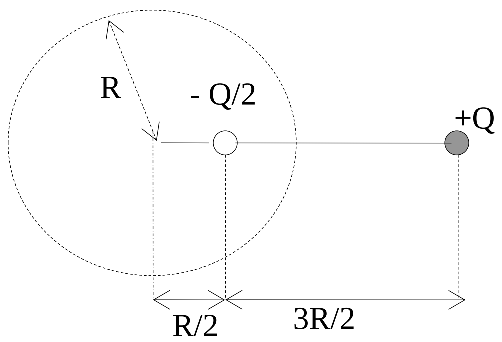
40.- Observe la figura inferior



R es el radio de una esfera cuyo centro está alineado con las cargas. Probar que el potencial eléctrico en dicha esfera es nulo. Se toma como referencia de potenciales el infinito con valor del potencial nulo.

En al figura 1 se escoge un punto de la esfera que designamos con X

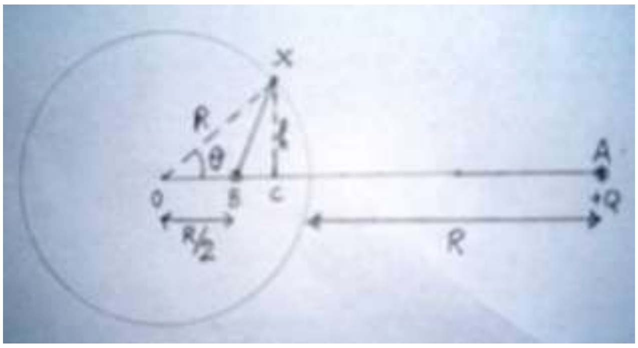


Fig.1

De la figura 1 se deduce:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{R} \Rightarrow h = R\operatorname{sen}\theta \ ; \ OC = R\cos\theta \ ; \ BC = OC - OB = R\cos\theta - \frac{R}{2} = R\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$AC = AB - BC = \frac{3R}{2} - R\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right) = R(2-\cos\theta)$$

$$AX = \sqrt{h^2 + AC^2} = \sqrt{R^2\operatorname{sen}^2\theta + R^2(2-\cos\theta)^2} = R\sqrt{5-4\cos\theta}$$

$$BX = \sqrt{h^2 + BC^2} = \sqrt{R^2\operatorname{sen}^2\theta + R^2\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right)^2} = R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta} = \frac{R}{2}\sqrt{5-4\cos\theta}$$

El potencial en el punto X es la suma algebraica de los potenciales creados por las dos cargas

$$V_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\frac{Q}{2}}{\frac{R}{2}\sqrt{5-4\cos\theta}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{R\sqrt{5-4\cos\theta}} = 0$$

41.- Un tranvía se desplaza con velocidad constante v por una vía horizontal y su motor consume una intensidad de I_1=100 A, siendo su rendimiento η =0,9. Si el mismo tranvía y con la misma velocidad v, se desplaza hacia abajo por una pendiente el motor no consume corriente. Si el tranvía se desplaza por la misma pendiente hacia arriba consume una intensidad I_2. Determinar el valor de esta intensidad. El rendimiento del motor depende de la intensidad eléctrica que consuma.

Para resolver el problema hacemos las siguientes suposiciones: F representa una fuerza que es necesario vencer para que el tranvía se desplace a velocidad v constante. Esto supone que F es la misma tanto si sube una pendiente como si baja por ella o se desplaza en horizontal. Admitimos que el motor tiene una resistencia global R y por tanto la potencia que no se utiliza para mover el tranvía da lugar a unas perdidas de energía calorífica en la citada resistencia.

