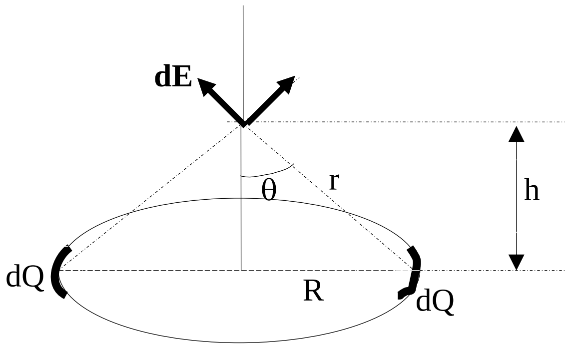
***20.-Un aro (asimilable a una circunferencia de radio R) tiene distribuida de forma uniforme una carga Q. El aro esta situado en el plano XY y el eje Z es perpendicular al plano del anillo y pasa por su centro. Se pide calcular el campo eléctrico $\vec{E}$ en cualquier punto +h del eje Z positivo y determinar el valor de h para el cual el módulo de $\vec{E}$ es el máximo. Dibujar la gráfica de E frente a h cuando R= 10 cm y Q = $10^{-9}$ C***

***Dato*** $\dfrac{1}{4\pi\ \varepsilon_o} = 9.10^9\ Nm^2/C^2$

En la figura inferior se representan los campos que crean dos trozos infinitesimales del aro en un punto +h del eje Z. Se observa que esos campos tienen componentes iguales y opuestas en la dirección del eje X y que, por tanto, al sumar estas componentes se anulan, mientras que las del eje Z tienen la misma dirección y sentido. Luego el campo tiene la dirección positiva del eje Z y es la componente de **dE** sobre el citado eje Z, cuyo valor en módulo es dE cos θ.




$$dE_Z = dE \cdot \cos\theta = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{dQ}{r^2}\cdot\cos\theta$$

El modulo del campo $E_Z$ se obtiene integrando la expresión anterior

$$E_Z = \int_o^Q \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{dQ}{r^2}\cdot\cos\theta = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}\cdot\cos\theta$$

Introduciendo el valor de h .

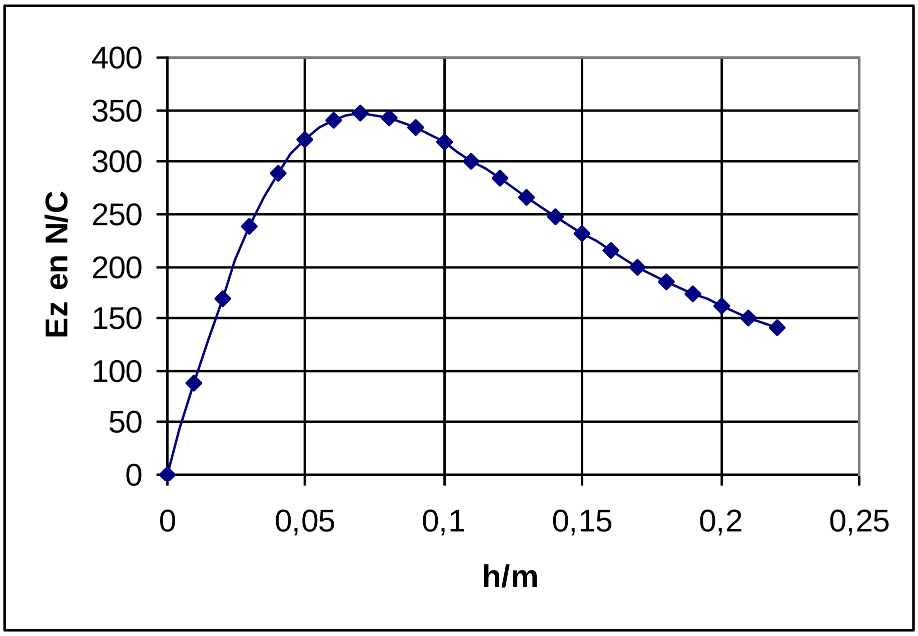
$$r^2 = R^2 + h^2 \qquad ; \qquad \cos\theta = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}$$

$$E_Z = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}\cdot\cos\theta = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Q}{R^2+h^2}\cdot\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Q}{\left(R^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Para hallar el valor de $E_z$ máximo derivamos la anterior función respecto de h e igualamos a cero

$$\frac{dE_Z}{dh}=\frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{\left(R^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}-h\cdot\frac{3}{2}\left(R^2+h^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2h}{\left(R^2+h^2\right)^3}=0\Rightarrow\left(R^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}-3h^2\left(R^2+h^2\right)^{\frac{1}{2}}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad R^2+h^2=3h^2\Rightarrow\quad h=\frac{R}{\sqrt{2}}=\frac{R\sqrt{2}}{2}$$



***21.-a) Calcular la energía que posee una esfera conductora y aislada de radio R y que posee una carga +Q.***
***b) Calcular la energía de dos capas esféricas de pequeño espesor si son concéntricas de radios $R_1$ y $R_2$ , siendo $R_2$>$R_1$, las cuales poseen cargas eléctricas +$Q_1$ y +$Q_2$ ,respectivamente.***

a) Para calcular la energía de la esfera cargada suponemos que ella está inicialmente descargada y nosotros la vamos cargando transportando cargas +dq desde el infinito hasta la esfera.. Cada pequeña carga que llevemos supone un trabajo que hemos de aportar y la suma de todos esos trabajos, hasta cargar la esfera, nos mide la energía que puede almacenar.
Supongamos que en un determinado momento la carga de la esfera es +q y si una carga +dq se traslada desde el infinito a la esfera, el trabajo vale:

$$dW = dq\left(V_{partida} - V_{llegada}\right) = dq\left(V_{\infty} - V_{llegadaa}\right) = dq\left(0 - \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{q}{R}\right)$$

Observe que al ser dq positiva y q también positiva, hemos de hacer un trabajo exterior contra las fuerzas del campo, el cual da lugar a que la esfera adquiera energía.
Para calcular el trabajo total sumamos esos trabajos dW, lo que equivale a integrar la expresión anterior entre los límites cero y Q.

$$W = \int_0^Q -\frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{q\ dq}{R} = -\frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o R}\left.\frac{q^2}{2}\right|_0^Q = -\frac{Q^2}{8\pi\ \varepsilon_o R}$$

La energía de la esfera llamada energía propia vale

$$E_{propia} = \frac{Q^2}{8\pi\ \varepsilon_o R}$$

b) Para este caso supongamos que ambas esferas están descargadas y procedemos a cargar la de radio $R_1$ y cuando ésta tenga la carga $Q_1$, procedemos a cargar la esfera de radio $R_2$.
El cálculo para la esfera interior ya se ha hecho en el apartado a. Para la segunda esfera hay que tener en cuenta que se encuentra a un cierto potencial debido a la influencia de la carga interior $Q_1$ de la esfera interior y que además adquiere otro potencial como consecuencia de la carga q que va a ir adquiriendo, hasta tomar finalmente $Q_2$.

$$dW_2 = dq\left(V_{partida} - V_{llegada}\right) = dq\left(V_{\infty} - V_{llegadaa}\right) = \left(0 - \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Q_1}{R_2} - \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{q}{R_2}\right)dq \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_1 = \int_0^{Q2} -\frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Q_1}{R_2}dq + \int_o^{Q2} -\frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{q\ dq}{R_2} = -\frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Q_1Q_2}{R_2} - \frac{Q_2^2}{4\pi\ \varepsilon_o R_2}$$

