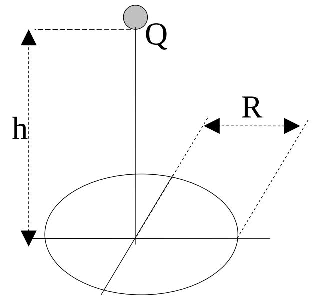
30.- Una carga puntual Q dista del centro de un circulo de radio R una distancia h. Calcular el flujo eléctrico que atraviesa la superficie circular.



Por definición el flujo eléctrico que atraviesa una superficie es:

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \Rightarrow \quad d\Phi = E\, dS \cos\theta$$

El módulo del campo eléctrico creado por una carga puntual

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}$$

Sobre el circulo escogemos una superficie dS tal que toda ella diste r de la carga Q y esa superficie debe ser una corona circular de radio ρ, tal como se indica en la figura1.

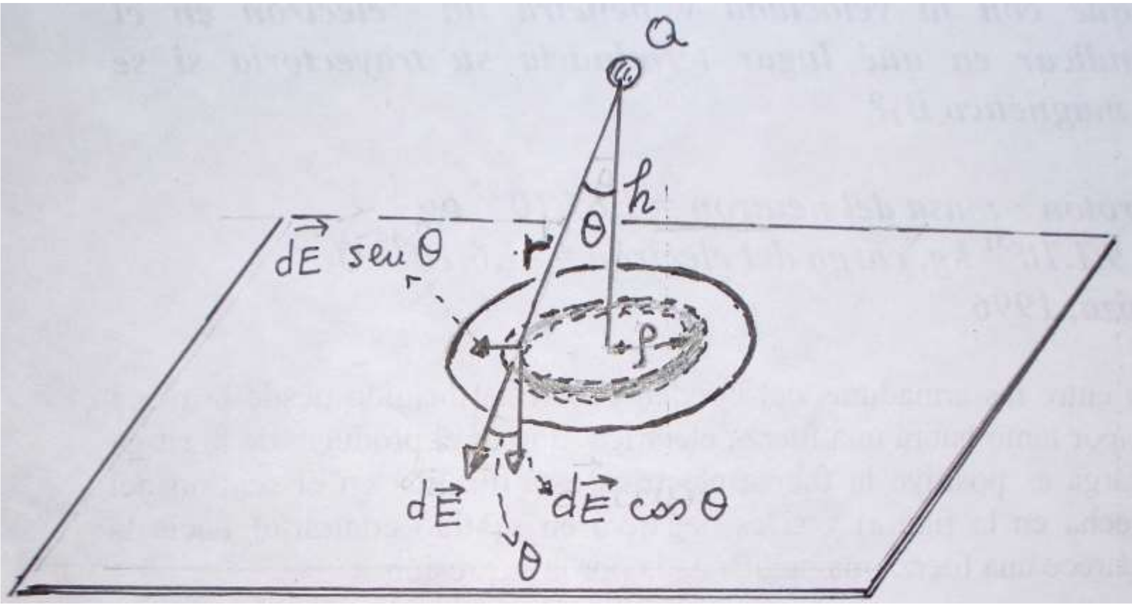


Fig.1

Toda la corona circular dista r de la carga formando un ángulo θ con la vertical. El vector campo es $d\vec{E}$ y tiene dos componentes, una de ellas, perpendicular al círculo y la otra en el plano del círculo. La componente perpendicular es la que contribuye al flujo ya que el ángulo con la superficie de la corona es 0º.
El flujo que atraviesa la corona de radio ρ es:

$$d\Phi = E \cdot \cos\theta \cdot \text{superficie de la corona} = E \cdot \cos\theta \cdot 2\pi\rho\, d\rho$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{h^2+\rho^2} \quad ; \quad \cos\theta = \frac{h}{\sqrt{h^2+\rho^2}}$$

Sustituyendo los dos valores en la ecuación del flujo

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{h^2+\rho^2}\cdot\frac{h}{\sqrt{h^2+\rho^2}}\cdot 2\pi\rho\, d\rho = \frac{Qh}{2\varepsilon_o}\cdot\frac{\rho\, d\rho}{\left(h^2+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Para calcular el flujo total a través de todo el círculo se integra la expresión anterior

$$\Phi = \frac{Qh}{2\varepsilon_o}\int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{\left(h^2+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

Para calcular la integral hacemos el cambio de variable siguiente:

$$h^2+\rho^2 = u^2 \quad \Rightarrow \quad 2\rho\, d\rho = 2u\, du$$

Con este cambio de variable resolvemos la integral siguiente:

$$\int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{\left(h^2+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^R \frac{u\, du}{u^3} = -\frac{1}{u}\Big]_0^R = -\frac{1}{\sqrt{h^2+\rho^2}}\Bigg]_0^R = -\frac{1}{\sqrt{h^2+R^2}} + \frac{1}{h}$$

La ecuación (1) queda

$$\Phi = \frac{Qh}{2\varepsilon_o}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{h^2+R^2}}\right) = \frac{Q}{2\varepsilon_o}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}\right)$$

31.-a) Calcular el campo eléctrico de un segmento esférico, cargado uniformemente, en el centro de la esfera de radio R a la que pertenece. El área del circulo que cierra el segmento es r<R y la densidad superficial de carga σ C/m^2.
b) Calcular el campo eléctrico que crea un hemisferio, de radio R con densidad de carga superficial σ, en su centro

En la figura 1 se ha representado el segmento esférico cuya área del círculo que lo cierra es r. El radio de la esfera es R. Sobre el segmento esférico se ha considerado una superficie de altura dh .

