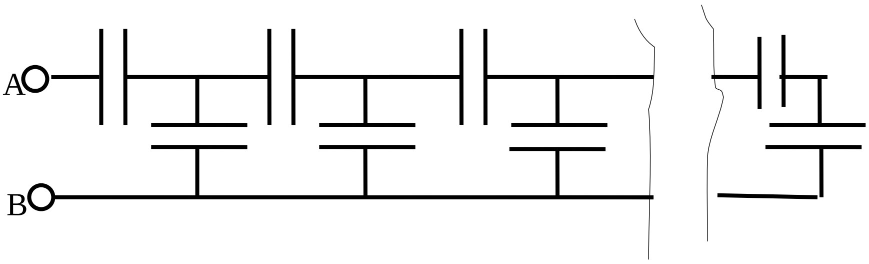
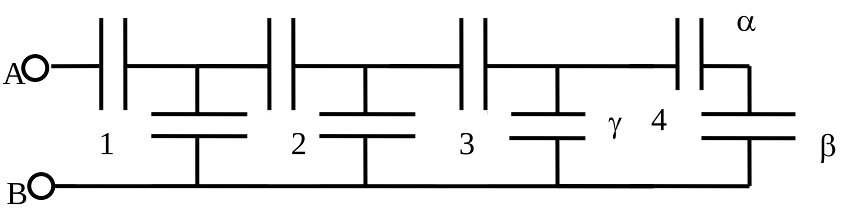
10.- Determinar la capacidad equivalente entre A y B en el circuito de la figura inferior. Los condensadores son iguales y la capacidad de cada uno es C.



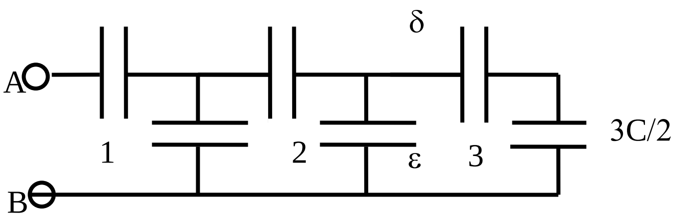
Supongamos que en lugar de ser infinitas las mallas solamente son cuatro



Vamos a eliminar la malla 4 sustituyéndola por un solo condensador. Los condensadores α y β están en serie y el conjunto de los dos en paralelo con el γ. Los tres pueden sustituirse por un solo condensador

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{C}{2} \quad \Rightarrow \quad C_E = C + \frac{C}{2} = \frac{3C}{2}$$

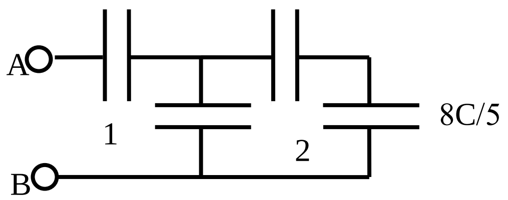
El sistema de condensadores quedaría así:



En la malla 3 sustituimos los condensadores ε, δ y el de capacidad 3C/2 por un solo condensador

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C} + \frac{2}{3C} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{3C}{6} \quad \Rightarrow \quad C_E = C + \frac{3C}{5} = \frac{8C}{5}$$

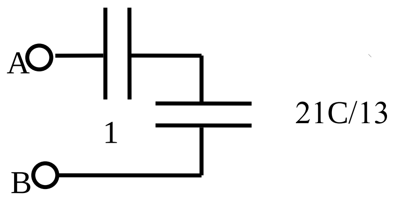
El sistema de condensadores quedaría así



Los tres condensadores de la malla 2 los sustituimos por un solo condensador

$$\frac{1}{C_3}=\frac{1}{C}+\frac{5}{8C} \quad\Rightarrow\quad C_3=\frac{8C}{13} \quad\Rightarrow\quad C_E=C+\frac{8C}{13}=\frac{21C}{13}$$

El sistema de condensadores quedaría así



La capacidad entre A y B es:

$$\frac{1}{C_{AB}}=\frac{1}{C}+\frac{13}{21C} \quad\Rightarrow\quad C_{AB}=\frac{21C}{34}$$