La energía almacena por el sistema de las dos esferas, vale:

$$E = \frac{1}{8\pi\ \varepsilon_o}\frac{Q_1^2}{R_1} + \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\frac{Q_1Q_2}{R_2} + \frac{1}{8\pi\ \varepsilon_o}\frac{Q_2^2}{R_2}$$

***22.- Se desea construir un circuito serie LCR de modo que para una frecuencia de 10 kHz, la impedancia del circuito sea 1,3 kΩ, su frecuencia de resonancia 5,0 kHz y la intensidad de la corriente esté retrasada 60º respecto de la tensión.***

***a) Calcular los valores de L, R y C***
***b) Si el voltaje eficaz de la fuente del circuito es 130 V, calcular la intensidad eficaz en el circuito y las tensiones eficaces en cada uno de los elementos***
***c) Calcular la potencia media en el circuito y la potencia media en cada uno de sus elementos.***
***d) Si se mantienen las mismas L, R y C obtenidas en el apartado a), así como el voltaje eficaz, se pide calcular la frecuencia de la corriente alterna para la que la potencia consumida en el circuito sea la máxima posible.***
***e) Determine para que frecuencias la potencia consumida en el circuito es 8 W.***

a) Teniendo en cuenta que la intensidad de la corriente está retrasada respecto del voltaje, esto nos indica que es un circuito en que la reactancia inductiva es mayor que

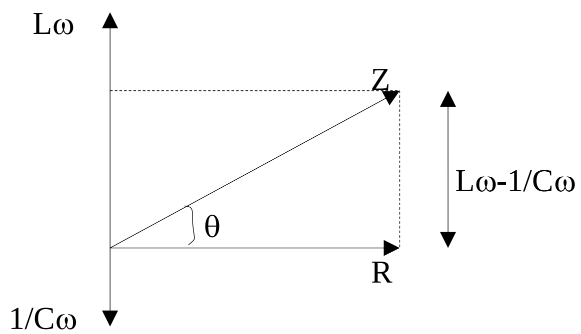



Fig.1

,

la reactancia capacitiva. Un esquema (fig.1), no a escala, nos indica este hecho. De la figura 1 se deduce

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad ; \quad \left(1{,}3.10^3\right)^2 = R^2 + \left(L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)^2 \quad (1)$$

$$\mathrm{tag}\theta = \frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R} = \mathrm{tag}\ 60º \quad (2)$$

La resonancia ocurre cuando

$$L\omega_R = \frac{1}{C\omega_R} \Rightarrow L = \frac{1}{C\omega_R^2} = \frac{1}{C4\pi^2\left(5{,}0.10^3\right)^2} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1{,}013.10^{-9}}{C} \quad (3)$$

Combinando las ecuaciones (1) y (2).

$$\left(1{,}3.10^3\right)^2 - R^2 = (R\cdot \mathrm{tag}\ 60)^2 \Rightarrow 1{,}69.10^6 = R^2\left(1+\mathrm{tag}^2 60\right) \Rightarrow R = \sqrt{\frac{1{,}69.10^6}{4}} = 650\ \Omega$$

Combinando (3) con (2).

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = R\cdot \mathrm{tag}\ 60^{\circ} \Rightarrow \frac{1{,}013.10^{-9}\cdot\omega}{C} - \frac{1}{C\omega} = 650\cdot \mathrm{tag}\,60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}013.10^{-9}\cdot\omega^2 - 1 = 650\cdot \mathrm{tag}\,60\cdot C\omega \Rightarrow C = \frac{1{,}013.10^{-9}\cdot 4\pi^2\cdot\left(10^4\right)^2 - 1}{650\cdot \mathrm{tag}60\cdot 2\pi\pi 1^4} = 4{,}2.10^{-8}\,F$$

De la ecuación (3)

$$L = \frac{1{,}03.10^{-9}}{4{,}2.10^{-8}} = 0{,}025H$$

b)

$$I_{efz} = \frac{V_{efz}}{Z} = \frac{130}{1{,}3.10^3} = 0{,}10A$$

En la resistencia $V_{efz}^R = I_{efz}\cdot R = 0{,}10\cdot 650 = 65V$

En el condensador $V_{efz}^C = I_{efz}\cdot\frac{1}{C2\pi\cdot f} = 0{,}10\cdot\frac{1}{4{,}2.10^{-8}\cdot 2\pi\cdot 10^4} = 37{,}9V$

En la autoinducción $V_{efz}^L = I_{efz}\cdot L2\pi\cdot f = 0{,}10\cdot 0{,}025\cdot 2\pi\cdot 10^4 = 157V$

c) Potencia media en el circuito

$$\langle P\rangle = I_{efz}V_{efz}\cos\theta = 0{,}10\cdot 130\cdot\cos 60 = 6{,}5\ \ W$$

Potencia media en la resistencia

$$\langle P\rangle_R = I_{efz}^2 R = 0{,}1^2\cdot 650 = 6{,}5W$$

Las potencias medias tanto en el condensador como en la bobina son nulas.

d)

$$\langle P\rangle = I_{efz}V_{efz}\cos\theta = \frac{V_{efz}}{Z}V_{efz}\frac{R}{Z} = V_{efz}^2\frac{R}{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Para que la potencia sea máxima el denominador debe ser mínimo y eso ocurre cuando $L\omega = \frac{1}{C\omega}$, lo que significa que el circuito está en resonancia, la frecuencia de resonancia es un dato del problema y es 5 kHz.

La potencia media máxima vale:

$$\langle P_{max} \rangle = I_{efz} V_{efz} = 0{,}1 \cdot 130 = 13\,W$$

e)

$$\langle P \rangle = 8 = I_{efz} V_{efz} \cos\theta = 0{,}10 \cdot 130 \cdot \cos\theta \;\Rightarrow\; \cos\theta = \frac{8}{13}$$

Para el valor del coseno anterior existen dos soluciones $\theta = 52^{o}$ y $\theta = -52^{o}$. Para el primer valor en el circuito predomina la reactancia inductiva (como se observa en la figura1), para el segundo valor de θ predomina la reactancia capacitiva.

En el primer caso

$$\cos\theta = \frac{8}{13} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{64}{169} = \frac{R^2}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; 64R^2 + 64\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = 169R^2 \Rightarrow 1{,}64 * 650^2 = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \Rightarrow 832 = L\omega - \frac{1}{C\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow LC\omega^2 - 832C\omega - 1 = 0 \Rightarrow 1{,}05.10^{-9}\omega^2 - 3{,}49.10^{-5}\omega - 1 = 0 \Rightarrow \omega = 51670 = 2\pi f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = 8{,}2\,kHz$$

En el segundo caso, cuando θ = -52º, la reactancia capacitiva es mayor que la reactancia inductiva (fig.2).

