$ perpendicular al elemento de superficie y con sentido hacia fuera de la misma. Por razones de simetría tomaremos una superficie cilíndrica elemental cuyo eje coincida con la línea y hallaremos el flujo a través de la superficie lateral como se señala en la figura 1b). Los vectores campo $\vec{E}$ y $d\vec{S}$ tienen la misma dirección y sentido, su producto escalar vale $E \cdot dS$ (ver fig 1 a)

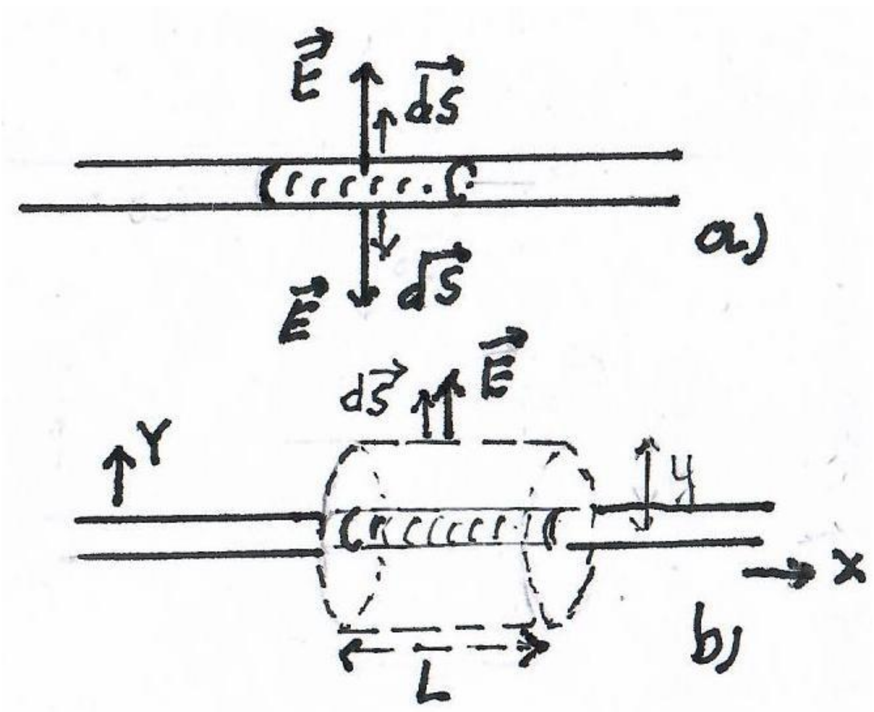


Fig.1

En la figura 1b) alrededor de la longitud L del conductor se ha dibujado un cilindro de longitud L. y radio y, de esta forma ese cilindro tiene en su interior una carga q que vale

$$q = \lambda L$$

Esa superficie se la denomina gaussiana, ya que sobre ella aplicamos el teorema de Gauss

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

La integral se extiende a toda la superficie gaussiana. En todos los puntos de la superficie lateral existe el mismo módulo del campo, puesto que cualquier punto de la superficie se encuentra a la misma distancia ***y*** del conductor, y además es perpendicular a la superficie en cada punto.($\vec{E} \cdot d\vec{S} = E\,dS$)

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\,S = \frac{q}{\varepsilon_o} = E\;2\pi y L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o y}$$

E es el módulo del campo, el vector campo

$$\vec{E} = E\,\vec{j} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o y}\,\vec{j}$$

El mismo razonamiento sirve para la distribución de carga sobre el eje Y. En este caso la distancia es x y el vector unitario $\vec{i}$. El campo para cualquier punto del plano XY es

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o x}\,\vec{i} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o y}\,\vec{j}$$

b) La relación entre el campo y el potencial es:

$$\vec{E} = -\text{grad } V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\vec{k} \right)$$

En el problema solamente nos aparece la derivada con respecto a y, ya que la coordenada x no varía y la z no existe al estar en el plano XY. Al ser una sola dirección la derivada parcial es una derivada total y la relación se escribe

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dy}\,\vec{j} \;\Rightarrow\; \int -dV = \int_a^{3a} E\,dy \Rightarrow \Delta V = -\int_a^{3a} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o y}\,dy = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln y\Big|_a^{3a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln 3 \;\Rightarrow\; \qquad \Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{1}{3}$$

c) Ahora la pregunta nos indica la dirección X,

$$\Delta V = -\frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_o}\ln 3 = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_o}\ln\frac{1}{3}$$

b) Como el campo eléctrico es conservativo el trabajo solamente depende del punto de partida y de llegada y no del camino entre esos dos puntos. Para hallar el trabajo lo hacemos siguiendo los caminos I y II señalados en la figura 2.