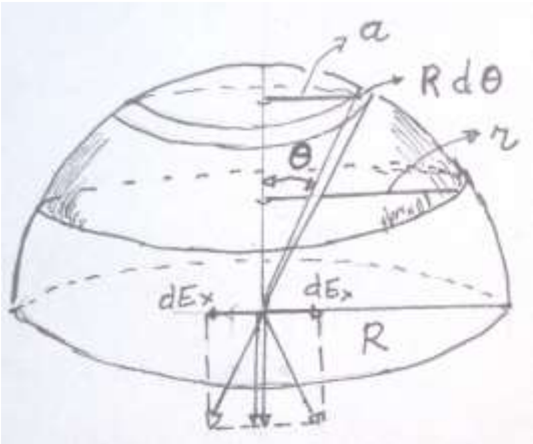


Fig.1

El área de dicha superficie es:

$$dA = R\,d\theta \cdot 2\pi a$$

y su carga eléctrica

$$dQ = R\,d\theta \cdot 2\pi a\,\sigma$$

Cualquier lugar que se elija de esta superficie dista R del centro de la esfera, por ello, el campo eléctrico creado son vectores que forman un ángulo θ, pero dada la simetría del proceso las componentes horizontales se anulan y solo quedan las verticales (ver la figura 1). El módulo de esa componente es:

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dQ}{R^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{R\,\sigma\,d\theta\,2\pi\,a}{R^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2\pi\,a\,\sigma}{R}\cos\theta\,d\theta$$

En la ecuación anterior existen dos variables, una es θ y la otra a. Ambas están ligadas entre sí

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{R} \;\Rightarrow\; \cos\theta\,d\theta = \frac{1}{R}da$$

Llevando esta relación a la ecuación dE_y.

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2\pi\,a\,\sigma}{R}\cdot\frac{1}{R}da = \frac{1}{2\,\varepsilon_o}\frac{2\,a\,\sigma}{R^2}\cdot da$$

Para hallar el campo debido a todo el segmento circular integramos:

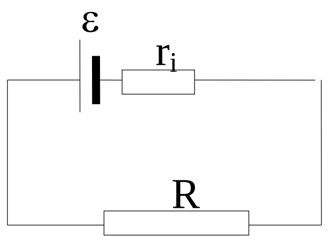
$$E_y = \int_0^r \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_o R^2}\, a\, da = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_o R^2}\left[\frac{a^2}{2}\right]_0^r = \frac{\sigma\, r^2}{4\,\varepsilon_o R^2}$$

b) Para resolver este caso basta integrar como anteriormente pero cambiando el límite r por R.

$$E_y = \int_0^R \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_o R^2}\, a\, da = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_o R^2}\left[\frac{a^2}{2}\right]_0^R = \frac{\sigma\, R^2}{4\,\varepsilon_o R^2} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_o}$$

32.- Se dispone de cuatro resistencias de alambre en espiral, de valores 10, 20, 30 y 40 ohmios, respectivamente. La potencia máxima que puede disipar cada resistencia es 2 W. Utilizando esas cuatro resistencias se fabrica un calentador que se conecta a una fuente de 20 V y resistencia interna 25 Ω. Indicar cómo se han de unir las cuatro resistencias para que la potencia sea máxima en el calentador.

En el circuito de la figura la máxima transferencia de potencia de la fuente a la resistencia se produce cuando $R = r_i$ = resistencia interna de la fuente. Veamos por qué.



La intensidad de la corriente que atraviesa R y la potencia desarrollada es:

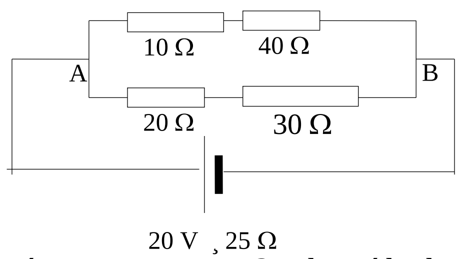
$$I = \frac{\varepsilon}{R + r_i} \;\; ; \;\; P = I^2 R = \left(\frac{\varepsilon}{R + r_i} \right)^2 R$$

Para hallar la máxima potencia derivamos la expresión anterior respecto de R e igualamos a cero

$$\frac{dP}{dR} = \varepsilon^2 \frac{(R + r_i)^2 - R \cdot 2(R + r_i)}{(R + r_i)^4} = 0 \;\Rightarrow\; (R + r_i)^2 - R \cdot 2(R + r_i) = 0 \Rightarrow R + r_i - 2R = 0 \Rightarrow$$

$$R = r_i$$

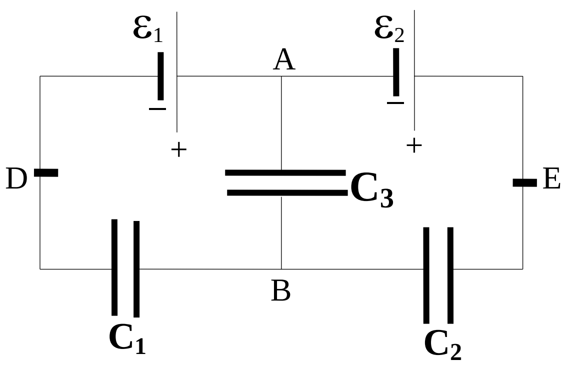
A la vista del anterior resultado, las cuatro resistencias deben agruparse de modo que su resistencia total sea igual a 25 Ω o al valor más próximo a él.
De inmediato se observa que no es posible asociarlas en serie. Tampoco en paralelo. Por tanto, es preciso asociarlas de forma mixta.