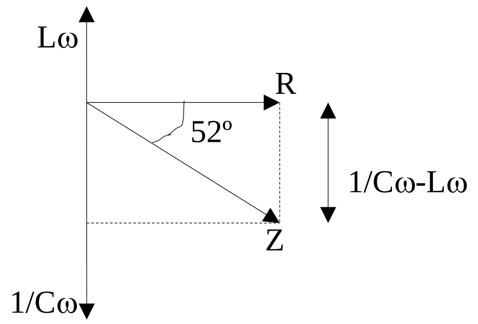



Fig.2

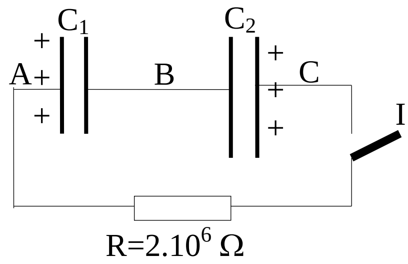
$$\cos\theta = \frac{8}{13} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{64}{169} = \frac{R^2}{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; 64R^2 + 64\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 = 169R^2 \Rightarrow 1{,}64 * 650^2 = \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 \Rightarrow 832 = \frac{1}{C\omega} - L\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow LC\omega^2 + 832C\omega - 1 = 0 \Rightarrow 1{,}05.10^{-9}\omega^2 + 3{,}49.10^{-5}\omega - 1 = 0 \Rightarrow \quad \omega = 18429 = 2\pi f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = 2{,}9\,kHz$$

***23.- Un condensador $C_1$ tiene una capacidad de $5.10^{-12}$ F y se carga a una diferencia de potencial de 60 V. Un segundo condensador $C_2$ tiene una capacidad de $80.10^{-12}$ F y se carga a una tensión de 15 V. Una vez cargados los condensadores se monta el circuito indicado en la figura inferior.***




***a) Calcular la carga y la energía almacenada en cada condensador.***
***b) Se cierra el interruptor I, calcular la intensidad que circula por el circuito en el instante del cierre***
***c) Calcular la carga de cada condensador cuando no circule corriente por el circuito***
***d) Determinar la expresión matemática que indica cómo varía la intensidad de la corriente en el circuito durante el periodo transitorio.***
***e) Calcular la energía perdida por los condensadores durante el proceso.***

a)
$$Q_1 = C_1V_1 = 5.10^{-12}\cdot 60 = 3.10^{-10}\,C \;;\; Q_2 = C_2V_2 = 80.10^{-12}\cdot 15 = 12.10^{-10}\,C$$
$$E_1 = \frac{1}{2}C_1V_1^2 = \frac{1}{2}5.10^{-12}\cdot 60^2 = 9.10^{-9}\,J \;;\; E_2 = \frac{1}{2}C_2V_2^2 = \frac{1}{2}80.10^{-12}\cdot 15^2 = 9.10^{-9}\,J$$

b) En el instante de cerrar el interruptor el circuito se compone como si tuviese una fuente de 60 V y otra de 15 en sentido opuesto; aplicando la ley de Ohm generalizada

c)

$$I_o = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{\frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2}}{R} = \frac{60-15}{2.10^6} = 2{,}25.10^{-5}\,A$$

c) De acuerdo con la figura del enunciado escribimos

$$V_A - V_B = 60V \;;\; V_C - V_B = 15V \Rightarrow V_A - V_C = 45V$$

Como $V_A$ es mayor que $V_C$ el condensador $C_1$ comenzará a perder carga que será ganada por el condensador $C_2$ , esto durará hasta que $(V_A = V_C)_{final}$ , esto es, $V_{Af} - V_{Cf} = 0$.

Llamamos θ a la carga perdida por $C_1$, que es la ganada por $C_2$.

$$V_{Af}-V_{Bf}=\frac{Q_1-\theta}{C_1}\,;V_{Cf}-V_{Bf}=\frac{Q_2+\theta}{C_2}\Rightarrow V_{Af}-V_{Bf}-\left(V_{Cf}-V_{Bf}\right)=\frac{Q_1-\theta}{C_1}-\frac{Q_2+\theta}{C_2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{Af}-V_{Cf}=0=\left(3.10^{-10}-\theta\right)\cdot 80.10^{-12}=\left(12.10^{-10}+\theta\right)\cdot 5.10^{-12}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 240.10^{-10}-80\theta=60.10^{-10}+5\theta\quad\Rightarrow\quad\theta=\frac{180.10^{-10}}{85}=2{,}12.10^{-10}\,C$$

$$Q_{1f}=Q_1-\theta=3.10^{-10}-2{,}12.10^{-10}=0{,}88.10^{-10}\,C\ ;$$
$$Q_{2f}=Q_2-\theta=12.10^{-10}-2{,}12.10^{-10}=14{,}12.10^{-10}\,C$$

c) En el instante inicial la intensidad de la corriente es $I_o$, a medida que transcurre el tiempo la intensidad disminuye hasta anularse.
Designamos con i a la intensidad un tiempo t después de cerrar el interruptor, y con q a la carga que hasta ese momento ha pasado del condensador $C_1$ al $C_2$. La intensidad i es el cociente entre los voltajes de los condensadores divididos por la resistencia R del circuito

$$i=\frac{\frac{Q_1-q}{C_1}-\frac{Q_2+q}{C_2}}{R}=\frac{\frac{Q_1}{C_1}-\frac{Q_2}{C_2}-q\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)}{R}=\frac{V_1-V_2-q\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)}{R}$$

Según hemos visto $I_o=\frac{V_1-V_2}{R}$ y $\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{1}{C_e}$, siendo Ce la capacidad

equivalente al conjunto de los dos condensadores

$$i=\frac{I_o-\frac{q}{C_e}}{R}$$

De la expresión anterior calculamos la variación de i con el tiempo

$$\frac{di}{dt}=d\left(\frac{I_o-\frac{q}{C_e}}{R}\right)=-\frac{dq}{dt}\cdot\frac{1}{RC_e}$$

Como $\frac{dq}{dt}=i$, resulta:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{i}{RC_e} \Rightarrow \int \frac{di}{i} = \int -\frac{dt}{RC_e} \Rightarrow \ln i = -\frac{1}{RC_e}t + Cte,\ \text{cuando}\ t = 0,\ Cte = \ln I_o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\frac{i}{I_o} = -\frac{1}{RC_e}t \quad \Rightarrow \quad i = I_o e^{-\frac{1}{RC_e}t}$$

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{5.10^{-12}} + \frac{1}{80.10^{-12}} = \frac{17}{80.10^{-12}} \Rightarrow Ce = 4{,}71.10^{-12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad C_e R = 4{,}71.10^{-12} \cdot 2.10^{6} = 9{,}4.10^{-6}\,s^{-1} \Rightarrow \frac{1}{C_e R} = 1{,}06.10^{5}$$

$$i = 2{,}25.10^{-5}\,e^{-1{,}06.10^{5}\cdot t}$$

e) La energía que almacenan los condensadores al final es:

$$E_{1f} = \frac{1}{2}C_1 V_{1f}^2 + \frac{1}{2}C_2 V_{2f}^2 = \frac{1}{2}\frac{Q_{1f}^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_{2f}^2}{C_2} = \frac{1}{2}\frac{\left(0{,}88.10^{-10}\right)^2}{5.10^{-12}} + \frac{1}{2}\frac{\left(14{,}12.10^{-10}\right)^2}{80.10^{-12}}$$

$$E_{1f} = 1{,}32.10^{-8}\,J$$

La energía contenida en los condensadores al principio era $18.10^{-9}$ J.

