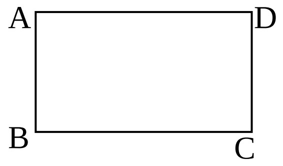
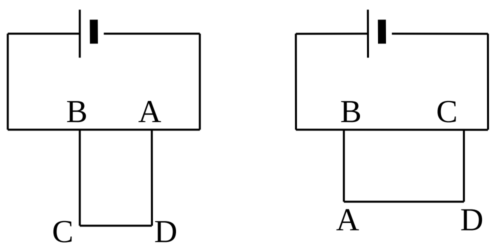
1.- Un hilo uniforme tiene forma de rectángulo ABCD



Si se conecta dicho rectángulo a un circuito eléctrico por los vértices AB, la resistencia vale R_1, pero si a ese mismo circuito se conecta por los vértices BC la resistencia es R_2=1,6 R_1 ¿Cuál es la relación de las longitudes de los lados del rectángulo?

Designamos con r_1 a la resistencia del lado AB y con r_2 la del lado BC. Los dos posibles conexiones son las de la figura inferior



En el primer caso la resistencia r_1=AB está en paralelo con las resistencias en serie $r_2+r_1+r_2$

$$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_1+2r_2}=\frac{2(r_1+r_2)}{r_1(r_1+2r_2)} \quad \Rightarrow \quad R_1=\frac{r_1(r_1+2r_2)}{2(r_1+r_2)}$$

En el segundo caso la resistencia r_2=BC está en paralelo con las resistencias en serie $r_1+r_2+r_1$

$$\frac{1}{R_2}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_2+2r_1}=\frac{2(r_1+r_2)}{r_2(r_2+2r_1)} \quad \Rightarrow \quad R_2=\frac{r_2(r_2+2r_1)}{2(r_1+r_2)}$$

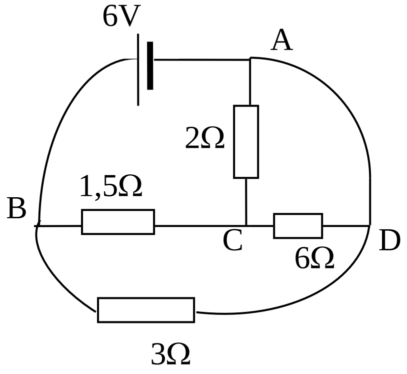
$$\frac{R_2}{R_1}=\frac{r_2(r_2+2r_1)}{r_1(r_1+2r_2)}=1,6$$

Si hacemos r_1 igual a la unidad resulta:

$$r_2^2+2r_2=1,6+3,2r_2 \quad \Rightarrow \quad r_2^2-1,2r_2-1,6=0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado y considerando la solución positiva r_2 =2, por tanto, la relación de longitudes es la misma que la de resistencias por ser un hilo uniforme.

2.-Calcular en el circuito de la figura inferior la corriente total que atraviesa la batería



Vamos a convertir este esquema en otro en el que se vea más fácilmente la disposición de las resistencias.

Para ello señalamos los nudos A B C y D , observamos que entre Ay D no existe resistencia , por tanto, esos dos puntos están al mismo potencial y por tanto son el mismo nudo.

Esto nos lleva a decir que la resistencia de 2Ω y la de 6 Ω están en paralelo y el conjunto de las dos en serie con la de 1,5 Ω. El circuito de la parte superior excluyendo a la resistencia de 3 Ω queda así (fig 1)

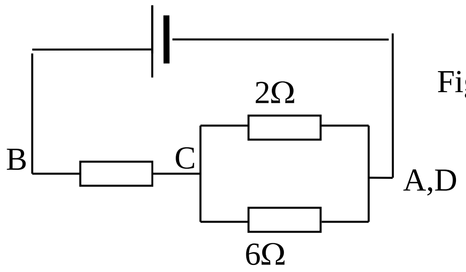


Fig.1

La resistencia de 3Ω está entre By C, por tanto, en paralelo con las de la. figura 1. El circuito definitivo es el de la figura 2.