La resistencia de la agrupación anterior es 25 Ω y la caída de tensión entre A y B vale 10 V. Veamos si el circuito cumple la condición de que cada resistencia soporte una potencia igual o inferior a 2 vatios

Entre A y B por la rama superior la intensidad es $I = \frac{10}{50} = 0{,}20\,A$, la potencia en la resistencia mayor es; $P = I^2 R = 0{,}20^2 \cdot 40 = 1{,}6\,W$. En las demás resistencia la potencia es menor, luego se cumplen las condiciones del problema.

33.- En el circuito de la figura inferior en el que se han dispuesto tres condensadores y dos pilas sin resistencia interna, hay que calcular las diferencias de potencial entre A y B ; entre B y D ; entre E y B.



En la figura 1 se han asignado cargas a cada condensador en el 1 y el 2 no hay duda de sus cargas tal como están unidos a las pilas, en el 3 se supone implícitamente que $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Asignamos un sentido positivo al recorrido por cada malla y un sentido a las fuerzas electromotrices de las pilas de menos a más

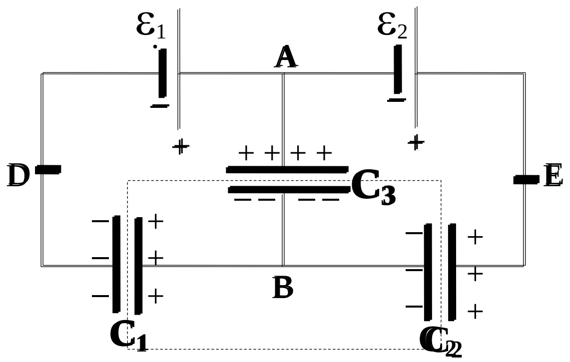


Fig.1

En el rectángulo (en línea de trazos) que se ha dibujado en la figura 1 abarcando a las armaduras de los tres condensadores se cumple que

$$q_1 - q_3 - q_2 = 0 \;\; ; \;\; C_1 V_{BD} - C_3 V_{AB} - C_2 V_{EB} = 0 \quad (1)$$

Siendo q_1 , q_2 y q_3 las cargas de cada armadura.

Recorremos cada malla en el sentido de las agujas del reloj y asignamos a cada fuerza electromotriz un sentido de negativo a positivo.

$$V_{AB} + V_{BD} = \varepsilon_1 \;\; (2); \qquad V_{EB} + V_{BA} = \varepsilon_2 \quad (3)$$

Combinando las ecuaciones (2) y (3) con la (1) y considerando que $V_{BA} = - V_{AB}$, resulta:

$$C_1(\varepsilon_1 - V_{AB}) - C_3 V_{AB} - C_2(\varepsilon_2 - V_{BA}) = 0 \;\Rightarrow\; C_1\varepsilon_1 - C_2\varepsilon_2 = V_{AB}(C_1 + C_2 + C_3) \;\Rightarrow$$

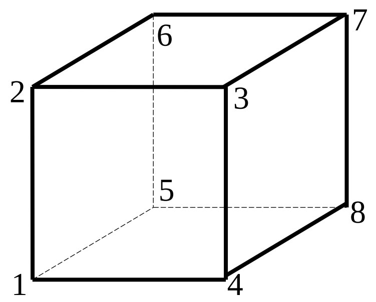
$$\Rightarrow \quad V_{AB} = \frac{C_1\varepsilon_1 - C_2\varepsilon_2}{C_1 + C_2 + C_3} \quad (4)$$

Llevando (4) a (2) y (4) a (3) resulta:

$$V_{BD} = \varepsilon_1 - \frac{C_1\varepsilon_1 - C_2\varepsilon_2}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{C_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - C_3\varepsilon_2}{C_1 + C_2 + C_3}$$

$$V_{EB} = \varepsilon_2 + \frac{C_1\varepsilon_1 - C_2\varepsilon_2}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{C_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - C_3\varepsilon_2}{C_1 + C_2 + C_3}$$

34.- En el cubo de la figura cada lado tiene una resistencia R. Hallar la resistencia equivalente cuando el cubo se conecta entre a) 1 y 7 b) entre 1 y 2 c) entre 1 y 3.



a) Supongamos que la corriente de intensidad I, llega por 1 y sale por 7. Al llegar a 1 se reparte por tres ramas (1-2; 1-4; 1-5). Para llegar a 7 tenemos los siguientes caminos. 1267 ; 1487 y 1567, por los tres caminos se recorren las mismas resistencias. Por tanto, cuando I se divide en 1, las intensidades por 1-2; 1-4 y 1-5 son las mismas y las designamos con i.

$$I = 3i$$

Por 7 debe salir la misma corriente que entra por 1, luego las corrientes que llegan a 7 tienen que ser i por cada ramal 6-7, 3-7 y 8-7.

Por simetría, al dividirse las corrientes en 4, 5 y 2 por cada rama la intensidad es i/2. La figura 1 indica las corrientes en cada rama.