La energía disipada es:

$$\Delta E = 18.10^{-9} - 1{,}32.10^{-8} = 4{,}8.10^{-9}\,J$$

***24.- La superficie de una de las armaduras de un condensador plano vale S=1 cm² y la distancia entre las armaduras d = 0,1 mm. La diferencia de potencial entre las armaduras ΔV = 2,5 V. Calcular:***

***a) El campo eléctrico entre las armaduras, la carga de una de las armaduras y la energía almacenada en el condensador.***

***b) Si se mantiene la carga de las armaduras y se aumenta la distancia entre ellas en $10^{-6}$ m, calcular la variación que experimenta la diferencia de potencial en el condensador.***

***c) Se une el condensador a una pila de 2,5 V, lo que permite mantener fija la diferencia de potencial entre las armaduras, y si una de ellas efectúa un movimiento vibratorio armónico de f = $10^5$ Hz y amplitud $10^{-6}$ m, de tal modo que la vibración acerca y aleja a la armadura vibrante de la fija, determinar:***

***d) La carga de cada armadura en función del tiempo y la intensidad de la corriente que circula por el circuito.***

a) El campo, al ser uniforme entre las armaduras del condensador, está relacionado con la diferencia de potencial por la ecuación

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{2{,}5\,V}{0{,}1.10^{-3}\,m} = 2{,}5.10^{4}\frac{V}{m}$$

Para calcular la carga de una de las armaduras hacemos uso de la relación

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \;\Rightarrow\; Q = C\Delta V = \frac{\varepsilon_o S}{d}\Delta V = \frac{1}{4\pi\cdot 9.10^{9}}\cdot\frac{1.10^{-4}}{0{,}1.10^{-3}}\cdot 2{,}5 = 2{,}21.10^{-11}\,C$$

$$E = \frac{1}{2}C\,\Delta V^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon_o S}{d}\cdot\Delta V^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1.10^{-4}}{4\pi\cdot 9.10^{9}\cdot 0{,}1.10^{-3}}\cdot 2{,}5^2 = 2{,}76.10^{-11}\,J$$

b) Al aumentar la distancia entre las armaduras y permanecer constante la carga de las armaduras, la nueva capacidad es:

$$C' = \frac{\varepsilon_o S}{d+10^{-6}} \;\Rightarrow\; \Delta V' = \frac{Q}{C'} = \frac{C\Delta V}{C'} = \frac{\frac{\varepsilon_o S}{d}}{\frac{\varepsilon_o S}{d+10^{-6}}}\cdot\Delta V = \frac{d+10^{-6}}{d}\cdot\Delta V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta V' - \Delta V = \Delta V\left(\frac{d+10^{-6}}{d} - 1\right) = 2{,}5\cdot\left(\frac{0{,}1.10^{-3}+10^{-6}}{0{,}1.10^{-3}} - 1\right) = 0{,}025\ V$$

c) Suponemos que cuando t=0 la distancia entre las armaduras es d, al variar la distancia entre las armaduras varía la capacidad del condensador, aunque la batería mantiene la diferencia de potencial de 2,5 V. La distancia entre las armaduras en función del tiempo es $d' = d + A\ \mathrm{sen}\, 2\pi f\, t$ y la capacidad del condensador y la carga de una de sus armaduras

$$C = \frac{\varepsilon_o S}{d + A\ \mathrm{sen}\, 2\pi f\, t} = \frac{Q}{2,5} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{2,5\varepsilon_o S}{d + A\ \mathrm{sen}\, 2\pi f\, t}$$

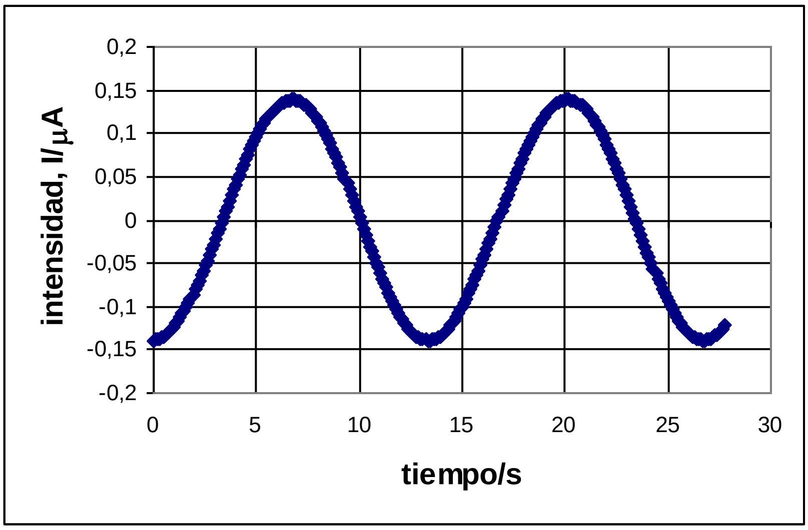
La carga es función del tiempo, por tanto, cuando la carga disminuya la batería le suministra corriente al condensador y cuando la carga aumente el condensador suministra corriente, en definitiva en el circuito eléctrico aparece una corriente variable, cuyo valor es.

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2,5\varepsilon_o S}{d + A\,\mathrm{sen}\, 2\pi f\, t}\right) = 2,5\varepsilon_o S\left[\frac{-A\cdot 2\pi f\cdot \cos 2\pi f\, t}{\left(d + A\,\mathrm{sen}\, 2\pi f\, t\right)^2}\right] \Rightarrow$$

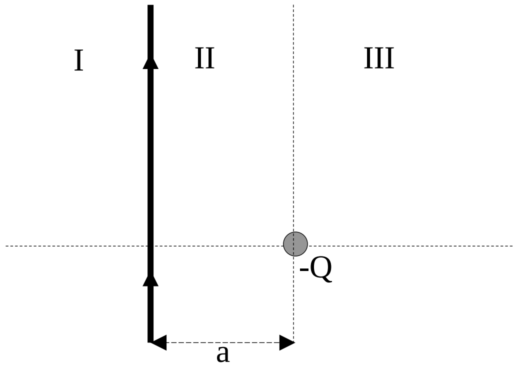
$$I(t) = \frac{2,5\cdot 10^{-4}}{4\pi\cdot 9.10^{9}}\left[\frac{-10^{-6}\cdot 2\pi 10^{5}\cdot \cos 2\pi 10^{5}\, t}{\left(0,1.10^{-3} + 10^{-6}\mathrm{sen}\, 2\pi 10^{5}\, t\right)^2}\right] = -\frac{1,57.10^{-4}\cos 2\pi 10^{5}\, t}{36\pi\cdot 10^{9}\cdot 10^{-6}\left(0,1 + 10^{-3}\mathrm{sen}\, 2\pi 10^{5}\, t\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(t) = -\frac{1,388.10^{-9}\cos 2\pi 10^{5}\, t}{\left(0,1 + 10^{-3}\mathrm{sen}\, 2\pi 10^{5}\, t\right)^2}$$

La representación gráfica de la función anterior es:



***25.- Un hilo de longitud infinita posee una carga positiva por unidad de longitud λ, a una distancia mínima a de ese hilo existe una carga puntual –Q y ambos yacen en el plano XY. En la figura se observa su disposición y las tres regiones del plano designadas con I, II y III. Se pide determinar en qué regiones puede ser el campo eléctrico nulo y cuáles son sus posiciones.***