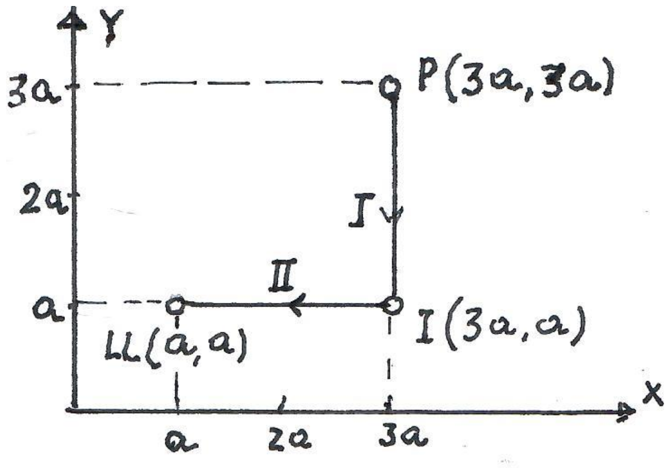


Fig.2

P es el punto de partida, LL el de llegada e I es el punto intermedio. Calculamos la diferencia de potencial entre P e I. Para ello nos fijamos en la integral del apartado b) en que los límites eran de a a) 3a) . Aquí es la misma integral pero los límites son de 3a) a a). La diferencia de potencial es la misma pero de signo contrario

$$\Delta V_I = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln 3$$

Lo mismo ocurre con el apartado c) la diferencia de potencial es la misma que en c) pero cambiada de signo

$$\Delta V_{II} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln 3$$

$$\Delta V_{P,LL} = \Delta V_I + \Delta V_{II} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_o}\ln 3$$

El trabajo eléctrico es el producto de la carga transportada por el potencial de salida menos el de llegada

$$\tau = -q\,\Delta V_{P,LL} = -\frac{q\lambda}{\pi\varepsilon_o}\ln 3$$

Alternativa

Determinación del potencial en un punto P(x,y) del plano, producido por las dos distribuciones lineales de carga.
La definición del potencial en un punto de un campo eléctrico es $V = -\int_O^r \vec{E}\cdot\overrightarrow{dr}$

O es un punto de referencia que se toma a potencial nulo. Para cargas puntuales o distribuciones finitas de cargas, como podría ser una esfera cargada, el punto de referencia se sitúa en el infinito y se le asigna potencial cero.
En este caso al tratarse de una distribución lineal de cargas de longitud infinita, entonces el potencial cero del punto de referencia no está en el infinito y hay que tomarlo en otro lugar. Veremos dónde.
Al estudiar el campo y el potencial eléctricos solo en el plano (X,Y) es z = 0 y el vector desplazamiento elemental es de la forma $\overrightarrow{dr} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$. El punto O_{ref} (O_x, O_y) es el punto de referencia a potencial cero, $V_{ref} = 0$, cuya posición habremos de determinar y no está en el origen de coordenadas O, desde el que se define el origen del vector de posición r

El potencial en el punto P(x,y) es:

$$V = -\int_{O_{ref}}^{r} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dr} = -\int_{(o_x,o_y)}^{(x,y)} \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o x}\vec{i} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o y}\vec{j}\right)\cdot\left(dx\vec{i} + dy\vec{j}\right)$$

$$V = -\int_{o_x}^{x} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o x}dx - \int_{o_y}^{y} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o y}dy = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}[\ln x]_{o_x}^{x} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}[\ln y]_{o_y}^{y}$$

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}[\ln o_x - \ln x] + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}[\ln o_y - \ln y]$$

Sin embargo las coordenadas del punto de referencia $O_{ref}(O_x , O_y)$ corresponden con las del punto de referencia que habrá de estar a potencial $V_{o,ref} = 0$. Para que esto sea posible y puesto que en la ecuación anterior del potencial, (O_x , O_y) están bajo un logaritmo neperiano, para que $\ln O_x$ sea cero, necesariamente $O_x = 1$. Análogamente sucede con $O_y = 1$.

En consecuencia el punto de referencia a potencial cero, debe estar en un lugar del plano (x,y) situado a 1 m, de distancia de cada una de las distribuciones lineales de carga de dimensiones infinitas.

Por tanto, el potencial electrostático en un punto P(x,y) vale.