Designamos con V la tensión de la red eléctrica de donde el motor toma la corriente. ηVI_1, es la potencia empleada para mover el tranvía con velocidad v por la vía horizontal

$$\eta VI_1 = Fv \quad (1)$$

$(1-\eta)VI_1$, es la potencia disipada en la resistencia R.

$$(1-\eta)VI_1 = I_1^2 R \;\Rightarrow\; (1-\eta)V = I_1 R \quad (2)$$

Cuando baja por una pendiente de ángulo α, el tranvía no consume energía eléctrica debido a que la pérdida de energía potencial compensa el trabajo de la fuerza F, o lo que es lo mismo la fuerza F es proporcionada por la componente del peso del tranvía

$$F = Mg\,\mathrm{sen}\alpha \;(3)$$

Cuando sube la pendiente α, la intensidad de la corriente la designamos con I_2 y el rendimiento del motor con $\eta´$.

$\eta´ V I_2$ es la potencia eléctrica empleada para mover el tranvía a velocidad constante v y para aumentar su energía potencial.

$$\eta´ VI_2 = Fv + Mg\,\mathrm{sen}\alpha\, v \quad (4)$$

$(1-\eta´)VI_2$ es la potencia disipada en al resistencia R

$$(1-\eta´)VI_2 = I_2^2 R \;\Rightarrow\; (1-\eta´)V = I_2 R \quad (5)$$

De las ecuaciones (2) y (5)

$$\frac{(1-\eta)V}{I_1}=\frac{(1-\eta')V}{I_2} \;\Rightarrow\; \frac{I_2}{I_1}(1-\eta)=1-\eta' \;\Rightarrow\; \eta'=1-\frac{I_2}{I_1}(1-\eta)$$

De las ecuaciones (1) , (3) , (4)

$$\eta' V I_2 = \mu V I_1 + F v = 2\mu V I_1$$

Sustituyendo en esta última ecuación el valor de η'

$$\left[1-\frac{I_2}{I_1}(1-\eta)\right] V I_2 = 2\eta V I_1 \Rightarrow I_2 - \frac{I_2^2}{I_1}(1-\eta) = 2\eta I_1 \Rightarrow \quad I_2^2 - I_2\frac{I_1}{1-\eta} + 2\eta\frac{I_1^2}{1-\eta} = 0 \Rightarrow$$

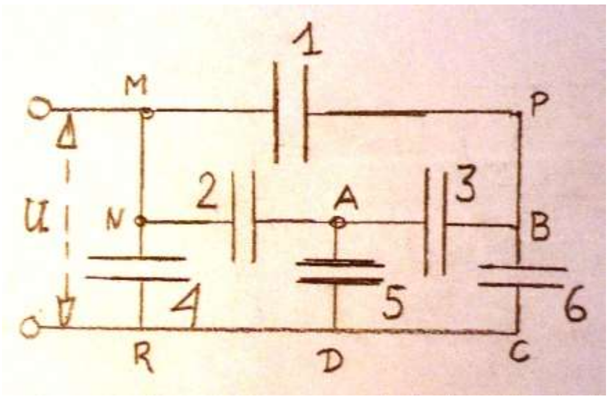
$$\Rightarrow \; I_2^2 - I_2\frac{100}{0,1} + 2\cdot 0,9\cdot\frac{100^2}{0,1} = 0 \;\Rightarrow\; I_2^2 - 1000 I_2 + 180000 = 0$$

La resolución de la ecuación de segundo grado conduce a dos soluciones 765 A y 236 A.
Los rendimientos para ambas intensidades son:

$$\eta'=1-\frac{765}{100}(1-0,9)=0,235 \;;\quad \eta'=1-\frac{236}{100}(1-0,9)=0,764$$

Según el planteamiento del problema la solución razonable es escoger la intensidad que dé mayor rendimiento.

42.- En el circuito de la figura inferior cada uno de los seis condensadores tiene una capacidad C, y el conjunto está unido a una fuente de corriente de tensión U. Se pide la carga de cada condensador y la capacidad equivalente del conjunto.



Asignamos un signo de carga a cada una de las armaduras de los condensadores., 1, 2, 4, 5 y 6 se asigna sin dificultad en función de la armadura que está unida a la fuente. El condensador 3 ofrece dudas y arbitrariamente se le asigna unos signos, aunque pueden ser no correctos. Las cargas de cada uno de los condensadores se designan por q_1, q_2,…q_6.