En primer lugar determinamos cuál es el campo creado por un hilo de longitud infinita y con densidad lineal de carga +λ

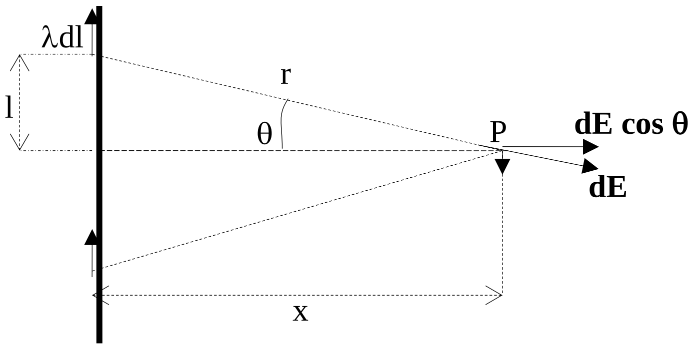



Fig.1

Consideramos un punto cualquiera del plano XY que se designa con P y que dista una distancia x del hilo. Sobre éste aparece un elemento de longitud dl que posee una carga positiva λ dl y que en el punto P crea un campo **dE .** Este vector campo tiene dos componentes una horizontal **dE cos θ** y otra vertical **dE sen θ.** El módulo de dE vale:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda\, dl}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda\, dl}{\left(\frac{x}{\cos\theta}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda \cos^2\theta\, dl}{x^2}$$

De la figura 1 se deduce:

$$\tan\theta = \frac{l}{x} \Rightarrow dl = x\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot d\theta$$

Llevando el valor de dl a la ecuación de dE

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda\cos^2\theta\, dl}{x} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o x^2}\, d\theta$$

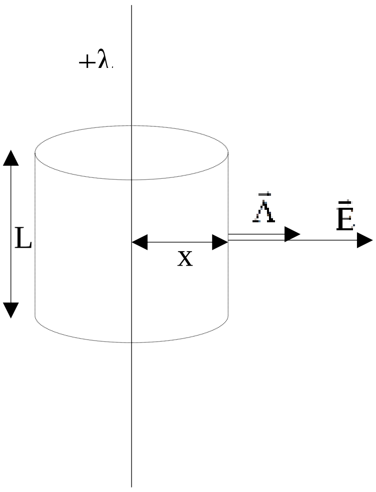
Si volvemos a la figura 1 observamos que para el elemento dl considerado existe otro situado simétricamente sobre la línea a que crea un campo en que la componente horizontal se suma y la vertical se anula, en consecuencia el campo en P tiene la dirección horizontal ( por tanto perpendicular al hilo) y dirigido hacia fuera del hilo. Designamos a este campo con $dE_P = dE \cos\theta$

$$dE_P = dE\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o x}\cos\theta\, d\theta$$

Para calcular $E_p$ hemos de sumar las contribuciones de todos los elementos dl .

$$E_P = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o x}\cos\theta\, d\theta = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_o x}\left|\mathrm{sen}\theta\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o x}$$

Aplicando el teorema de Gauss se resuelve con rapidez, dado que la distribución del campo tiene simetría cilíndrica.




El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada que contiene cargas en su interior es igual a la suma de las cargas dividido por la constante dieléctrica del medio $\varepsilon_o$. Debido a la simetría cilíndrica del campo tomaremos como superficie de Gauss un cilindro de eje en la línea de carga, altura L y radio, la distancia x a la línea.

$$\Phi = \Phi_{Lateral} + \Phi_{base} + \Phi_{tapa} = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

Como el flujo es $\Phi = \vec{E}\cdot\vec{A} = E\cdot A\cos\alpha$ ; en la base y en la tapa es nulo puesto que $\cos\alpha = \cos 90^o = 0$ y todo el flujo sale por la superficie lateral.

$$\Phi = \Phi_{Lateral} = E\cdot A\cos 0 = \frac{q}{\varepsilon_o} \; ; \qquad \Phi = E\cdot 2\pi x L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_o} ; \qquad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o x}$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en una región es la suma vectorial de los campos existentes. En la región I es posible que el campo se anule porque $E_P$ y $E_Q$ tienen la misma dirección y sentidos opuestos y además debe ser en algún lugar de la recta perpendicular al hilo y que pase por la carga Q. En la región II es imposible que el campo sea nulo ya que ambos campos tienen la misma dirección y sentido y en la III es posible que sí lo sea, porque los campos tienen la misma dirección pero distinto sentido.

La figura 2 aclara la dirección y sentido de los campos
.

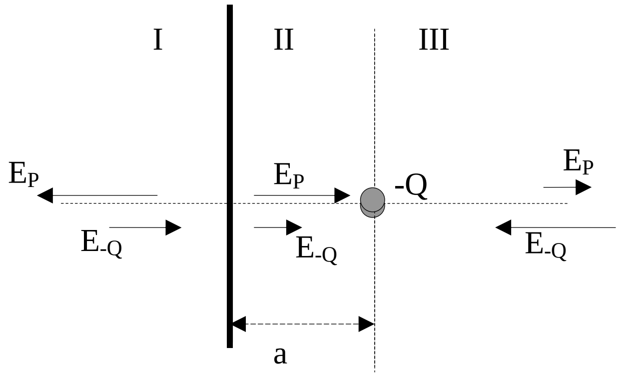



Fig. 2

*Región I*

Llamamos x a la distancia que existe desde el hilo al punto donde se anulan los campos

$$E_P = E_{-Q} \Rightarrow \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{(a+x)^2} \Rightarrow \frac{\lambda}{x} = \frac{1}{2}\frac{Q}{a^2+x^2+2ax} \Rightarrow a^2+x^2+2ax = \frac{xQ}{2\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + x\left(2a - \frac{Q}{2\lambda}\right) + a^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{\left(\frac{Q}{2\lambda}-2a\right) \pm \sqrt{\left(2a-\frac{Q}{2\lambda}\right)^2 - 4a^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\left(\frac{Q}{2\lambda}-2a\right) \pm \sqrt{4a^2+\frac{Q^2}{4\lambda^2}-\frac{2aQ}{\lambda}-4a^2}}{} \Rightarrow \qquad x = \frac{\left(\frac{Q}{2\lambda}-2a\right) \pm \sqrt{\frac{Q}{\lambda}\left(\frac{Q}{4\lambda}-2a\right)}}{2}$$

Para que exista valor de x, la raíz cuadrada debe ser de un número positivo, por tanto

$$\frac{Q}{4\lambda} - 2a \ge 0 \quad \Rightarrow \frac{Q}{4\lambda} \ge 2a \quad \Rightarrow \quad Q \ge 8a\lambda \quad (1)$$

Si $Q = 8\,a\,\lambda$, existe ***un sólo valor de x***, si $Q > 8\,a\,\lambda$ existirán ***dos valores de x,*** lo cual requiere que

$$\left(\frac{Q}{2\lambda}-2a\right)^2 > \frac{Q^2}{4\lambda^2}-\frac{2aQ}{\lambda} \Rightarrow \frac{Q^2}{4\lambda^2}+4a^2-\frac{2aQ}{\lambda} > \frac{Q^2}{4\lambda^2}-\frac{2aQ}{\lambda} \Rightarrow 4a^2 > 0$$

Como a es una distancia se cumple la condición y existen dos soluciones.