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln x - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln y = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}[\ln x + \ln y]$$

De acuerdo con los apartados b) y c) del problema habremos de calcular la d.d.p. entre varios puntos. Puesto que la ecuación anterior permite calcular los potenciales de los distintos puntos, para hallar la d.d.p. bastará con calcular los potenciales correspondientes y después restarlos.
Asignemos con A al punto de coordenadas A(x=a; y=a)

$$V_A = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}[\ln a + ln a] = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}2\ln a$$

Sea B(x=a; y=3a)

$$V_B = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}[\ln a + ln3a] = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}[lna + \ln 3 + lna] = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}[2lna + \ln 3]$$

B) Calculemos la d.d.p. $(V_B - V_A)$:

$$V_B - V_A = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}[\ 2lna + ln3 - 2lna] = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln 3 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} ln\frac{1}{3}$$

Potencial en C(x=3a; y=a)

$$V_C = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}[\ln x\ + \ln y\ ] = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}[\ln 3a\ + \ln a\ ] = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ [\ln 3 + lna + lna]$$
$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}[2lna + ln3]$$

C) Calculemos la d.d.p. *($V_A - V_C$)*

$$V_A - V_C = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}[\ 2lna - 2lna - ln3] = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln 3$$

Calculemos el potencial del punto D(x=3a; y=3a)

$$V_D = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}[\ln x\ + \ln y\ ] = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}[ln3a + ln3a] = -\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_o} ln3a$$

D) Trabajo para desplazar a una carga $\mathbf{q_o}$ = –q desde el punto D al punto A.

$$W_{D\to A} = q_o \cdot\ (V_D - V_A) = -q\left(-\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_o}ln3a - (-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}2\ln a\ )\right) =$$
$$= -q\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}(-2ln3a + 2lna) = -q\frac{2\lambda}{2\pi\varepsilon_o}(-ln3 - lna + lna) = q\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_o}ln3$$

B) ***Calculemos la d.d.p.*** $(V_B - V_A)$***:***

$$V_B - V_A = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}[\ 2lna + ln3 - 2lna] = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln 3 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} ln\frac{1}{3}$$

Potencial en C(x=3[a]; y=a)

$$V_C = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}[\ln x\ + \ln y\ ] = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}[\ln 3a\ + \ln a\ ] = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ [\ln 3 + lna + lna]$$
$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}[2lna + ln3]$$

C) ***Calculemos la d.d.p. ($V_A - V_C$)***

$$V_A - V_C = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}[\ 2lna - 2lna - ln3] = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln 3$$

Calculemos el potencial del punto D(x=3[a]; y=3[a])

$$V_D = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}[\ln x\ + \ln y\ ] = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}[ln3a + ln3a] = -\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_o} ln3a$$

D) ***Trabajo para desplazar a una carga $q_o = -q$ desde el punto D al punto A.***

$$W_{D\to A} = q_o \cdot (V_D - V_A) = -q\left(-\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_o} ln3a - (-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} 2\ln a\ )\right) =$$

$$= -q\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}(-2ln3a + 2lna) = -q\frac{2\lambda}{2\pi\varepsilon_o}(-ln3 - lna + lna) = q\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_o} ln3$$

$$W_{A\to D} = -q\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_o}\ln 3$$

137.- (603).-Una corona esférica hecha con material conductor tiene un radio interior a y uno exterior b. En el centro de la corona está situada una carga +Q puntual que no está en contacto directo con la corona.

*a) **Determinar la distribución de cargas en la corona***
*b) **Calcular el campo eléctrico $\vec{E}(r)$ en función de la distancia r al centro de la corona***
*c) **Calcular el potencial eléctrico V(r) en función de r.***
*d) **Construir las gráficas del módulo de $\vec{E}$ frente a r y de V frente a r.***

a) En la parte interior de la corona aparece distribución uniforme de carga –Q y en la parte exterior una carga + Q., también distribuida de forma uniforme.
Al ser el material conductor el campo eléctrico es nulo entre a y b y como consecuencia de ello el potencial es constante, esto es, Va= Vb

b) Para calcular el campo eléctrico haremos uso del teorema de Gauss dada la simetría del problema.
Para los puntos exteriores a la corona $r > b$. Consideramos una esfera de radio r>b y aplicamos el teorema de Gauss

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum q}{\varepsilon_o}$$

El vector $\vec{E}$ y el vector $d\vec{S}$ forman en cualquier lugar de la esfera gaussiana un ángulo cero .y el modulo de $\vec{E}$ es el mismo en cual quier lugar de esa superficie . La integral vale $E\cdot 4\pi r^2$ y el sumatorio Q+Q-Q= Q

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2};\ r > b$$

La expresión vectorial del campo es $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\vec{\eta}$ siendo $\vec{\eta}$ un vector unitario en la misma dirección y sentido que $\vec{E}$.