Analicemos la secuencia obtenida

$$\frac{3C}{2} \quad ; \quad \frac{8C}{5} \quad ; \quad \frac{21C}{13} \quad ; \quad C_{AB}=\frac{21C}{34}$$

De los tres primeros términos se deduce que el denominador de uno de ellos es igual a la suma de numerador y denominador del anterior y que su numerador es igual a la suma del numerador del anterior más su propio denominador, en general

$$\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}};\frac{x_n}{y_n}=\frac{x_{n-1}+\left(x_{n-1}+y_{n-1}\right)}{x_{n-1}+y_{n-1}}=\frac{2x_{n-1}+y_{n-1}}{x_{n-1}+y_{n-1}}=\frac{2\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}+1}{\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}+1}=\frac{2a+1}{a+1}$$

Si nos fijamos en el valor de la capacidad equivalente resulta que su numerador es igual al del último término y su denominador es la suma del numerador y denominador del último término, en general

$$C_{AB}=\frac{x_n}{x_n+y_n}=\frac{\frac{x_n}{y_n}}{\frac{x_n}{y_n}+1}=\frac{a}{a+1} \quad (1)$$

Para averiguar el valor de a establecemos que cuando existen infinitas mallas

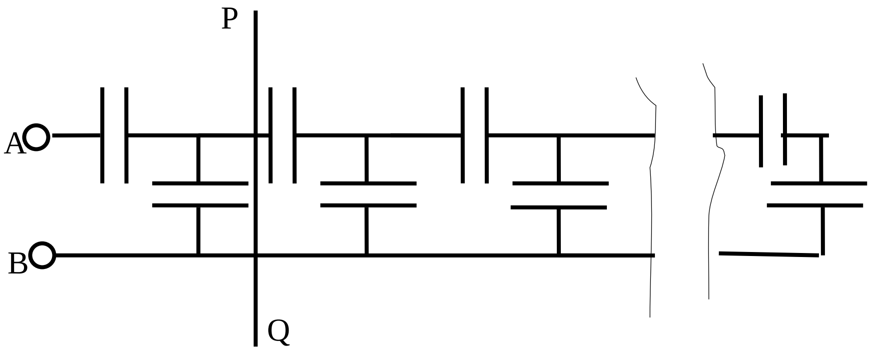
$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} = 0 \Rightarrow \frac{2a+1}{a+1} - a = 0 \Rightarrow 2a+1-a^2-a = 0 \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow \quad a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Sustituyendo la solución positiva en la ecuación (1)

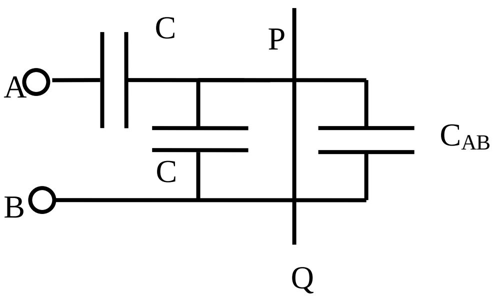
$$C_{AB} = \frac{a}{a+1} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1} = \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \frac{3-\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5}{9-5} = \frac{-2+2\sqrt{5}}{4} \Rightarrow$$

$$C_{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Otra forma de abordar el problema se basa en que al existir infinitas mallas, el añadir o quitar una no debe afectar al resultado, según esto podemos reducir el sistema al siguiente



Todo lo que está a la derecha de la línea PQ tiene una capacidad C_{AB} y el sistema siguiente también, en virtud de que añadir una malla a la serie infinita no afecta al resultado



Los condensadores C_{AB} y C (el que está más cerca de la línea PQ) están en paralelo y su equivalente es:

$$C' = C_{AB} + C$$

C´ está en serie con el otro C, por tanto, la capacidad equivalente es:

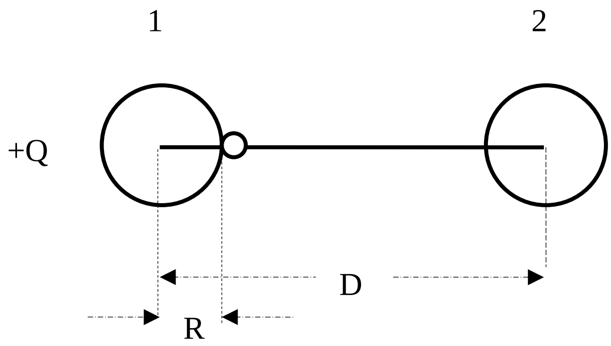
$$\frac{1}{C''} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_{AB} + C} = \frac{C_{AB} + 2C}{C^2 + C_{AB}C} \quad \Rightarrow \quad C'' = C_{AB} = \frac{C^2 + C_{AB}C}{C_{AB} + 2C} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{AB}^2 + 2C_{AB}C = C^2 + C_{AB}C \Rightarrow C_{AB}^2 + C_{AB}C - C^2 = 0 \Rightarrow C_{AB} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 + 4C^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_{AB} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot C$$

11.- Dos esferas de radio R y carga +Q (la carga de cada esfera está distribuida uniformemente sobre su superficie), están separadas una distancia D>>R. Una de las esferas lleva adherida en su superficie una muy pequeña esfera de carga –q y masa m. Determinar qué velocidad mínima hay que comunicar a esa pequeña esfera para que se adhiera a la otra esfera.

La situación inicial está reflejada en la figura



La esfera pequeña esta sometida a dos fuerzas de naturaleza eléctrica, una dirigida al centro de la esfera 1 y otra dirigida al centro de la esfera 2. La primera fuerza es más intensa porque la distancia de la esfera uno a la esfera pequeña es R mientras que la de la esfera 2 es D-R>R. En consecuencia para despegar la esfera pequeña de la esfera 1 hemos de comunicarle una cierta velocidad, la cual nos bastará con que al llegar a la distancia D/2 tenga velocidad nula, ya que a partir de ese momento la atracción de la esfera 2 es mayor que la de la esfera 1.

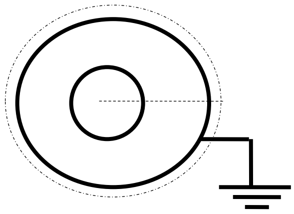
Dado que los campos son conservativos establecemos la suma de la energía inicial ((cinética + potencial eléctrica) y cuando la esfera pequeña esté en D/2 (energía cinética nula+energía potencial eléctrica)

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Qq}{R} - \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Qq}{D-R} = 0 - \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Qq}{\frac{D}{2}} - \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Qq}{\frac{D}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{Qq}{4\pi\ \varepsilon_o}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{D-R} - \frac{2}{D} - \frac{2}{D}\right) \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{Qq}{2m\pi\ \varepsilon_o}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{D-R} - \frac{4}{D}\right)}$$

12.- Una esfera metálica de radio R esta cargada a un potencial V. Calcular el potencial de la mencionada esfera si
a) Se rodea de una capa esférica, de radio R_2 y espesor despreciable, concéntrica con la esfera y se conecta a tierra. b) Si en lugar de unir la capa esférica a tierra se une a la esfera c) si se rodea de una capa esférica cuyo radio interior es R2 y el exterior R3 y la unimos a tierra.

a) Supongamos una superficie esférica exterior a la capa esférica de radio $r>R_2$



El potencial de la capa esférica es cero ya que está unida a tierra, $V_r=0$

Aplicamos el teorema de Gauss. El flujo eléctrico que atraviesa la superficie esférica de radio $r \ge R_2$ es:

$$E \cdot S = \frac{\sum q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{\sum q}{r^2} = -\frac{dV_r}{dr} \Rightarrow \int -dV_r = \frac{\sum q}{4\pi\ \varepsilon_o}\int \frac{dr}{r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_r = \frac{\sum q}{4\pi\ \varepsilon_o r} + Cte \Rightarrow \text{cuando } r = \infty \ , \quad V_r = 0 \rightarrow Cte = 0 \Rightarrow V_r = \frac{\sum q}{4\pi\ \varepsilon_o r} = 0$$

De la última expresión se deduce $\sum q = 0$, por lo que si la carga de la esfera es +Q la de la capa esférica es –Q.