La figura 3 representa el campo E (escala arbitraria) en la zona I cuando solamente hay una solución

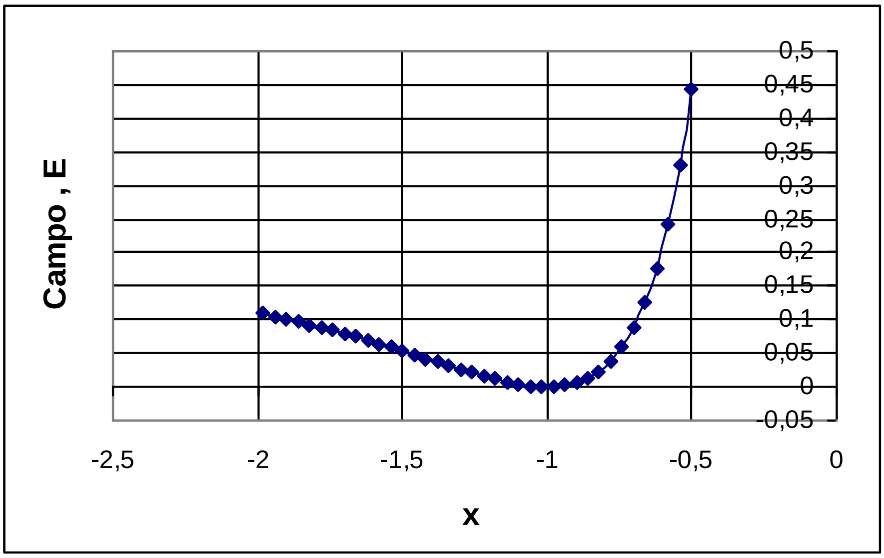



Fig.3

La figura 4 representa el campo cuando hay dos soluciones.

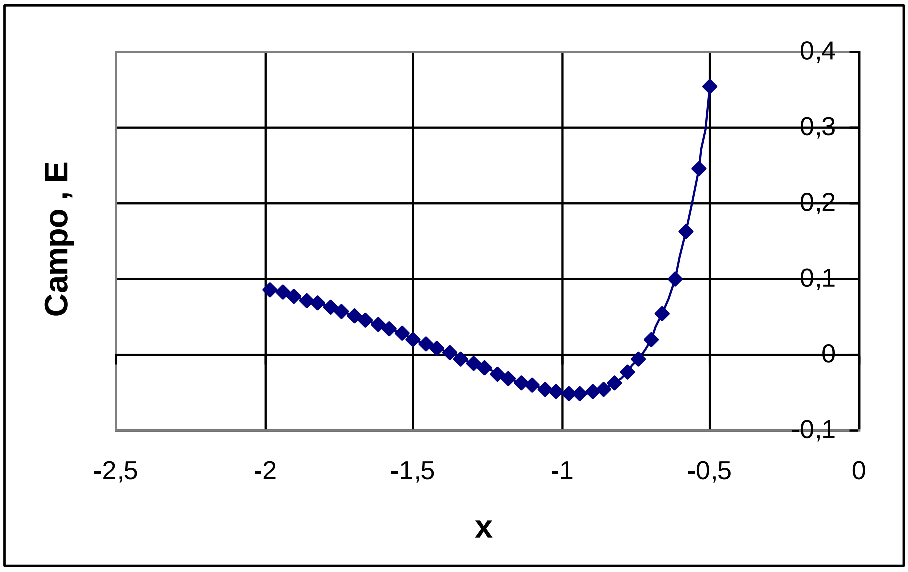



Fig.4

Zona III

$$E_P = E_{-Q} \Rightarrow \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{(x-a)^2} \Rightarrow \frac{\lambda}{x} = \frac{1}{2}\frac{Q}{x^2+a^2-2ax} \Rightarrow x^2+a^2-2ax = \frac{xQ}{2\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x\left(2a+\frac{Q}{2\lambda}\right)+a^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{\left(2a+\frac{Q}{2\lambda}\right) \pm \sqrt{\left(2a+\frac{Q}{2\lambda}\right)^2 - 4a^2}}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\left(2a+\frac{Q}{2\lambda}\right) \pm \sqrt{4a^2+\frac{Q^2}{4\lambda^2}+\frac{2aQ}{\lambda}-4a^2}}{} \Rightarrow \qquad x = \frac{\left(2a+\frac{Q}{2\lambda}\right) \pm \sqrt{\frac{Q}{\lambda}\left(\frac{Q}{4\lambda}+2a\right)}}{2}$$

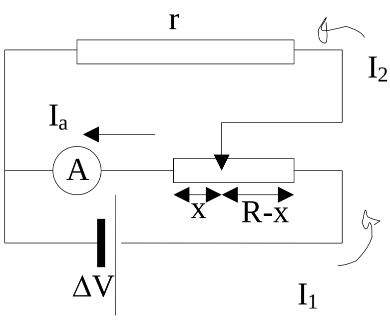
Si Q = 8 a $\lambda$ entonces. $x = \frac{6a \pm \sqrt{8a(2a+2a)}}{2} = \frac{6a \pm a\sqrt{32}}{2} = 3a \pm 2a\sqrt{2}$ , existen dos soluciones en la zona III., 5,83 a y 0,17 a.

Si Q > 8 a $\lambda$ habrá dos soluciones si

$$\left(2a+\frac{Q}{2\lambda}\right)^2 > \frac{Q}{\lambda}\left(\frac{Q}{4\lambda}+2a\right) \Rightarrow \quad 4a^2+\frac{Q^2}{4\lambda^2}+\frac{2aQ}{\lambda} > \frac{Q^2}{4\lambda^2}+\frac{2aQ}{\lambda} \Rightarrow \quad 4a^2 > 0$$

Como se cumple la condición existen dos posiciones en la zona III donde se anula el campo.

***26.-En el circuito de la figura inferior A es un amperímetro sin resistencia interna. La resistencia total del reóstato es R y la batería mantiene una diferencia de potencial ΔV=10V, constante, siendo su resistencia interna despreciable.***
***a) Calcular la intensidad de la corriente $I_a$ que pasa por el amperímetro en función de la posición del cursor sobre el reóstato***
***b) Dibujar las curvas $I_a$ frente a x cuando R = 10 Ω y r =1Ω y 0,5 Ω ,***
***c) Calcular matemáticamente cuando la intensidad $I_a$ es mínima.***




a) Aplicamos las leyes de Kirchoff a un nudo, a la malla total y a la malla superior. En la figura x representa la resistencia que existe entre un extremo del reóstato y el amperímetro. $I_1$ la intensidad que pasa por la batería, $I_2$ la que pasa por la resistencia r y $I_a$ la que pasa por el amperímetro