Para los puntos a<r> b el campo es nulo ya ue se trata de un conductor

Para punto r<a consideramos una esfera de radio r<a y aplicamos el teorema de Gauss. La simetría del problema nos permite como en el primer caso

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \quad ; r < a$$

La expresión vectorial del campo es $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\vec{\eta}$ siendo $\vec{\eta}$ un vector unitario en la misma dirección y sentido que $\vec{E}$.

c) Para calcular los potenciales hacemos uso de la relación entre campo y potencial $E = -\dfrac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E\,dr$

Para $r \geq b$

$$V = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r} + Cte$$

Para hallar la constante de integración se admite que si $r = \infty$, el potencial es cero, luego Cte=0

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r} \qquad r \geq b$$

Para el conductor E=0 , por tanto, el potencial es constante $V_b = V_a = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o b}$

Para r<a ,

$$\int dV = -\int E\,dr = \int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}dr \Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r} + Cte$$

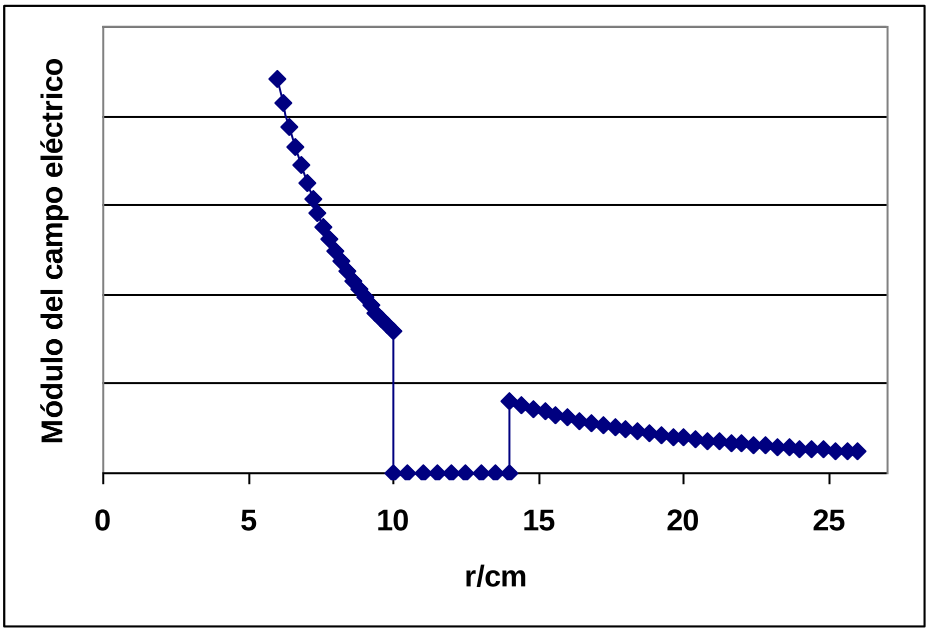
Cuando r=a el potencial es V_a que es igual a $V_b = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o b}$, luego

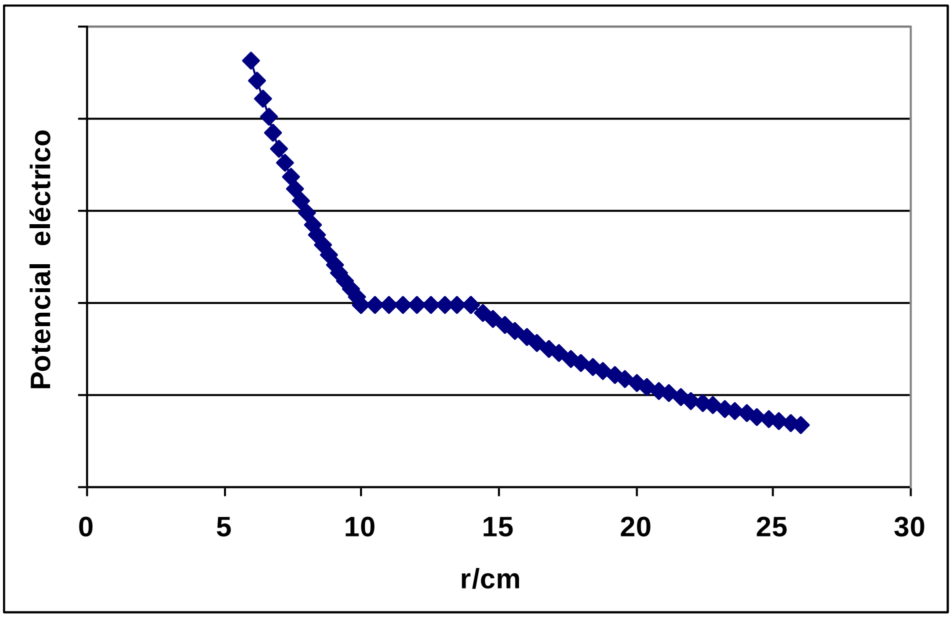
$$Cte = V_b - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o a} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o b} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o a}$$