Designamos con V_1 el potencial que tiene ahora la esfera y calculamos el campo en un lugar $R_1 \le r \le R_2$

$$E \cdot S = \frac{\sum q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Q}{r^2} = -\frac{dV_r}{dr} \Rightarrow \int -dV_r = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o}\int \frac{dr}{r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_r = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o r} + Cte \Rightarrow \text{cuando } r = R_2 \ , \quad V_r = 0 \rightarrow Cte = -\frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o R_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_r = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o r} - \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o R_2} \qquad (1)$$

Dado que la ecuación (1) la podemos aplicar cuando $r = R_1$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o R_1}\cdot R_1\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right) \quad \Rightarrow \quad V_1 = V\frac{R_2 - R_1}{R_2}$$

b) Si unimos la esfera a la capa esférica pasará carga de la esfera a la capa hasta que los potenciales se igualen. La carga Q inicial se reparte entre la esfera y la capa esférica $Q = q_1+q_2$. Designamos con V_2 al nuevo potencial de la esfera.

Calculamos el campo en r, siendo r prácticamente igual a R_2 (como en la figura superior)

$$E \cdot S = \frac{\sum q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{q_1 + q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Q}{r^2} = -\frac{dV_r}{dr} \Rightarrow \int -dV_r = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o}\int \frac{dr}{r^2} \Rightarrow$$

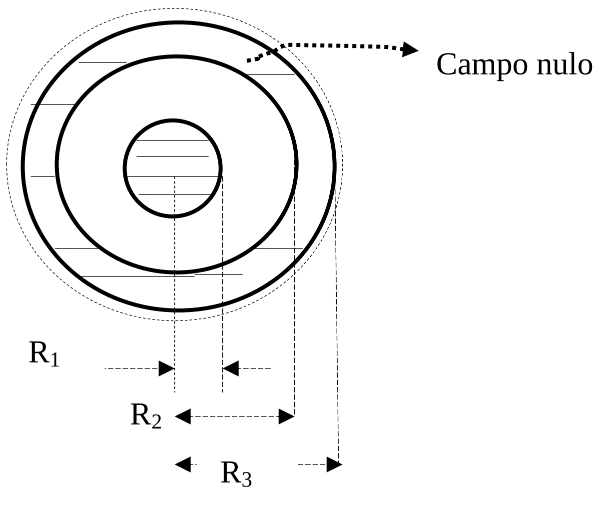
$$\Rightarrow V_r = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o r} + Cte \Rightarrow \text{cuando } r = \infty, \quad V_r = 0 \rightarrow Cte = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_r = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o r} \quad (2)$$

En al ecuación (2) cuando $r=R_2$, $Vr = V_2$, ya que los potenciales se igualan

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o R_2} = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o R_1}\frac{R_1}{R_2} = V\frac{R_1}{R_2}$$

c) En el interior de la capa esférica el campo es nulo ya que la mencionada capa es conductora.



Calculemos el campo en un lugar en que $R_2 \le r \le R_3$, esto es en el interior de la capa esférica donde el campo es nulo.

$$E \cdot S = \frac{\sum q}{\varepsilon_o} \Rightarrow \quad E = \frac{\sum q}{4\pi\ r^2 \varepsilon_o} = 0 \Rightarrow \quad \sum q = 0$$

Como la carga de la esfera es Q sobre el interior de la capa esférica (radio R_2) aparece una carga –Q, y por influencia aparece en el exterior de la capa esférica una carga +Q.

Calculamos ahora el campo en un lugar donde r>R_3

$$E \cdot S = \frac{\sum q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Q - Q + Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Q}{r^2} = -\frac{dV_r}{dr} \Rightarrow \int - dV_r = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o}\int\frac{dr}{r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_r = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o r} + Cte \Rightarrow \text{cuando } r = \infty, \quad V_r = 0 \rightarrow Cte = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_r = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o r} \quad (3)$$

En la expresión (3) cuando r = R_3 tenemos el potencial en la cara externa de la capa esférica y también la cara interna ya que al ser el campo nulo en su interior su potencial es constante.