$$I_1 = I_2 + I_a$$
$$I_1(R-x) + I_2 r = \Delta V$$
$$I_2 r - I_a x = 0$$

De la tercera ecuación despejamos $I_2$ y la llevamos a la primera

$$I_2 = \frac{I_a x}{r} \;;\; I_1 = \frac{I_a x}{r} + I_a$$

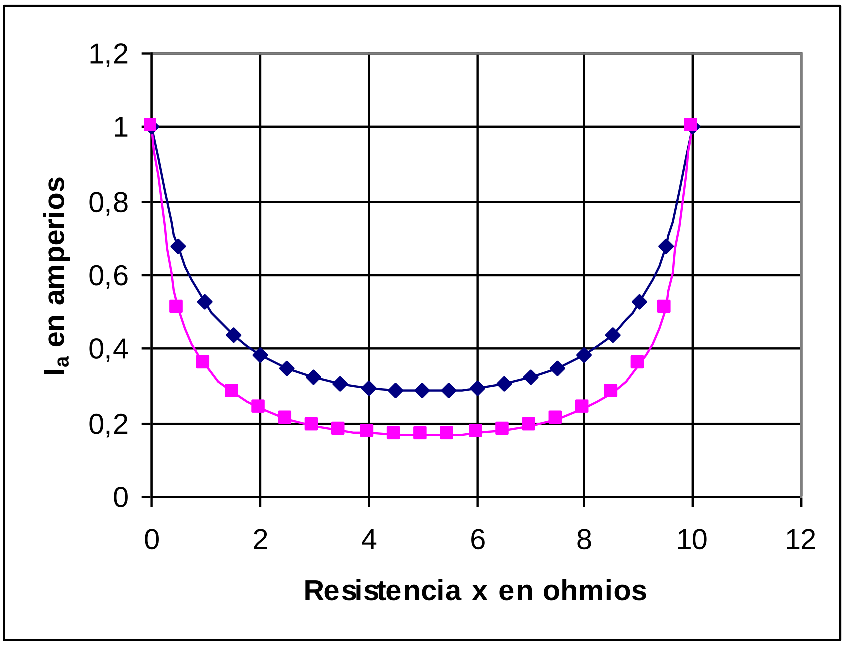
Las dos últimas ecuaciones se combinan con la segunda

$$\left(I_a \frac{x}{r} + I_a\right)(R-x) + I_a \frac{x}{r} r = \Delta V \Rightarrow I_a x \frac{R}{r} - I_a \frac{x^2}{r} + I_a R - I_a x + I_a x = \Delta V \Rightarrow$$

$$I_a Rx - I_a x^2 + I_a Rr = \Delta V \cdot r \quad \Rightarrow \quad I_a = \frac{\Delta V \cdot r}{x(R-x) + Rr} \quad (1)$$

Sustituyendo valores numéricos en la ecuación (1)

$$I_a = \frac{10}{x(10-x)+10} \quad y \quad I_a = \frac{5}{x(10-x)+5}$$




c) Las gráficas nos indican que existe un mínimo de corriente,. Para calcular ese mínimo derivamos la ecuación (1) respecto de x e igualamos a cero.

$$\frac{dI_a}{dx} = \frac{-\Delta V \cdot r(R-2x)}{[x(R-x)+Rr]^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R-2x=0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{R}{2}$$

Cuando el cursor se encuentra justamente en la mitad del reóstato es cuando la intensidad que pasa por el amperímetro es mínima.

***27.-En los vértices opuestos de un cuadrado de lado $L=10^{-3}$ m, están situados dos protones y en los otros vértices dos positrones. Si el sistema se deja en libertad calcular aproximadamente las velocidades de las partículas cuando estén muy separadas entre sí.***
***Datos. Masa del protón $1{,}7.10^{-27}$ kg , masa del positrón $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg Según al ley de Coulomb la fuerza entre dos partículas cualesquiera de las citadas y situadas a una distancia r , vale: $\frac{2{,}3.10^{-28}}{r^2}$ N .***

En la figura 1 se han dibujado las fuerzas que actúan sobre cada una de las partículas cuando se encuentran en los vértices del cuadrado

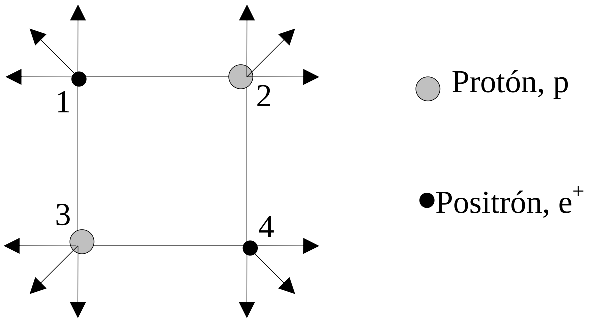



Fig.1

En cuanto el sistema se deje en libertad las partículas se alejarán entre sí, adquiriendo cada una de ellas energía cinética, la cual proviene de la energía potencial electrostática del sistema formado por las cuatro partículas cuando se encuentran en los vértices del cuadrado.
Para obtener la energía potencial eléctrica, iremos calculando el trabajo necesario para ubicar las partículas en los vértices, teniendo en cuenta que vienen desde el infinito donde la energía potencial es nula.
Recordemos que la expresión del trabajo es:

$$W = q(\text{Potencial de partida} - \text{Potencial de llegada})$$

Siendo q la carga transportada. Para llevar el positrón 1 al vértice, el potencial de partida y de llegada son nulos luego lo es el trabajo. Para llevar el protón 2 a una distancia L del positrón el trabajo vale:

$$W_I = q\left(0 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{L}\right) = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{L}$$

Para llevar el protón 3 al vértice que dista L del positrón 1 y $\sqrt{2}L$ del otro protón el trabajo vale:

$$W_{II} = q\left(0 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{L} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{L\sqrt{2}}\right) = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o L}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Finalmente para llevar el positrón 4 a su vértice

$$W_{II} = q\left(0 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{L} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{L\sqrt{2}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{L}\right) = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o L}\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

El trabajo total es la suma de los trabajos parciales

$$W = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o L}\left(4 + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \qquad E_P = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o L}\left(4 + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

*Una alternativa más rápida para el cálculo de la energía potencial electrostática del sistema, consiste en sumar las energías potenciales de todas las parejas que pueden formarse sin repetir ninguna, así: la carga 1 con la 2, más la carga 1 con la 3, más la carga 1 con la 4; más la carga 2 con la 3 + la carga 2 con la 4; más la carga 3 con la 4. Todo se recoge en la ecuación:*

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{i=1}^{4}\frac{q_i \cdot q_j}{r_{ij}} \qquad \text{con } i \neq j$$

*En nuestro caso $q_i = q_j = q$ el lado es L y la diagonal* $L\sqrt{2}$

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{2qq}{L} + \frac{qq}{L\sqrt{2}} + \frac{qq}{L} + \frac{qq}{L\sqrt{2}} + \frac{qq}{L}\right] = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o L}\left[4 + \sqrt{2}\right]$$

De acuerdo con la ley de Coulomb y el dato del problema

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{r^2} = \frac{2{,}3.10^{-28}}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o} = 2{,}3.10^{-28}$$

La energía potencial eléctrica es: $E_P = \frac{2{,}3.10^{-28}}{L}\left(4 + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$

Cuando las partículas se dejan en libertad los dos positrones tendrán la misma energía y lo mismo le ocurrirá a los protones. Dado que cada protón tiene 1868 veces la masa de un positrón, resultará que los positrones cuando están muy alejados de la posición original los protones apenas se habrán distanciado entre sí.
Aproximadamente, de forma razonable suponemos, que cuando los positrones estén muy alejados, los protones están prácticamente en la misma posición inicial, esto es, a una distancia entre sí de $L\sqrt{2}$ . En estas condiciones la energía potencial eléctrica de los dos protones es:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{L\sqrt{2}} = \frac{2{,}3.10^{-28}}{L\sqrt{2}}$$