Resistencia entre C y A

$$\frac{1}{R_{CA}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \Rightarrow \quad R_{CA} = \frac{3}{2}\Omega$$

Resistencia entre B y A

$$R_{BA} = 1{,}5 + \frac{3}{2} = 3\Omega$$

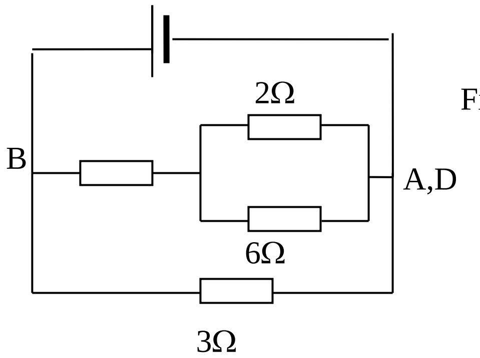


Fig.2

Resistencia total del circuito

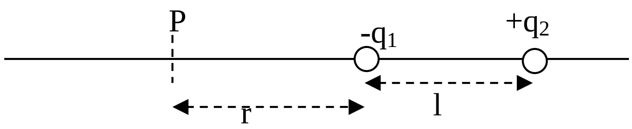
$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow R_T = \frac{3}{2}\Omega$$

Intensidad total

$$I = \frac{6}{1{,}5} = 4A$$

3.-Sobre el eje X se encuentra una carga $-q_1$, a su derecha y a una distancia l se encuentra una carga $+q_2$, siendo en valor absoluto $q_2>q_1$. Ambas cargas están fijas. Por el eje X y por la izquierda de q_1 y desde el infinito se acerca una masa m con una carga $+q_3$. Calcular la velocidad mínima que debe tener en el infinito esta carga para que pueda alcanzar a q_1.

En la figura está el esquema de la situación de las cargas



En el punto P a una distancia r de $-q_1$, los campos eléctricos de la dos cargas se anulan. A la izquierda de P predomina el campo de $+q_2$ y a la derecha de P el de $-q_1$. Dado que la carga q_3 es positiva, a la izquierda de P es repelida, pero si rebasa el punto P, entonces es atraída, por consiguiente, si $+q_3$ ha de llegar a $-q_1$ basta con que su velocidad en P sea nula, ya que de ahí en adelante será atraída por $-q_1$.

El trabajo que es necesario realizar para que la carga $+q_3$ llegue a P es:

$$W = q_3\left(V_\infty - V_P\right) = q_3\left(0 - V_P\right) = -q_3\left[\frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\left(\frac{q_2}{r+l} - \frac{q_1}{r}\right)\right]$$

El signo negativo indica que el trabajo debe realizarse en contra de las fuerzas del campo.

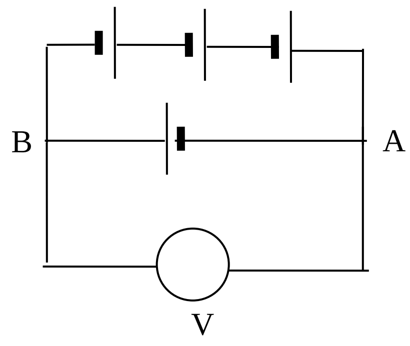
Este trabajo se realiza a costa de la energía cinética inicial que la carga q_3 tiene en el infinito

$$\frac{1}{2}mv^2 = q_3\left[\frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\left(\frac{q_2}{r+l} - \frac{q_1}{r}\right)\right] \quad \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2q_3}{4\pi\ m\varepsilon_o}\left(\frac{q_2}{r+l} - \frac{q_1}{r}\right)}$$

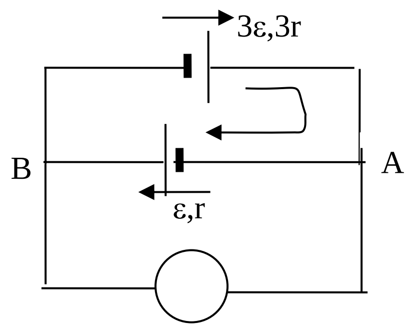
El valor de r se puede calcular a partir de que en el punto P las fuerzas son iguales

$$\frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{q_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{q_2}{(r+l)^2} \Rightarrow \quad \frac{r+l}{r} = \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} \Rightarrow \quad \frac{l}{r} = \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} - 1 \Rightarrow \quad r = \frac{1}{\sqrt{\frac{q_2}{q_1}} - 1}$$

4.- En el circuito de la figura inferior cada una de las pilas tiene una fuerza electromotriz ε y una resistencia interna r. El voltímetro tiene una resistencia interna muy superior a r y los cables carecen de resistencia. Determinar cuál será la lectura del voltímetro



El circuito de la figura equivale al siguiente



La intensidad que circula por la malla superior es: $I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R} = \frac{3\varepsilon + \varepsilon}{3r + r} = \frac{\varepsilon}{r}$ y tiene el sentido de movimiento de las agujas de un reloj, como señala la flecha curvada de la figura.