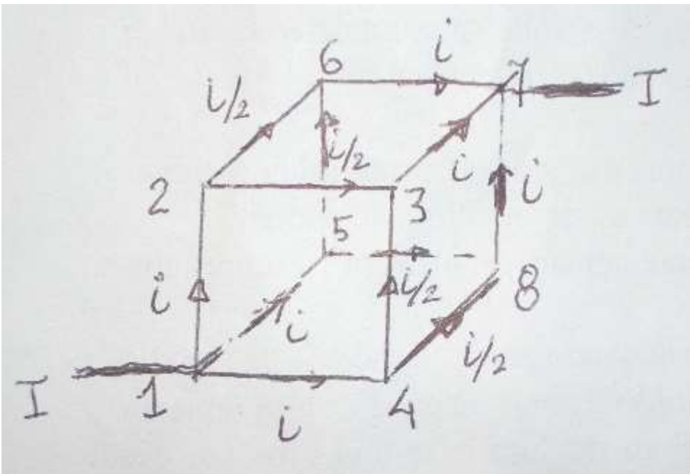


Fig.1

De la figura 1 se deduce

$$V_1 - V_7 = (V_1 - V_4) + (V_4 - V_3) + (V_3 - V_7) \Rightarrow IR_E = iR + \frac{i}{2}R + iR \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3i\,R_E = i\left(2R + \frac{R}{2}\right) \Rightarrow R_E = \frac{5R}{6}$$

b) La corriente I penetra por 1 y sale por 2. . Al dividirse la corriente en 1, los caminos 1432 y 1562 son equivalentes, por tanto, las corrientes 1-4 y 1-5 son iguales y las designamos con i. El camino de 1-2 es diferente a los dos anteriores y lo designamos con j.

$$I = 2i + j$$

La corriente i de 1-4 al llegar a 4 se bifurca y designamos con k a la corriente por 4-8 y por i-k a la corriente por 4-3..

En la cara 1584 se cumple:

$$I_{1\text{-}5}R + I_{5\text{-}8} + I_{8\text{-}4} + I_{4\text{-}1} = 0 \Rightarrow iR + I_{5-8}R - kR - iR = 0 \Rightarrow I_{5-8} = k$$

De lo anterior se deduce que $I_{8-7} = 2k$ y $I_{5\text{-}6} = i - k$

En la cara 4378 se cumple $(i-k)R - I_{3-7}R - 2kR - kR = 0 \Rightarrow I_{3-7} = i - 4k$

Si la corriente entrase por 2 y saliese por 1 sería semejante a que entrase por 1 y saliese por 2, luego si entra por 1 y sale por 2 , $I_{6\text{-}2}=i$ e $I_{3\text{-}2}=i$

En el nudo 3 : $I_{4\text{-}3} + I_{3\text{-}7} = I_{3\text{-}2} \Rightarrow (i-k) + (i-4k) = i \Rightarrow i = 5k$

En la cara 1256

$$I_{1-2}R + I_{2-6}R + I_{6-5}R + I_{5-1}R = 0 \Rightarrow j - i - i + k - i = 0 \Rightarrow j = 3i - k \Rightarrow j = 14k$$

En la figura 2 aparecen las corrientes.

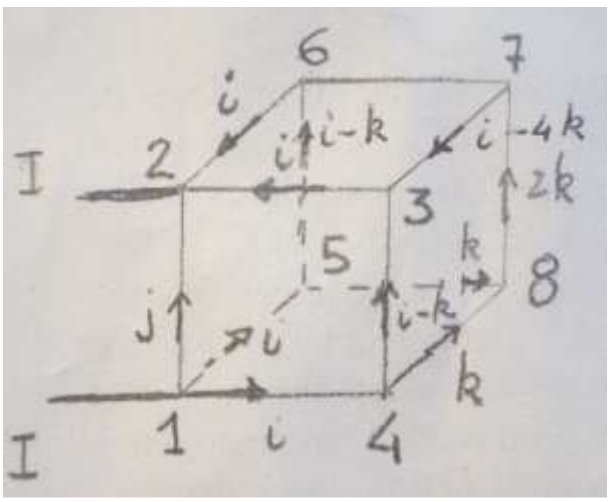


Fig.2

$$I \cdot R_E = V_{12} \Rightarrow (2i + j) \cdot R_E = j \cdot R \quad \Rightarrow \quad R_E = \frac{j}{2i + j} R = \frac{14k}{24k} R = \frac{7}{12} R$$

c) La corriente I entra por 1 y en ese nudo se divide en dos corrientes de valor i cada

una i, y una tercera de valor j.

$$I = 2i + j$$

Al salir la corriente por el vértice 7 llegan a él las corrientes i y j para que se cumpla la ecuación anterior. Esto trae como consecuencia que la intensidad por 4-8 sea nula y también la 2-6.

Cara 4378 $\quad iR - jR - I_{87}R = 0 \quad \Rightarrow \quad I_{87} = i - j$

Nudo 7 $\quad (i - j) - I_{67} = j \quad \Rightarrow \quad I_{67} = 2j - i$

$$(2i + j)R_E = iR + 0 \cdot R + (i - j)R + jR = 2iR \quad \Rightarrow \quad R_E = \frac{2i}{2i + j}$$

Cara 1584 $\quad jR + (j - v)R - iR = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 2j - i$

Cara 5678 $\quad vR + (2j - i)R - (i - j)R - (j - v)R = 0 \quad \Rightarrow \quad v = i - j$

De las dos últimas ecuaciones se deduce:

$$2j - i = i - j \quad \Rightarrow \quad j = \frac{2}{3} i$$

$$R_E = \frac{2i}{2i + 2j} R = \frac{2i}{2i + 2 \cdot \frac{2}{3} i} R = \frac{3R}{4}$$

En la figura 3 se indican las corrientes.