Calculamos ahora el campo y el potencial en un lugar en que $R_1 \le r \le R_2$ y siguiendo los pasos ya aplicados anteriormente obtenemos

$$V = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Q}{r} + Cte \quad (4)$$

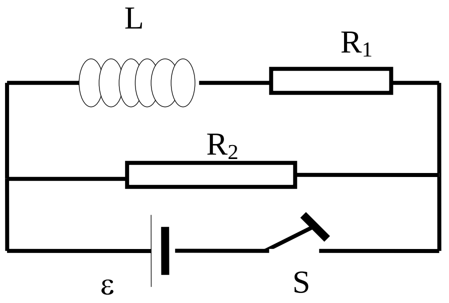
En la ecuación anterior cuando r =R_2 el potencial vale Vr de la ecuación (3) para r =R_3

$$\frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Q}{R_3} = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Q}{R_2} + Cte \quad \Rightarrow \quad Cte = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Volviendo a la ecuación (4) y aplicándola para r =R_1 y designando con V_3 al nuevo potencial

$$V_3 = \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = V - \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) = V - \frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o}\left(\frac{R_3 - R_2}{R_2 R_3}\right)$$

13.- En el circuito de la figura inferior se ha cerrado el interruptor S y se ha establecido la corriente estacionaria. Si ahora se levanta el interruptor, queda desconectada la batería del circuito.
Determinar a partir de ese instante, la cantidad de calor que se desprende en la resistencia R_2.



Cuando S está cerrado y se ha establecido la corriente estacionaria, y se tiene en cuenta que R_1 y R_2 están en paralelo, el valor de la intensidad que circula por la batería es
:

$$\mathbf{I} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sum \mathbf{R}} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\dfrac{\mathbf{R_1 R_2}}{\mathbf{R_1 + R_2}}} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{R_1 + R_2})}{\mathbf{R_1 R_2}}$$

La intensidad de la corriente que atraviesa la resistencia R_1 es: $I_1 = \dfrac{\varepsilon}{R_1}$

La energía almacenada en la autoinducción es:

$$E = \frac{1}{2} L\ I_1^2$$

Al abrir S la energía almacenada en la autoinducción se transforma en energía térmica en cada resistencia. Ahora las resistencias se encuentran en serie.

$$E = \frac{1}{2} L\ I_{1^o}^2 = E_1 + E_2$$

Las energías desprendidas en cada resistencia son proporcionales a sus valores

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad \Rightarrow \quad E_1 = E_2 \frac{R_1}{R_2}$$

$$E = \frac{1}{2} L\ I_1^2 = E_2 \frac{R_1}{R_2} + E_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} L \frac{\varepsilon^2}{R_1^2} = E_2 \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) \Rightarrow \quad E_2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2 L R_2}{R_1^2 (R_1 + R_2)}$$

14.- Un generador de corriente alterna cuya fuerza electromotriz está dada por la expresión $\varepsilon = \varepsilon_o$ sen ω t se une a una autoinducción L sin resistencia óhmica. Determinar cómo varía la intensidad en la autoinducción en función del tiempo.

Al conectar la corriente aparece en la autoinducción una fuerza electromotriz inducida cuyo valor es: $-L\frac{di}{dt}$, por tanto, al no haber resistencia en el circuito i R =0

$$\varepsilon - L\frac{di}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_o \mathrm{sen}\omega\ t - L\frac{di}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int L\ di = \int \varepsilon_o \mathrm{sen}\omega\ t \quad \Rightarrow$$

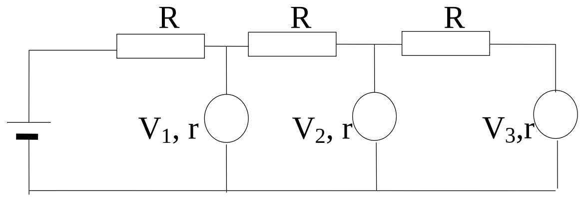
$$\Rightarrow \quad Li = -\frac{\varepsilon_0}{\omega}\cos\omega\ t + Cte$$

Cuando t=0, i =0 luego

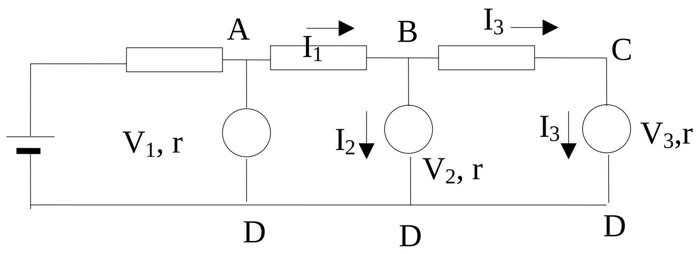
$$Cte = \frac{\varepsilon_o}{\omega}$$

$$i = \frac{\varepsilon_o}{L\omega}(1 - \cos\omega\ t)$$

15.- En el circuito de la figura las resistencias son iguales a R y los voltímetros son idénticos, cada uno con una resistencia interna r. El voltímetro 1 indica 10 V y el 3 marca 8 V. ¿Qué indicará el voltímetro 2?