En la figura 1 se indican los signos. Además hay dos líneas de trazos, una abarca las armaduras de los condensadores 1, 3 y 6 y la otra los condensadores 2, 3 y 5.

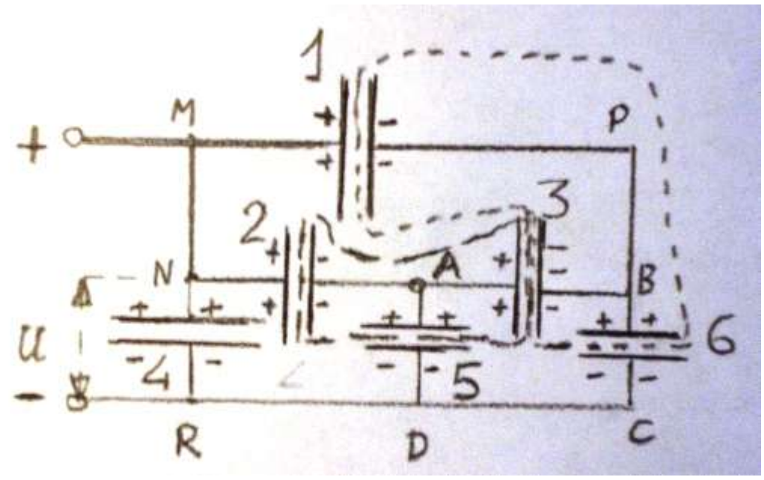


Fig.1

Como esas partes están aisladas podemos escribir las siguientes ecuaciones.

$$-q_1 - q_3 + q_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_3 = -q_1 + q_6 \quad (1)$$
$$-q_2 + q_3 + q_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_3 = q_2 - q_5 \quad (2)$$

Para la malla ABCD tenemos:

$$V_{AB} = \frac{q_3}{C} \;;\; V_{BC} = \frac{q_6}{C} \;;\; V_{AD} = \frac{q_5}{C}$$

$$V_{AB} + V_{BC} - V_{AD} = 0 \Rightarrow \frac{q_3}{C} + \frac{q_6}{C} - \frac{q_5}{C} = 0 \;\Rightarrow\quad q_3 = q_5 - q_6 \qquad (3)$$

Para la malla MPBN tenemos:

$$V_{MP} = \frac{q_1}{C} \;;\; V_{AB} = \frac{q_3}{C} \;;\; V_{NA} = \frac{q_2}{C}$$

$$V_{MP} - V_{AB} - V_{NA} = 0 \Rightarrow \frac{q_1}{C} - \frac{q_3}{C} - \frac{q_2}{C} = 0 \;\Rightarrow\quad q_3 = q_1 - q_2 \qquad (4)$$

De las ecuaciones (1) y (3) y de (2) y (4) resulta:

$$\left.\begin{array}{l} -q_1 + q_6 = q_5 - q_6 \quad \Rightarrow q_1 + q_5 = 2q_6 \\ q_2 - q_5 = q_1 - q_2 \quad \Rightarrow q_1 + q_5 = 2q_2 \end{array}\right\} \Rightarrow q_2 = q_6$$

De (3) y (4) resulta:

$$\left.\begin{array}{l} q_3 = q_5 - q_6 = q_5 - q_2 \\ q_3 = q_1 - q_2 \end{array}\right\} \text{restando} \quad 0 = q_5 - q_2 - q_1 + q_2 \Rightarrow \quad q_1 = q_5$$

Sumando (1) y (4)