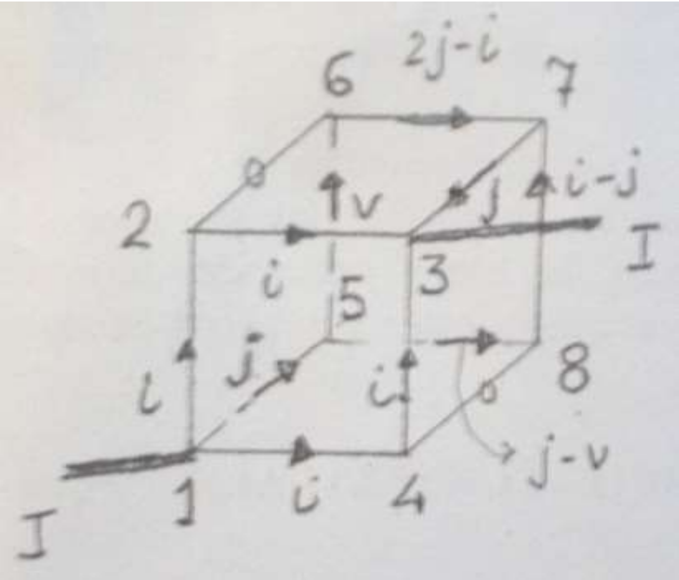
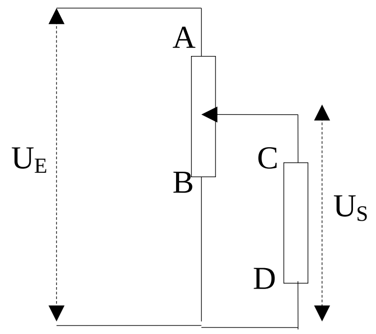
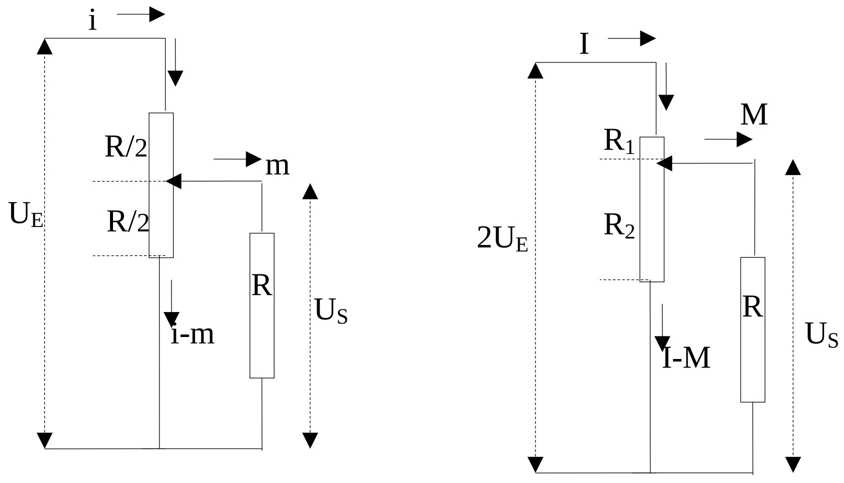


Fig.3

35.- En el circuito de la figura inferior AB es un potenciómetro de resistencia total R y CD es una resistencia de carga de valor R. Si el cursor del potenciómetro se coloca en la mitad de éste y se aplica una tensión U_E a la entrada, la tensión de salida en la resistencia de carga es U_S. Ahora se duplica la tensión de entrada pero se quiere mantener la de salida y se pregunta cómo se ha de desplazar el cursor para lograrlo.



Cuando la tensión de entrada es $2U_E$, designamos con R_1 y R_2 a las resistencias del potenciómetro por encima y por debajo del cursor, como indica a figura 1.En la misma figura se indican las intensidades de corriente, en el caso primero y en el segundo.



Caso primero Fig.1 Caso segundo

De la figura 1 se deduce que R_2 y R se encuentran en paralelo, siendo, por tanto, su resistencia equivalente igual a $\frac{R_2\ R}{R_2+R}$.Esta resistencia equivalente está en serie con R_1, luego la resistencia total es

$$R_{T2} = R_1 + \frac{R_2 R}{R_2 + R}$$

En el caso primero: $R_1 = R_2 = \frac{R}{2} \quad \Rightarrow \quad R_{T1} = \frac{R}{2} + \frac{\frac{R}{2}\cdot R}{\frac{R}{2}+R} = \frac{5R}{6}$

$$U_E = i \cdot R_{T1} = \frac{5}{6} iR \quad (1)$$

En la malla inferior $\quad mR - (i-m)\frac{R}{2} = 0 \Rightarrow \; i = 3m \Rightarrow \quad U_S = mR = \frac{i}{3}R \quad (2)$

Para el caso segundo: $\quad IR_1 + MR = 2U_E$

En la malla inferior: $\quad IR - (I-M)R_2 = 0 \Rightarrow M = \frac{IR_2}{R+R_2}; \quad U_S = MR = \frac{IR_2 R}{R+R_2} \quad (3)$

En todo el circuito: $\quad 2U_E = I \cdot R_{T2} = I\left(R_1 + \frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R}\right) \quad (4)$

Combinado las ecuaciones (1) y (4)

$$2 \cdot \frac{5}{6} iR = I\left(R_1 + \frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R}\right) \Rightarrow \frac{5iR}{3} = I\left(R - R_2 + \frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R}\right) \quad (5)$$

Combinando las ecuaciones (2) y (3)

$$\frac{iR}{3} = I\frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R} \quad (6)$$

De (5) y (6)

$$5I\frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R} = I\left(R - R_2 + \frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R}\right) \quad \Rightarrow \quad 4\frac{R_2 \cdot R}{R_2 + R} = R - R_2$$