Sustituyendo en V

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o b} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o a} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

d)


Módulo del campo eléctrico
0
5
10
15
20
25
r/cm


Potencial eléctrico
0
5
10
15
20
25
30
r/cm

138.- *(604)*.-***Dos condensadores planos iguales se cargan a la misma diferencia de potencial. Mediante dos hilos se conectan las armaduras positivas entre sí y las negativas entre sí. Imaginemos que uno de los condensadores aleja sus armaduras a velocidad constante y al mismo tiempo y a la misma velocidad el otro condensador las acerca. Calcular la intensidad de corriente que circula por el circuito.***

Recordatorio. Capacidad de un condensador plano $C = \frac{S}{\varepsilon\, d}$***, S superficie de una armadura, d, distancia entre ellas.***

Universidad de Toronto

Situación inicial. Los dos condensadores tienen la misma carga q y entre ellos existe la misma diferencia de potencial. Es un equilibrio estable y no hay corriente eléctrica por el sistema.. Partimos del instante en que los condensadores tienen la velocidad v y consideremos un intervalo de tiempo muy pequeño dt.

El condensador que designamos como C_1 ha disminuido su capacidad puesto que la distancia entre sus armaduras aumenta en v dt y su carga eléctrica disminuye en dq.
El otro condensador que designamos como C_2 aumenta su capacidad ya que la distancia entre sus armaduras ha diminuido en v dt y su carga aumenta en dq

$$C_1 = \frac{\varepsilon S}{d + v\,dt} \quad ; \quad C_2 = \frac{\varepsilon S}{d - v\,dt} \quad \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{d - v\,dt}{d + vdt} \qquad (1)$$

La capacidad es la relación entre la carga y el potencial. Cuando ha transcurrido el tiempo dt se han transferido dq culombios del condensador 1 al 2 y ha circulado por el sistema durante un tiempo dt, originando una intensidad de corriente I

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Si nos fijamos en el instante en que termina el tiempo dt, la diferencia de potencial es la misma en los condensadores y si no siguiesen moviéndose las armaduras, las capacidades cumplirían la relación

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\frac{q - dq}{V}}{\frac{q + dq}{V}} = \frac{q - dq}{q + dq} \qquad (2)$$

De (1) y (2)

$$\frac{d - vdt}{d + vdt} = \frac{q - dq}{q + dq} \Rightarrow d\,q + d\cdot dq - v\,dt\cdot q - v\cdot dt\cdot dq = d\,q - d\cdot dq + v\,dt\cdot q - v\cdot dt\cdot dq \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\,d\cdot dq = 2\,v\,dt\cdot q \quad \Rightarrow \quad I = \frac{dq}{dt} = \frac{v\,q}{d}$$

Se ha calculado I para el tiempo dt , ahora hay que resolver el valor de I para el siguiente dt, en el que las condiciones de partida no son iguales ya que ahora los condensadores tienen cargas diferentes.