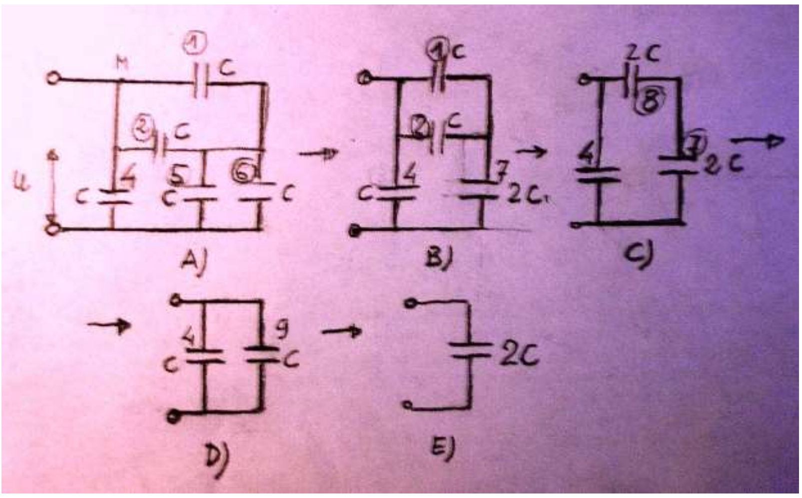
$$\left.\begin{array}{l} q_3 = -q_1 + q_6 = -q_1 + q_2 \\ q_3 = q_1 - q_2 \end{array}\right\} \text{sumando} \quad 2q_3 = 0 \Rightarrow \quad q_3 = 0$$

Si $q_3=0$, entonces $q_1=q_6$ y $q_2=q_5$, se deduce que los condensadores 1,2 5 y 6 tienen la misma carga y la designamos con q.

De la figura 1 se deduce que

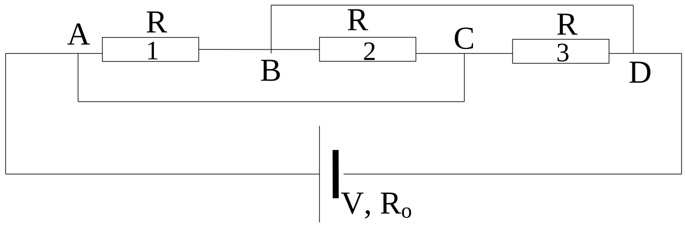
$$U = \frac{q_4}{C} \;\text{ y }\; V_{NA} + V_{AD} = \frac{q_2}{C} + \frac{q_5}{C} = U \;\Rightarrow\quad q_4 = q_2 + q_5 = 2q$$

Dado que $q_3 = 0$, el circuito del problema es como si no existiese el condensador 3 y por tanto PAB es un único punto. En la figura 2 A se indica cómo queda el circuito. Los condensadores 5 y 6 están en paralelo y se pueden sustituir por el 7 de capacidad 2C (fig.2B)El 1 y el 2 se sustituyen por el 8 de capacidad 2C (fig 2C) El 7 y el 8 por el 9 con capacidad C (fig 2D). Finalmente 4 y 9 están en paralelo y se pueden sustituir por un condensador de capacidad 2C (fig 2E).



El circuito del enunciado tiene su equivalente en un único condensador de capacidad 2C.

43.- A una fuente de corriente continua de resistencia interna R_o se unen tres resistencias iguales R, las cuales forman el esquema de la figura. Determinar para qué valor de R la potencia disipada en el conjunto de las tres resistencias es la máxima.



El conjunto de las tres resistencias puede ser reemplazado por una sola resistencia. Para ello tenemos en cuenta que los puntos Ay C están al mismo potencial y que los puntos B y D tienen el mismo potencial. Por tanto es posible reemplazar el circuito de la figura superior por el de la figura1

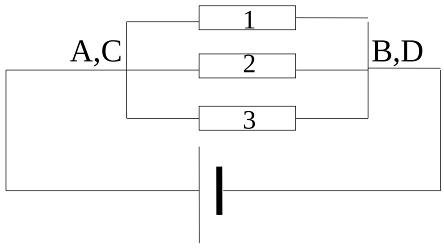


Fig.1

La resistencia equivalente al conjunto de las tres es R/3.