Establecemos las intensidades en las mallas



$$V_A - V_D = V_1 = I_1R + I_2r \quad ; \quad I_2 = \frac{V_2}{r}$$

$$V_B - V_D = V_2 = I_3R + I_3r \quad ; \quad I_3 = \frac{V_3}{r}$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Combinando la tercera ecuación con la primera y sustituyendo el valor de I_3.

$$V_1 = (I_2 + I_3)R + I_2r = I_2(R + r) + I_3R = V_2\frac{R + r}{r} + \frac{V_3}{r}R \quad (1)$$

A partir de las segundas ecuaciones

$$V_2 = V_3\frac{R}{r} + V_3 \quad (2)$$

Despejamos $\frac{R}{r} = x$ de la ecuación (2) $x = \frac{R}{r} = \frac{V_2 - V_3}{V_3}$ y lo llevamos a la (1)

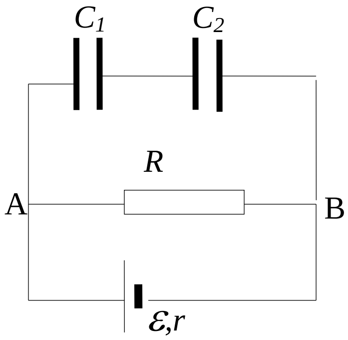
$$V_1 = V_2\frac{R + r}{r} + \frac{V_3}{r}R = V_2(x + 1) + V_3x = V_2\left(\frac{V_2 - V_3}{V_3} + 1\right) + V_3\left(\frac{V_2 - V_3}{V_3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{V_2^2}{V_3} + V_2 - V_3 \Rightarrow V_2^2 + V_2V_3 - V_3^2 - V_1V_3 = 0 \Rightarrow \quad V_2^2 + 8\ V_2 - 64 - 80 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$$V_2 = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 144}}{2} = 8{,}6\ \text{V}$$

16. Calcular en el circuito de la figura la caída de tensión en cada uno de los condensadores. Se sabe que si la resistencia R se cortocircuita, la intensidad que pasa por la batería se triplica respecto a la que pasa por el circuito de la figura.



Designamos con ΔV_1 la caída de tensión en el condensador 1 y con ΔV_2 la caída de tensión en el condensador 2.

$$V_A - V_B = \Delta V_1 + \Delta V_2 = IR = \varepsilon - Ir \quad (1)$$

Los dos condensadores están en serie, por tanto ambos tienen la misma carga en sus armaduras y se cumplirá que

$$q = C_1 \Delta V_1 = C_2 \Delta V_2$$

Si cortocircuitamos la resistencia R poniendo un cable sin resistencia entre Ay B la intensidad de la corriente que atraviesa la batería es 3I

$$3\ I = \frac{\varepsilon}{r} \quad \Rightarrow \quad Ir = \frac{\varepsilon}{3}$$

Sustituyendo en la ecuación (1)

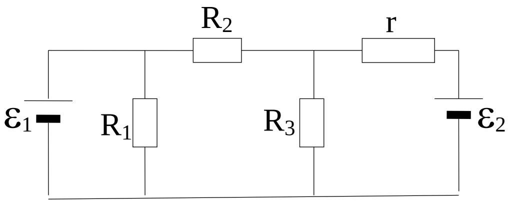
$$V_A - V_B = \Delta V_1 + \Delta V_2 = IR = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}$$

Sustituyendo ΔV_1 y ΔV_2 en función de q y las capacidades de los condensadores, resulta:

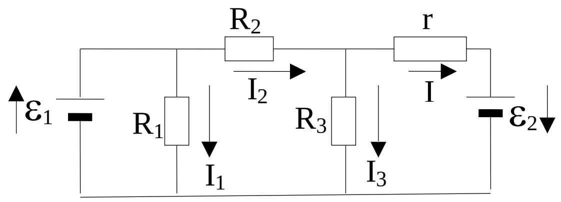
$$\frac{2\varepsilon}{3} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = \frac{q(C_1 + C_2)}{C_1 C_2} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{2\varepsilon}{3} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$\Delta V_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{2\varepsilon}{3} \frac{C_2}{C_1 + C_2} \quad ; \quad \Delta V_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{2\varepsilon}{3} \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

17.- Calcular la intensidad de la corriente que circula por la resistencia r del circuito de la figura inferior. La resistencia interna de las pilas es despreciable.



Admitimos que las fuerzas electromotrices ε son positivas del polo positivo al negativo y establecemos intensidades de corriente en las mallas.



Tomamos como sentido positivo el movimiento de las agujas de un reloj.

Primera malla $\qquad \varepsilon_1 = I_1 R_1 \quad \Rightarrow I_1 = \dfrac{\varepsilon_1}{R_1}$

Segunda malla $\qquad -I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 = 0 \quad \Rightarrow I_2 R_2 = I_1 R_1 - I_3 R_3$

Tercera malla $\qquad Ir - I_3 R_3 = \varepsilon_2 \quad \Rightarrow I_3 = \dfrac{Ir - \varepsilon_2}{R_3}$

Nudo $\qquad I_2 = I_3 + I \quad \Rightarrow I_2 = \dfrac{Ir - \varepsilon_2}{R_3} + I$

Sustituyendo I_1, I_2 e I_3 en la segunda ecuación:

$$\frac{Ir - \varepsilon_2}{R_3} R_2 + IR_2 = \frac{\varepsilon_1}{R_1} R_1 - \frac{Ir - \varepsilon_2}{R_3} R_3 \Rightarrow \quad I\left(\frac{rR_2}{R_3} + R_2 + r\right) - \frac{\varepsilon_2 R_2}{R_3} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I(rR_2 + R_2 R_3 + rR_3) = \varepsilon_1 R_3 + \varepsilon_2 (R_2 + R_3) \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\varepsilon_1 R_3 + \varepsilon_2 (R_2 + R_3)}{r(R_2 + R_3) + R_2 R_3}$$

18.- Una resistencia R y un condensador C pueden colocarse en serie o en paralelo. La impedancia en el primer caso es el doble que en el segundo para una cierta pulsación ω. ¿Cuál es el valor de esa pulsación?

Cuando están colocados en serie la impedancia del circuito es:

$$Z_s = R - \frac{1}{C\omega} i$$

Cuando están colocados en paralelo la impedancia es:

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{R} + \frac{1}{-\frac{1}{C\omega} i} = \frac{1}{R} + C\omega\ i = \frac{1 + RC\omega\ i}{R} \Rightarrow Z_p = \frac{R}{1 + RC\omega\ i} = \frac{R(1 - RC\omega\ i)}{1 + R^2C^2\omega^2}$$

Como $\qquad Z_s = 2Z_p \quad \Rightarrow \quad R - \frac{1}{C\omega} i = \frac{2R}{1 + R^2C^2\omega^2} - \frac{2R^2C\omega\ i}{1 + R^2C^2\omega^2}$

De la igualdad anterior se deduce que las partes reales sean iguales y también las imaginarias

$$R = \frac{2R}{1 + R^2C^2\omega^2} \Rightarrow \quad 1 + R^2C^2\omega^2 = 2 \Rightarrow \quad R^2C^2\omega^2 = 1 \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{RC}$$

$$-\frac{1}{C\omega} = -\frac{2R^2C\omega}{1 + R^2C^2\omega^2} \Rightarrow \quad 2R^2C^2\omega^2 = 1 + R^2C^2\omega^2 \Rightarrow \quad R^2C^2\omega^2 = 1 \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{RC}$$

19.- Se disponen de n pilas iguales, cada una con un fuerza electromotriz ε y una resistencia interna r. Con ellas se forman β grupos cada uno de ellos con α pilas en serie. Los grupos β se asocian en paralelo. El conjunto de pilas se unen a una resistencia externa R. Se piden los valores de α y β para que la intensidad de la corriente que atraviese la resistencia R sea la máxima posible y también el valor de dicha intensidad.