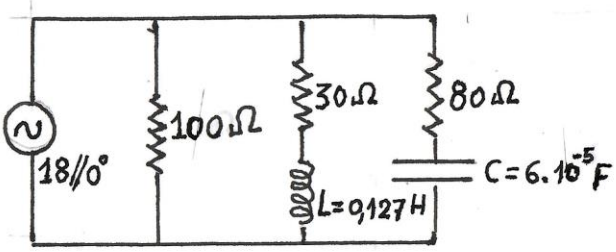
Como ha transcurrido un dt igual al anterior la carga del condensador C_1 es $q_1 = q(\text{anterior}) - dq = q - 2dq$ y el condensador C_2 tiene una carga $q_2 = q + 2dq$. Las distancias entre armaduras son: para C_1 , $d - 2vdt$ y para C_2 , $d + 2vdt$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{d-2vdt}{d+2vdt} = \frac{q-2dq}{q+2dq} \Rightarrow dq + 2d\,dq - 2vq\,dt - 4v\,dq\,dt = dq - 2d\,dq + 2vq\,dt - 4v\,dq\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4d\,dq = 4vq\,dt \quad \Rightarrow \quad I = \frac{dq}{dt} = \frac{vq}{d}$$

El resultado nos dice que si se hiciese un experimento como describe el problema se obtendría una intensidad de corriente constante mientras se desplazasen las armaduras a velocidad constante.

139 .- (621).- Determinar la intensidad total y la impedancia equivalente del circuito de la figura inferior. Construir el esquema de los fasores de las intensidades. La frecuencia de la red es 50 Hz



Designamos: $\bar{I}_T$ la intensidad que pasa por el generador, $\bar{I}_1$ por el primer ramal (el de la resistencia de 100 Ω), $\bar{I}_2$ por el segundo ramal e $\bar{I}_3$ por el tercero.

Se cumple : $\bar{I}_T = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3$

Las impedancias de cada rama son

$$\bar{Z}_1 = 100\ \Omega \ ; \ \bar{Z}_2 = 30 + L\,\omega\, j = 30 + 0{,}127 \cdot 2\pi 50\, j = 30 + 39{,}9 j \ ;$$

:

$$\bar{Z}_3 = 80 - \frac{1}{C\omega} j = 80 - \frac{1}{6.10^{-5} \cdot 2\pi 50} j = 80 - 53{,}1\, j$$

Convertimos las formas binómicas de las impedancias a las formas polares

$$\sqrt{30^2 + 39{,}9^2} = 49{,}9 \ ; \ \operatorname{tag}\alpha = \frac{39{,}9}{30} = 1{,}33 \Rightarrow \alpha = 53{,}1^\circ \Rightarrow \bar{Z}_2 = 49{,}9 // 53{,}1^\circ$$

$$\sqrt{80^2 + (-53{,}1)^2} = 96{,}0 \ ; \ \operatorname{tag}\alpha = \frac{-53{,}1}{80} = -0{,}664 \Rightarrow \alpha = -33{,}6^\circ \Rightarrow \bar{Z}_3 = 96{,}0 // -33{,}6^\circ$$

$$\bar{I}_T = \frac{18 // 0^\circ}{100} + \frac{18 // 0^\circ}{49{,}9 // 53{,}1^\circ} + \frac{18 // 0^\circ}{96{,}0 // -33{,}6} = 0{,}18 // 0^\circ + 0{,}361 // -53{,}1^\circ + 0{,}188 // 33{,}6^\circ$$

Para efectuar la suma anterior los complejos deben ponerse en forma binómica

$$\bar{Z}_1 = 0{,}18 \ ; \ \bar{Z}_2 = 0{,}361 \cdot \cos(-53{,}1^\circ) + 0{,}361 \cdot \operatorname{sen}(-53{,}1) j = 0{,}217 - 0{,}289\, j$$

$$\bar{Z}_3 = 0{,}188 \cdot \cos 33{,}6^\circ + 0{,}188 \cdot \operatorname{sen} 33{,}6^\circ = 0{,}157 + 0{,}104 j$$

$$I_T = 0{,}18 + 0{,}217 - 0{,}289 j + 0{,}157 + 0{,}104 j = 0{,}554 - 0{,}185 j$$

$$\sqrt{0{,}554^2 + (-0{,}185)^2} = 0{,}584 \ ; \ \operatorname{tag}\alpha = \frac{-0{,}185}{0{,}554} = -0{,}334 \quad \alpha = -18{,}5^\circ$$

$$\bar{I}_T = 0{,}584 // -18{,}5^\circ$$

La impedancia equivalente es:

$$\overline{Z}_E = \frac{\overline{V}}{\overline{I}_T} = \frac{18 /\!/ 0^o}{0{,}584 /\!/ -18{,}5^o} = 30{,}8 /\!/ 18{,}5^o$$

Construimos el diagrama de las intensidades

$$\overline{I}_1 = 0{,}18 /\!/ 0^o \ ; \quad \overline{I}_2 = 0{,}361 /\!/ -53{,}1^o \ ; \quad \overline{I}_3 = 0{,}188 /\!/ 33{,}6^o$$