Aplicamos la ley de Ohm al circuito,

$$I = \frac{V}{R + R_o} \quad \Rightarrow \quad P = I^2 \cdot \frac{R}{3} = \left(\frac{V}{R + R_o}\right)^2 \cdot \frac{R}{3}$$

Para obtener la condición de potencia máxima derivamos P respecto de R e igualamos a cero

$$\frac{dP}{dR} = V^2 \frac{\left(\frac{R}{3} + R_o\right)^2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{R}{3} \cdot 2\left(\frac{R}{3} + R_o\right) \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{R}{3} + R_o\right)^4} = 0 \quad \Rightarrow \left(\frac{R}{3} + R_o\right)^2 - \frac{2}{3}R\left(\frac{R}{3} + R_o\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{R}{3} + R_o\right) - \frac{2}{3}R = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}R = R_o \quad \Rightarrow \quad R = 3R_o$$

44.-El modelo de Thomson para el átomo de hidrógeno es una esfera de radio R con carga positiva uniformemente distribuida sobre dicha esfera, en el centro de ella se encuentra un electrón. En conjunto el átomo es neutro. Calcular el valor de R si la energía mínima que hay que comunicar al electrón para arrancarlo del átomo y llevarlo al infinito vale W.
Datos: carga del electrón e= $1{,}6.10^{-19}$ C, W=13,6 eV

En principio suponemos que el electrón se encuentra en el infinito y que existe una esfera de radio R uniformemente cargada positivamente. Acercamos el electrón hasta la superficie de la esfera de radio R, lo cual nos supondrá un trabajo que designamos por W_1. Posteriormente introducimos el electrón en la esfera hasta dejarlo en el centro de ella, lo cual supondrá un trabajo W_2 .
Debemos tener en cuenta que el potencial eléctrico en el infinito es nulo y que el trabajo eléctrico es igual a

$$W = q\left(V_{\text{partida}} - V_{\text{llegada}}\right)$$

Calculamos el campo en la superficie de la esfera de radio R, para ello utilizamos el teorema de Gauss

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{e}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_S = \frac{e}{S} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_o R^2}$$

A partir del valor del campo calculamos el potencial en la superficie

$$E_S = -\frac{dV_S}{dR} \Rightarrow -V_S = \int \frac{e}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R^2}dR = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R} + Cte$$

Cuando R es infinito el potencial es cero, por lo que resulta:

$$V_S = \frac{e}{4\pi\varepsilon_o R}$$

El trabajo para llevar el electrón desde el infinito hasta la superficie de la esfera de radio R vale:

$$W_1 = e\left(0 - \frac{e}{4\pi\varepsilon_o R}\right) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o R}$$

El signo negativo indica que es un trabajo que se hace desde el exterior contra las fuerzas del campo.

Vamos a calcular el campo en el interior de la esfera de radio R. Para ello aplicamos el teorema de Gauss a una esfera concéntrica de radio r<R

$$E_I = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}$$

q es la carga que existe en el interior de la esfera de radio r.

Teniendo en cuenta que la esfera de radio R tiene la carga e uniformemente distribuida, la densidad volumétrica de carga es: $\frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ y la carga de la esfera de radio r

$$q = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = e\frac{r^3}{R^3}$$

El campo en el interior de la esfera de radio r es:

$$E_I = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e\frac{r^3}{R^3}}{r^2} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_o}\frac{r}{R^3}$$

Ahora calculamos el potencial en el interior de la esfera de radio R.

$$E_i = -\frac{dV_I}{dr} \Rightarrow -V_I = \int \frac{e}{4\pi\varepsilon_o R^3} r\,dr = \frac{e r^2}{8\pi\varepsilon_o R^3} + Cte$$