Establecemos que R_2 es una fracción de R, esto es, $R_2 = \alpha R$

$$4\frac{\alpha R^2}{\alpha R + R} = R - \alpha R \quad \Rightarrow \quad 4\frac{\alpha R}{1+\alpha} = R(1-\alpha) \quad \Rightarrow \quad 4\alpha = 1 - \alpha^2$$

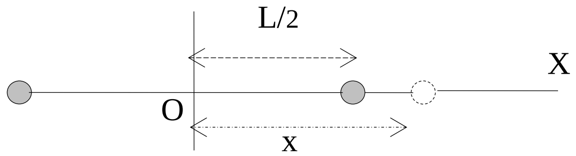
Resolviendo la ecuación de segundo grado

$$\alpha^2 + 4\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

La solución valida del problema es: $R_2 = \alpha \cdot R = (\sqrt{5} - 2)R$

36.- Dos cargas eléctricas puntuales, e iguales y del mismo signo, se encuentran en reposo a una distancia L. Se dejan en libertad con velocidad inicial nula y se determina que al cabo de un tiempo t_1 se encuentran a una distancia 2 L. Si las mismas cargas estuviesen en reposo a una distancia inicial 3L y se dejasen en libertad con velocidad inicial cero, al cabo de un tiempo t_2 se encontrarían a una distancia 6L. Calcular la relación entre ambos tiempos.

En ambos caso las cargas se mueven debido a que cada una sufre la acción de una fuerza de repulsión, cuya característica es la de ser variable, pues varía con el inverso del cuadrado de la distancia, y a medida que se alejan las cargas entre sí la fuerza disminuye.
Analicemos el primer caso



Inicialmente cada carga dista L/2 de un origen de coordenadas OX, dicho origen se ha situado en el medio de las cargas. Al dejar dichas cargas en libertad, una se desplaza hacia la derecha y otra a la izquierda. Por simetría siempre tendrán el mismo módulo de velocidad y estarán a la misma distancia de O.

Cuando la distancia x a O sea x =L/2+L/2=L, la distancia entre las cargas es 2L.

Supongamos que la carga de la derecha se encuentra en un momento determinado a la distancia x de O. En ese instante actuará sobre ella una fuerza de repulsión de valor

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{(2x)^2}$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton

$$\frac{1}{16\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{x^2} = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = mv\frac{dv}{dx} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{1}{16\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{x^2}dx = \int mv\,dv \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_o}\left(-\frac{1}{x}\right) = m\frac{v^2}{2} + Cte \qquad (1)$$

Según el enunciado del problema cuando x=L/2 su velocidad es cero, por tanto

$$\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_o}\left(-\frac{2}{L}\right) = Cte \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_o}\left(\frac{2}{L} - \frac{1}{x}\right)} \qquad (2)$$

Nota.- Esto se podría hacer por la ecuación de la energía. $W = \Delta E_C$ *, calculando el trabajo realizado por la fuerza electrostática desde la posición inicial en la que* $v_o = 0$*; hasta la posición x, en la que la velocidad es v.*

$$\int_{\frac{L}{2}}^{x} \frac{q}{16\pi\varepsilon_o} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2} m v^2 - 0$$

Si analizamos el segundo caso, llegamos a la misma ecuación (1), aunque ahora varía la constante, ya que cuando x = 3L/2 la velocidad es cero

$$\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_o}\left(-\frac{2}{3L}\right) = \mathrm{Cte} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_o}\left(\frac{2}{3L} - \frac{1}{x}\right)} \quad (3)$$

Cuando x=(3L/2)+(3L/2) =3L, la distancia entre las cargas es 6L.

Por claridad, a partir de ahora, designamos a la velocidad en el primer caso por v_1 y por v_2 en el segundo caso y a la variable x por x_1 y en el primer caso y x_2 en el segundo caso.

Supongamos que para el caso 1 un cuerpo se desplazase con velocidad media constante y recorriese la distancia L/2 en el tiempo t_1.

$$\frac{L}{2} = v_{m(1)} \cdot t_1$$

Hagamos lo mismo para el caso 2.

$$\frac{3L}{2} = v_{m(2)} t_2$$

Dividiendo ambas ecuaciones

$$\frac{\frac{L}{2}}{\frac{3L}{2}} = \frac{1}{3} = \frac{v_{m(1)}}{v_{m(2)}} \frac{t_1}{t_2} \quad \Rightarrow \quad t_2 = 3\frac{v_{m(1)}}{v_{m(2)}} t_1 \quad (4)$$

La ecuación (2) la aplicamos cuando $x=x_1=L$, esto es, cuando la distancia entre las cargas es 2L.

$$v_1(t_1) = \sqrt{\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_o}\left(\frac{2}{L} - \frac{1}{L}\right)} = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{1}{L}}$$

La ecuación (3) la aplicamos cuando $x=x_2=3L$, esto es, cuando la distancia entre las cargas es 6L.

$$v_2(t_2) = \sqrt{\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_o}\left(\frac{2}{3L} - \frac{1}{3L}\right)} = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{1}{3L}}$$

El cociente de estas velocidades instantáneas es:

$$\frac{v_1(t_1)}{v_2(t_2)}=\frac{\sqrt{\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{L}}}{\sqrt{\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{3L}}}=\sqrt{3}$$

Si escogiésemos para el primer caso cuando la carga ha recorrido la mitad del camino, esto es, cuando x_1=L/2+L/4=3L/4, la velocidad instantánea en ese lugar es:

$$v_1(3L/4)=\sqrt{\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_o}\left(\frac{2}{L}-\frac{4}{3L}\right)}=\sqrt{\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{2}{3L}}$$