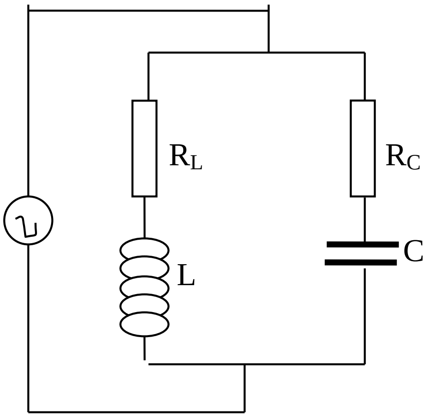
Si tomamos como sentido positivo el de la corriente y calculamos la diferencia de potencial por la parte inferior

$$V_A - V_B = \sum IR - \sum \varepsilon = Ir - \varepsilon = \frac{\varepsilon}{r} r - \varepsilon = 0$$

Si calculamos la misma diferencia de potencial por la parte superior

$$V_A - V_B = \sum IR - \sum \varepsilon = -I \cdot 3r - (-3\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{r} \cdot 3r + 3\varepsilon = 0$$

5.-En el circuito de la figura inferior determinar la frecuencia de resonancia



La impedancia de la rama que contiene la bobina vale $Z_1 = R_L + L\omega\ i$

La impedancia de la rama que contiene el condensador vale $Z_1 = R_C - \dfrac{1}{C\omega}\ i$

La admitancia de todo el circuito

$$Y = \frac{1}{R_L + L\omega\ i} + \frac{1}{R_C - \dfrac{i}{C\omega}}$$

Multiplicamos por el conjugado del denominador en cada fracción

$$Y = \frac{R_L - L\omega\ i}{R_L^2 + L^2\omega^2} + \frac{R_C + \dfrac{i}{C\omega}}{R_C^2 + \dfrac{1}{C^2\omega^2}} \Rightarrow Y = \frac{R_L}{R_L^2 + L^2\omega^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + \dfrac{1}{C^2\omega^2}} + i\left(\frac{-L\omega}{R_L^2 + L^2\omega^2} + \frac{\dfrac{1}{C\omega}}{R_C^2 + \dfrac{1}{C^2\omega^2}}\right)$$

La resonancia se produce cuando la parte imaginaria es nula

$$\frac{L\omega_r}{R_L^2 + L^2\omega_r^2} = \frac{C\omega_r}{R_C^2 C^2\omega_r^2 + 1} \Rightarrow LR_C^2 C^2\omega_r^2 + L = CR_L^2 + L^2 C\omega_r^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \omega_r^2\left(LR_C^2 C^2 - L^2 C\right) = CR_L^2 - L \quad \Rightarrow \quad \omega_r^2 = \frac{\left(R_L^2 - \dfrac{L}{C}\right)C}{LC^2\left(R_C^2 - \dfrac{L}{C}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_L^2 - \dfrac{L}{C}}{R_C^2 - \dfrac{L}{C}}} \quad \Rightarrow \quad f_r = \frac{1}{2\pi\ \sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_L^2 - \dfrac{L}{C}}{R_C^2 - \dfrac{L}{C}}}$$

Para que haya resonancia se tiene que cumplir que

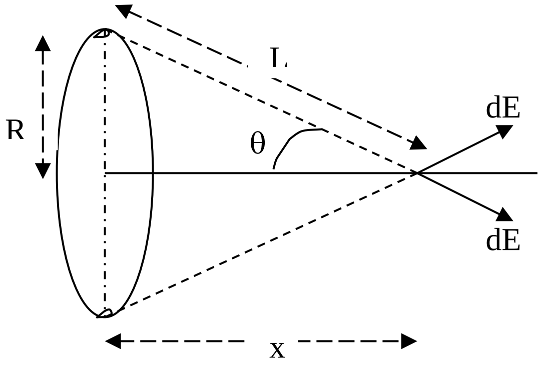
$$R_L^2 > \frac{L}{C} \quad \text{y} \quad R_C^2 > \frac{L}{C}$$

o también que

$$R_L^2 < \frac{L}{C} \quad \text{y} \quad R_C^2 < \frac{L}{C}$$

Para que el discriminante de la raíz sea positivo.

6.- Un anillo de radio R tiene distribuida uniformemente una carga de Q culombios. a) Calcular el campo eléctrico en un punto de su eje que dista del centro del anillo x. b) Dibujar la gráfica campo (eje Y) frente a distancia x, para una espira de radio R=10 cm y Q = 1 nC c) Determinar para qué valor de x el módulo del campo es máximo y el valor del campo en ese punto.