La energía que se han llevado los positrones es: la inicial del sistema menos la que tienen los protones

$$E_P = \frac{2{,}3.10^{-28}}{L}\left(4+\frac{2}{\sqrt{2}}\right) - \frac{2{,}3.10^{-28}}{L\sqrt{2}} = \frac{2{,}3.10^{-28}}{L}\left(4+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Esta energía se la reparten por igual entre los dos positrones y se ha convertido en energía cinética

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2{,}3.10^{-28}}{L}\left(4+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}m_{e+}v_{e+}^2 \Rightarrow v_{e+} = \sqrt{\frac{2{,}3.10^{-28}}{10^{-3}\cdot 9{,}1.10^{-31}}\left(4+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 1{,}1.10^3\,\frac{m}{s}$$

Para los dos protones

$$\frac{1}{2}\frac{2{,}3.10^{-28}}{L\sqrt{2}} = \frac{1}{2}m_p v_p^2 \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2{,}3.10^{-28}}{10^{-3}\sqrt{2}\cdot 1{,}7.10^{-27}}} \approx 10\frac{m}{s}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{\Delta m}\left[\frac{1}{\frac{M}{M-\Delta m\,t}}\cdot\left(\frac{-M(-\Delta m)}{(M-\Delta m\,t)^2}\right)\right] = F\left(\frac{1}{M-\Delta m\,t}\right)$$

***28.-Calcular la energía almacenada en el campo eléctrico creado por una esfera de radio R y carga Q. La carga está distribuida de forma homogénea por toda la esfera.***

La energía almacenada en un campo eléctrico está dada por la ecuación:

$$U = \frac{\varepsilon_o}{2}\int E^2 dV$$

La integral debe calcularse en todo el espacio en el que exista campo eléctrico..
Para el caso de la esfera dividimos el campo creado por ella en dos partes, una la que corresponde al espacio exterior a la esfera, y otra al interior de ella.

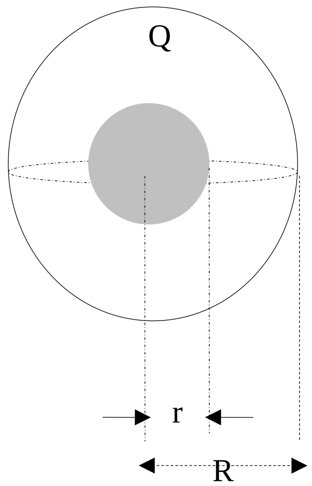
Para calcular el campo exterior aplicamos el teorema de Gauss
Consideramos una esfera de radio r>R concéntrica con la esfera que contiene la carga Q. El teorema de Gauss expresado en forma matemática es:

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum q}{\varepsilon_o}$$

En nuestro caso $\sum q = Q$

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E_e \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E_e = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r^2}$$

Para calcular el campo en el interior de la esfera de radio R hacemos uso del teorema de Gauss




Consideramos una esfera concéntrica con la que tiene la carga Q de radio r<R

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E_i \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q'}{\varepsilon_o}$$

Q´ es la carga contenida en la esfera de radio r. Teniendo presente que la distribución de carga es homogénea, la densidad volumétrica de carga es la misma en la esfera de radio R que en la de radio r.

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Q'}{\frac{4}{3}\pi r^3} \quad \Rightarrow \quad Q' = Q\frac{r^3}{R^3}$$

$$E_i = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{Q\frac{r^3}{R^3}}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{Q\,r}{4\pi\varepsilon_o R^3}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \Rightarrow \qquad dV = 4\pi r^2 dr$$

Calculamos la energía almacenada en el campo exterior a la esfera.

$$U_e = \frac{\varepsilon_o}{2}\int E^2 dV = \frac{\varepsilon_o}{2}\int_R^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o}\int_R^\infty \frac{1}{r^2}dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{R}\right] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad U_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R}$$

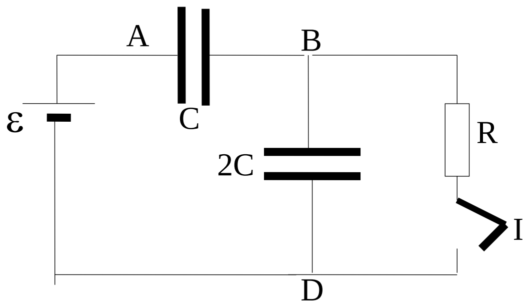
Calculamos la energía almacenada en el campo interior a la esfera.

$$U_i = \frac{\varepsilon_o}{2}\int E^2 dV = \frac{\varepsilon_o}{2}\int_0^R \left(\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_o R^3}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o R^6}\int_o^R r^4 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o R^6}\left[\frac{R^5}{5}-\frac{0}{5}\right] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad U_i = \frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R}$$

$$U_{total} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o R} + \frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_o R} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o R}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\right) = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_o R}$$

***29.-Calcular la energía calorífica que se desprende en la resistencia R al cerrar el interruptor I.***




***La fuerza electromotriz de la batería es ε y su resistencia interna es despreciable.***

Cuando el interruptor I está abierto los dos condensadores están acoplados en serie con la batería y almacenan la siguiente energía:

$$E = \frac{1}{2} C_E \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{C \cdot 2C}{C + 2C} \varepsilon^2 = \frac{C\varepsilon^2}{3}$$

Designamos con q a la carga de cada condensador y las diferencias de potencial entre sus bornes son:

$$C = \frac{q}{V_A - V_B} \;\; ; \;\; 2C = \frac{q}{V_B - V_D} \Rightarrow (V_A - V_B) + (V_B - V_D) = \varepsilon = \frac{q}{C} + \frac{q}{2C} \Rightarrow \; q = \frac{2C\varepsilon}{3}$$

$$V_A - V_B = \frac{q}{C} = \frac{\frac{2C\varepsilon}{3}}{C} = \frac{2}{3}\varepsilon \quad ; V_B - V_D = \frac{q}{2C} = \frac{\frac{2C\varepsilon}{3}}{2C} = \frac{1}{3}\varepsilon$$

Al cerrar el interruptor I comienza a circular corriente por la resistencia R y este fenómeno dura hasta que la diferencia de potencial $V_B$-$V_D$ se anule, y cuando ocurra esta anulación, el condensador 2C estará descargado, ya que no existe diferencia de potencial entre sus bornes. Ahora la caída de tensión ε está entre los bornes del condensador C, con lo que su nueva carga es $q_1 = C\varepsilon$.
Durante este proceso la batería ha aportado un trabajo:

$$W = (q_1 - q)\varepsilon = \left( C\varepsilon - \frac{2C\varepsilon}{3} \right)\varepsilon = \frac{C\varepsilon^2}{3}$$

La energía almacena en los condensadores es la que posee el condensador C

$$E_1 = \frac{1}{2} C\varepsilon^2$$

La diferencia de energía entre la situación inicial (I abierto) a la final (I cerrado) es:

$$\frac{1}{2}C\varepsilon^2 - \frac{1}{3}C\varepsilon^2 = \frac{C\varepsilon^2}{6}$$

Dado que la batería ha aportado una energía, el exceso de energía que no está en los condensadores se ha disipado en la resistencia R

$$Q = \frac{C\varepsilon^2}{3} - \frac{C\varepsilon^2}{6} = \frac{C\varepsilon^2}{6}$$