Si escogiésemos para el segundo caso cuando la carga ha recorrido la mitad del camino, esto es, cuando x_2=3L/2+3L/4=3L/4, la velocidad instantánea en ese lugar es:

$$v_2(9L/4)=\sqrt{\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_o}\left(\frac{2}{3L}-\frac{4}{9L}\right)}=\sqrt{\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{2}{9L}}$$

El cociente entre esas velocidades instantáneas:

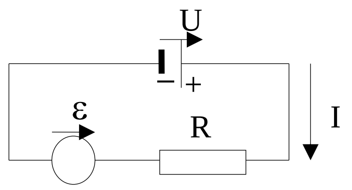
$$\frac{v_1(3L/4)}{v_2(9L/4)}=\sqrt{3}$$

Escogiendo cuando en cada caso la carga ha recorrido ¼ o 1/8 o 1/16 de su camino el cociente entre las velocidad instantáneas es $\sqrt{3}$, en consecuencia, también tienen que guardar la misma proporción las velocidades medias que aparecen en la ecuación (4).

$$t_2=3\frac{v_{m(1)}}{v_{m(2)}}t_1=3\sqrt{3}\ t_1$$

37.-Se conecta un motor eléctrico de corriente continua a una batería de fuerza electromotriz U y resistencia interna prácticamente nula. La resistencia del arrollamiento del inducido es R. ¿Para qué valor de la intensidad de la corriente que atraviesa el devanado la potencia útil del motor será máxima? ¿Cuál es esa potencia y cuál el rendimiento del motor?

En el esquema de la figura se representa el motor con fuerza contraelectromotriz ε, la resistencia del arrollamiento y la fuente de tensión continua



La intensidad de la corriente que atraviesa el motor es:

$$I=\frac{U-\varepsilon}{R}\quad\Rightarrow\quad \varepsilon=U-IR$$

La potencia útil del motor es:

$$P_{útil}=\varepsilon I=\left(U-IR\right)I=UI-I^{2}R$$

Como nos piden la potencia máxima, derivamos la potencia respecto de la intensidad e igualamos a cero.

$$\frac{dP_{útil}}{dI}=U-2IR=0\quad\Rightarrow\quad I=\frac{U}{2R}$$

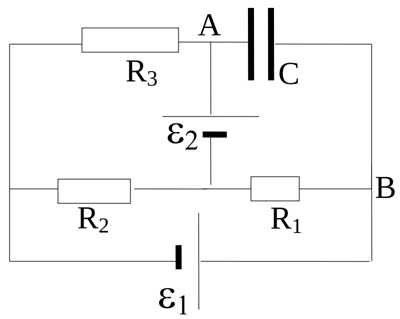
Sustituyendo en la ecuación de la potencia útil:

$$\left(P_{útil}\right)_{máxima}=U\frac{U}{2R}-\frac{U^{2}}{4R^{2}}R=\frac{U^{2}}{4R}$$

El rendimiento

$$\eta=\frac{P_{útil}}{P_{suministrada}}=\frac{\frac{U^{2}}{4R}}{UI}=\frac{U}{4IR}=\frac{U}{4\cdot\frac{U}{2}}=\frac{1}{2}$$

38.- Calcular la diferencia de potencial entre los extremos del condensador C de la figura inferior



Una vez que el condensador esté cargado, el circuito se reduce a dos mallas como indica la figura 1.

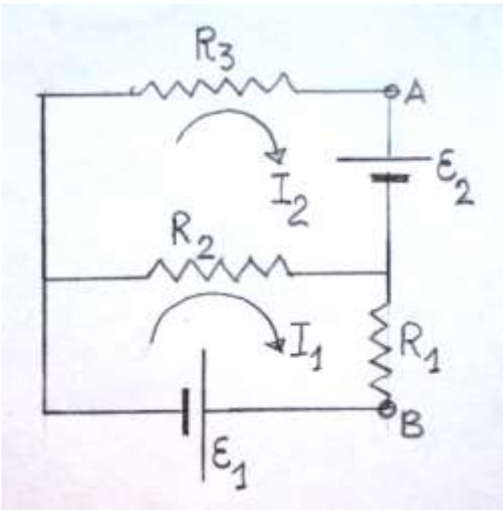


Fig.1

Para las dos mallas tenemos las siguientes ecuaciones

$$(I_1 - I_2)R_2 + I_1R_1 + \varepsilon_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1(R_1 + R_2) - I_2R_2 = -\varepsilon_1 \quad (1)$$

$$I_2R_3 + \varepsilon_2 + (I_2 - I_1)R_2 = 0 \Rightarrow I_2(R_2 + R_3) - I_1R_2 = -\varepsilon_2 \Rightarrow \quad I_2 = \frac{I_1R_2 - \varepsilon_2}{R_2 + R_3}$$

Sustituyendo I_2 en la ecuación (1).

$$I_1(R_1 + R_2) - \frac{I_1R_2 - \varepsilon_2}{R_2 + R_3} \cdot R_2 = -\varepsilon_1 \quad \Rightarrow \quad I_1\left(R_1 + R_2 - \frac{R_2^2}{R_2 + R_3}\right) + \frac{\varepsilon_2 R_2}{R_2 + R_3} = -\varepsilon_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I_1\left(\frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_2 + R_3}\right) = -\frac{\varepsilon_2R_2}{R_2 + R_3} - \varepsilon_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{-\varepsilon_1(R_2 + R_3) - \varepsilon_2R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