Cada uno de los grupos β tiene una fuerza electromotriz αε. Al ponerlos en paralelo el conjunto tiene esa fuerza electromotriz. Veamos ahora cuál es la resistencia eléctrica del conjunto. Cada grupo β tiene α pilas en serie por tanto la resistencia es αr. Como existen β grupos asociados en paralelo la resistencia total R_e es:

$$\frac{1}{R_e}=\frac{1}{\alpha r}+\frac{1}{\alpha r}+.....=\frac{\beta}{\alpha r} \quad \Rightarrow \quad R_e=\frac{\alpha r}{\beta}$$

En definitiva es como si tuviésemos una pila de fuerza electromotriz αε y una resistencia interna $\frac{\alpha r}{\beta}$, la cual se une a una resistencia externa R. Aplicamos la ley de Ohm generalizada:

$$i=\frac{\alpha \varepsilon}{R+\frac{\alpha r}{\beta}}$$

α y β están relacionadas entre sí : n = αβ ; sustituyendo en la intensidad nos queda

$$i=\frac{\alpha\varepsilon}{R+\frac{\alpha r}{\beta}}=\frac{\alpha\varepsilon}{R+\frac{\alpha^2 r}{n}}=\frac{n\alpha\ \varepsilon}{nR+\alpha^2 r}$$

Como la intensidad es máxima derivamos la función anterior respecto de la variable α e igualamos a cero

$$\frac{di}{d\alpha}=\frac{\left(nR+\alpha^2 r\right)n\varepsilon-n\alpha\ \varepsilon\cdot 2\alpha\ r}{\left(nR+\alpha^2 r\right)^2}=0\Rightarrow \quad nR+\alpha^2 r=2\alpha^2 r\Rightarrow \quad \alpha=\sqrt{\frac{nR}{r}}$$

$$\beta=\frac{n}{\sqrt{\frac{nR}{r}}}=\frac{n\sqrt{r}}{\sqrt{nR}}=\sqrt{\frac{nr}{R}}$$

Para hallar el valor de la intensidad máxima sustituimos los valores de α en la ecuación de la intensidad.

$$i=\frac{n\alpha\ \varepsilon}{nR+\alpha^2 r}=\frac{n\sqrt{\frac{nR}{r}}\cdot\varepsilon}{nR+\frac{nR}{r}\cdot r}=\frac{\varepsilon}{2R}\sqrt{\frac{nR}{r}}=\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{n}{Rr}}$$

Planteamos ahora la siguiente situación. Tenemos 60 pilas de resistencia interna cada una r =1 Ω y las vamos a utilizar todas agrupándolas con distintos valores de α y β. Los casos posibles, con sus resistencias internas de la agrupación son:

α	1	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30	60
β	60	30	20	15	12	10	6	5	4	3	2	1
Ri/Ω	0,016	0,066	0,15	0,266	0,416	0,6	1,66	2,4	3,75	6,66	15	60

Los valores de la resistencia exterior R si coinciden con los de la resistencia interna Ri, darán lugar a máximos de intensidad, por ejemplo si R = 15 Ω, entonces la disposición estaría formada por dos agrupaciones de 30 pilas cada una y ambas colocadas en paralelo Si R esta comprendida entre dos valores de Ri una de las dos proporciona la máxima intensidad o ambas la misma, por ejemplo, si elegimos 5,5 Ω entonces caben dos posibilidades: 4 agrupaciones de 15 pilas o 3 agrupaciones de 20 pilas .La decisión entre las dos depende de la intensidad que proporcionen:

$$i = \frac{\alpha\varepsilon}{R + \frac{\alpha r}{\beta}} = \frac{15\varepsilon}{5{,}5 + \frac{15}{4}} = 1{,}62\varepsilon \quad ; \quad i = \frac{20\varepsilon}{R + \frac{\alpha r}{\beta}} = \frac{20\varepsilon}{5{,}5 + \frac{20}{3}} = 1{,}64\varepsilon$$

Si R> 60 Ω , entonces la máxima intensidad la dará la agrupación en que todas las pilas se dispongan en serie y si R<0,016 Ω la agrupación que dará mayor intensidad es colocar todas las pilas en paralelo.