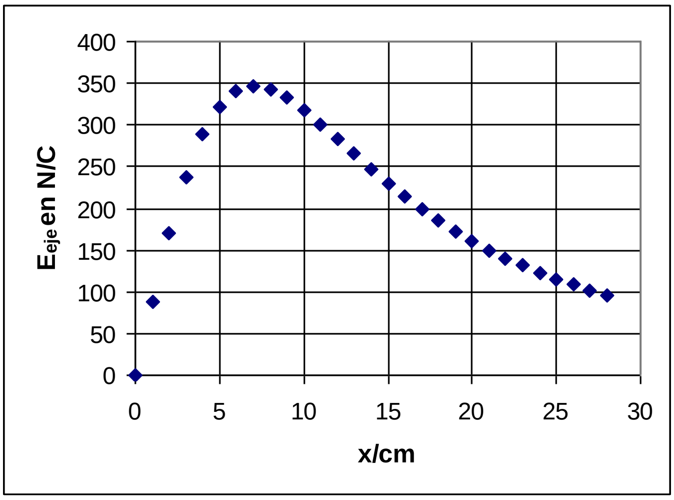


Escogemos dos elementos de longitud dl situados en los extremos de un diámetro. Cada elemento tendrá una carga $dq = \dfrac{Q}{2\pi\ R}dl$ y crearán sendos campos $d\vec{E}$, tales como los que se indican en la figura superior. Ambos campos tienen la componente sobre la vertical igual y de sentido contrario y sobre la horizontal igual y del mismo sentido. Esto supone que al sumar las contribuciones de los distintos elementos en los que se descompone el aro la componente vertical se anula y solo queda sumar la componente sobre el eje horizontal.

$$dE_{eje} = dE \cdot \cos\theta = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{dQ}{L^2}\cdot\frac{x}{L} = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{\frac{Q}{2\pi\ R}dl \cdot x}{L^3} \Rightarrow E_{eje} = \frac{Qx}{8\pi^2\varepsilon_o R\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi\ R} dl \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{eje} = \frac{Qx}{8\pi^2\varepsilon_o R\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot 2\pi\ R = \frac{Qx}{4\pi\ \varepsilon_o\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

b)



De la gráfica se observa que el campo presenta un máximo. Para hallar su valor derivamos la función $E_{eje}= f(x)$ frente a x, e igualamos a cero.

c)

$$\frac{dE_{eje}}{dx} = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o}\left[\frac{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}} - x\cdot\frac{3}{2}\left(R^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{\left(R^2+x^2\right)^3}\right] = 0 \Rightarrow \left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(R^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 3x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(R^2+x^2\right) = 3x^2 \Rightarrow \quad R^2 = 2x^2 \Rightarrow \quad x = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{10\ cm}{\sqrt{2}} = 7{,}07cm$$

$$E_{eje} = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Qx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 9.10^9\ \frac{10^{-9}\cdot 0{,}0707}{\left(0{,}1^2+0{,}0707^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 346\frac{N}{C}$$

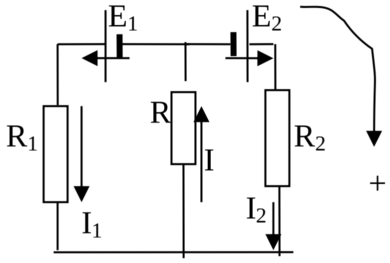
7.- Un condensador plano de capacidad C está descargado. Mediante un hilo muy largo se une una de las armaduras a una esfera de radio R y carga q_o y la otra se une a tierra. Calcular la carga que permanece en la esfera después de la unión.

Parte de la carga de la esfera pasa al condensador y este flujo de carga cesa cuando los potenciales se igualen. Designamos con q_C la carga que adquiere el condensador y con q la carga que permanece en la esfera.
Por una parte se conserva la carga y por otra se igualen los potenciales del condensador y de la esfera

$$\left.\begin{array}{l} q_o = q + q_C \\ \dfrac{q_C}{C} = \dfrac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\dfrac{q}{R} \end{array}\right\}$$

$$\frac{q_o - q}{C} = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{q}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{q_o}{C} = q\left(\frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o R} + \frac{q}{C}\right) \Rightarrow \quad q = \frac{q_o}{\dfrac{C}{4\pi\ \varepsilon_o R} + 1}$$

8.-En el circuito de la figura inferior hay que determinar el valor de la resistencia R para que la potencia calorífica generada en dicha resistencia sea la máxima posible y además calcular cuánto vale esa potencia máxima.
Se supone que las pilas carecen de resistencias internas.