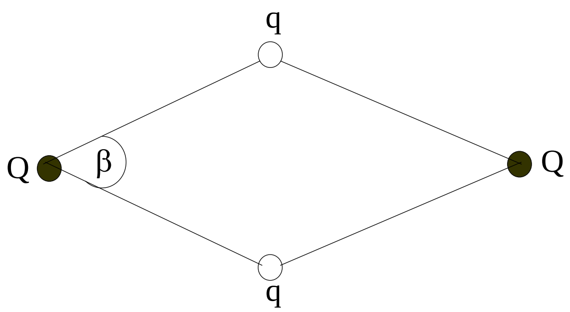
La diferencia de potencial entre A y B es la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador.

$$V_A - V_B = \varepsilon_2 + I_1 R = \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1 (R_2 + R_3) R_1 + \varepsilon_2 R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$V_A - V_B = \frac{\varepsilon_2 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) - \varepsilon_1 R_1 R_2 - \varepsilon_1 R_1 R_3 - \varepsilon_2 R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$V_A - V_B = \frac{\varepsilon_2 R_3 (R_1 + R_2) - \varepsilon_1 R_1 (R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

39.-Cuatro cargas Q, q, Q, y q se unen mediante hilos de igual longitud L, tal como se indica en la figura inferior



Calcular el valor del ángulo beta que forman los hilos.

En la figura 1 se indican las fuerzas sobre dos cargas y las tensiones en tres cuerdas.

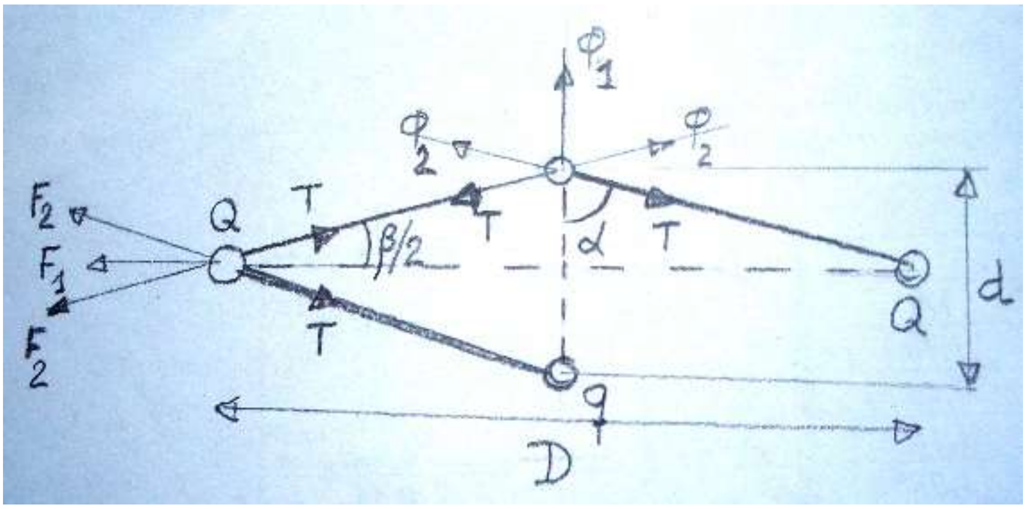


Fig.1

Sobre la carga Q de la izquierda de la figura 1 actúan las fuerzas F_1, F_2, F_2, T y T

$$F_1 = K\frac{Q^2}{D^2} = K\frac{Q^2}{4L^2\cos^2\frac{\beta}{2}} \quad ; \quad F_2 = K\frac{Qq}{L^2}$$

Como Q está en equilibrio se cumple:

$$F_1 + 2F_2\cos\frac{\beta}{2} = 2T\cos\frac{\beta}{2} \;\Rightarrow\; K\frac{Q^2}{4L^2\cos^2\frac{\beta}{2}} + 2K\frac{Qq}{L^2}\cos\frac{\beta}{2} = 2T\cos\frac{\beta}{2} \qquad (1)$$

Sobre la carga q superior de la figura 1 actúan las fuerzas φ_1, φ_2, φ_2, T y T y de la figura 1 se deduce que los ángulos α y $\beta/2$ son complementarios

$$\varphi_1 = K\frac{q^2}{d^2} = K\frac{q^2}{4L^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2}} \quad ; \quad \varphi_2 = K\frac{Qq}{L^2}$$

Como q está en equilibrio se cumple:

$$\varphi_1 + 2\varphi_2 \operatorname{sen}\frac{\beta}{2} = 2T\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} \;\Rightarrow\; K\frac{q^2}{4L^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2}} + 2K\frac{Qq}{L^2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} = 2T\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} \quad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2) se deduce:

$$K\frac{Q^2}{4L^2 \cos^3 \frac{\beta}{2}} + 2K\frac{Qq}{L^2} = K\frac{q^2}{4L^2 \operatorname{sen}^3 \frac{\beta}{2}} + 2K\frac{Qq}{L^2} \;\Rightarrow\; \frac{Q^2}{\cos^3 \frac{\beta}{2}} = \frac{q^2}{\operatorname{sen}^3 \frac{\beta}{2}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \operatorname{tag}^3 \frac{\beta}{2} = \left(\frac{q}{Q}\right)^2 \;\Rightarrow\; \operatorname{tag}\frac{\beta}{2} = \left(\frac{q}{Q}\right)^{\frac{2}{3}} \;\Rightarrow\; \frac{\beta}{2} = \text{arco tag}\left(\frac{q}{Q}\right)^{\frac{2}{3}}$$