Se toma como sentido positivo el de las agujas de un reloj. Las ecuaciones para las mallas izquierda y derecha son:

$$-E_1 = -I_1R_1 - IR$$
$$E_2 = I_2R_2 + IR$$

Para un nudo

$$I = I_1+I_2$$

A partir de las tres ecuaciones

$$I = \frac{E_1 - IR}{R_1} + \frac{E_2 - IR}{R_2} \Rightarrow I\left(1+\frac{R}{R_1}+\frac{R}{R_2}\right) = \frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2} \Rightarrow I\left(1+\frac{R(R_1+R_2)}{R_1R_2}\right) = \frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\dfrac{E_1R_2 + E_2R_1}{R_1R_2}}{\dfrac{R_1R_2 + R(R_1+R_2)}{R_1R_2}} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{E_1R_2 + E_2R_1}{R_1R_2 + R(R_1+R_2)}$$

La potencia térmica generada en la resistencia R, vale:

$$P = I^2R = \frac{(E_1R_2 + E_2R_1)^2}{[R_1R_2 + R(R_1+R_2)]^2} \cdot R \text{ (1)}$$

Como se pide que la potencia sea máxima derivamos la función anterior respecto de R e igualamos a cero.

$$\frac{dP}{dR} = \frac{[R_1R_2 + R(R_1+R_2)]^2 \cdot (E_1R_2 + E_2R_1)^2 - (E_1R_2 + E_2R_1)^2\, R \cdot 2[R_1R_2 + R(R_1+R_2)](R_1+R_2)}{[R_1R_2 + R(R_1+R_2)]^4} = 0$$

De la ecuación anterior

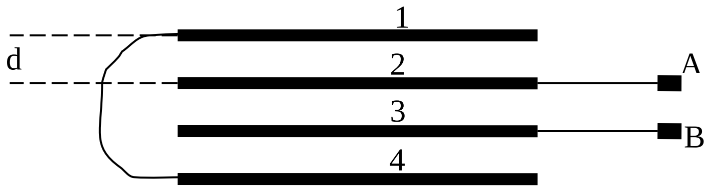
$$R_1R_2 + R(R_1 + R_2) - 2R(R_1 + R_2) = 0 \quad \Rightarrow R_1R_2 - R(R_1 + R_2) \Rightarrow \quad R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} \text{ (2)}$$

Llevando la ecuación (2) a (1)

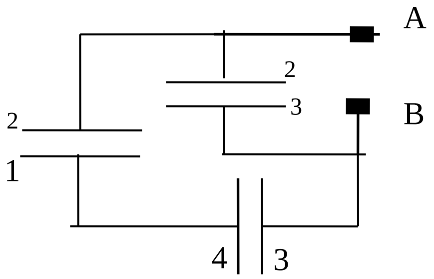
$$P_{max} = \frac{(E_1R_2 + E_2R_1)^2}{\left[R_1R_2 + \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}(R_1 + R_2)\right]^2} \cdot \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(E_1R_2 + E_2R_1)^2}{4R_1^2R_2^2} \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} \quad \Rightarrow$$

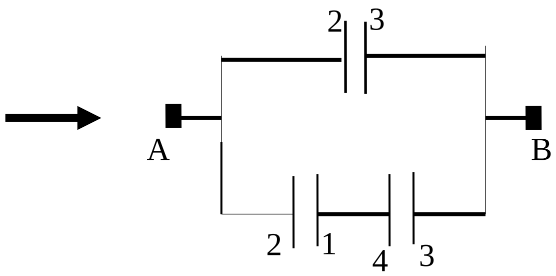
$$\Rightarrow \quad P_{max} = \frac{(E_1R_2 + E_2R_1)^2}{4R_1R_2(R_1 + R_2)}$$

9.-Calcular la capacidad del sistema de condensadores de la figura inferior. Cada placa metálica tiene una superficie S y entre dos placas existe una distancia d.



Para saber cómo están conectados los condensadores hemos numerado las placas. Las figuras inferiores indican cómo se conectan las placas.





En la última figura se observa que los dos condensadores inferiores se encuentran en serie y el conjunto de ellos en paralelo con el tercero. Por tanto la capacidad del conjunto es:

La capacidad de 2-1 y 4-3 $\quad \frac{1}{C_A} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} \quad \Rightarrow \quad C_A = \frac{C}{2}$

La capacidad equivalente $\quad C_E = \frac{C}{2} + C = \frac{3\ C}{2}$

La capacidad de cada condensador plano es: $\quad C = \varepsilon \frac{S}{d} \quad \Rightarrow \quad C_E = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon\ S}{d}$