Para determinar la constante tenemos en cuenta que cuando r=R el potencial es: $V_S = \frac{e}{4\pi\varepsilon_o R}$

$$-\frac{e}{4\pi\varepsilon_o R} = \frac{e R^2}{8\pi\varepsilon_o R^3} + Cte \quad \Rightarrow \quad Cte = -\frac{3e}{8\pi\varepsilon_o R}$$

$$-V_I = \frac{e r^2}{8\pi\varepsilon_o R^3} - \frac{3e}{8\pi\varepsilon_o R} \Rightarrow V_I = \frac{3e}{8\pi\varepsilon_o R} - \frac{e r^2}{8\pi\varepsilon_o R^3}$$

El potencial en el centro de la esfera se obtiene haciendo r=0 en la ecuación anterior:

$$V_{centro} = \frac{3e}{8\pi\varepsilon_o R}$$

El trabajo W_2, para llevar el electrón desde la superficie al centro de la esfera de radio R es:

$$W_2 = e\left(V_{partida} - V_{llegada}\right) = e\left[\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R} - \left(\frac{3e}{8\pi\varepsilon_0 R}\right)\right] = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{3e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

Trabajo total.

$$W_T = W_1 + W_2 = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o R} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o R} - \frac{3e^2}{8\pi\varepsilon_o R} = -\frac{3e^2}{8\pi\varepsilon_o R}$$

El signo negativo indica que es un trabajo que se debe realizar desde el exterior:

$$W = \frac{3e^2}{8\pi\varepsilon_o R} \Rightarrow R = \frac{3e^2}{4\pi\varepsilon_o W} = \frac{3\cdot\left(1{,}6.10^{-19}\right)^2}{8\pi 8{,}85.10^{-12}\cdot 13{,}6\cdot 1{,}6.10^{-19}} = 1{,}6.10^{-10}\ m$$

45.-Dos anillos finos de alambre tienen el mismo radio R, están uno frente al otro, de modo que tienen el mismo eje. La carga de uno es +q y la del otro –q. a) Calcular la diferencia de potencial que existen entre los centros de los anillos. b) Calcular el campo en el eje del anillo cuando a = R =1 m

a) Designamos a los anillos con A y B. El potencial en el centro del anillo A se debe al potencial que crea en ese punto su carga +q y que llamamos V_{AA}, más el potencial que crea la carga del otro anillo –q y que denominamos V_{BA}.
Recordemos que el potencial creado por una carga puntual Q a una distancia d, está dado por la expresión

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{d}$$

En el anillo A la carga está distribuída de forma uniforme por todo el anillo siendo su densidad lineal

$$\lambda = \frac{q}{2\pi R}$$

Si consideremos un trocito del anillo de longitud dl tendrá una carga

$$dq = \lambda\, dl = \frac{q}{2\pi R} dl$$

Y creará en el centro del anillo, un potencial $dV_{AA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\frac{q}{2\pi R}dl}{R}$. El potencial creado por todo el anillo se obtiene integrando la anterior ecuación:

$$V_{AA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{R}\cdot\frac{q}{2\pi R}\int_0^{2\pi R} dl = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{R}$$

El potencial creado por el anillo B en el centro de A

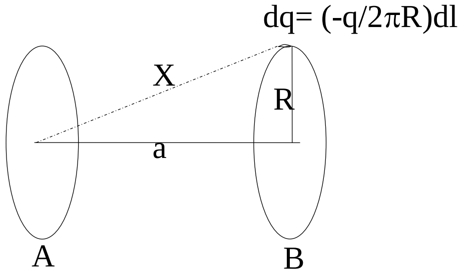


Fig.1

$$V_{BA} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{-q\,dl}{2\pi R}\cdot\frac{1}{Y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{-q}{2\pi R}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}}\int_0^{2\pi R} dl = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{\sqrt{a^2+R^2}}$$

El potencial en A es la suma de los dos potenciales

$$V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{\sqrt{a^2+R^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$$

El potencial en B es:

$$V_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(-\frac{1}{R} + \frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$$

La diferencia de potencial

$$V_A - V_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}} + \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}}\right) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$$

b) En la figura 2 se ha representado el campo creado por un trocito del anillo A de carga dq , situado en 1, y otro trocito del anillo B con carga –dq.

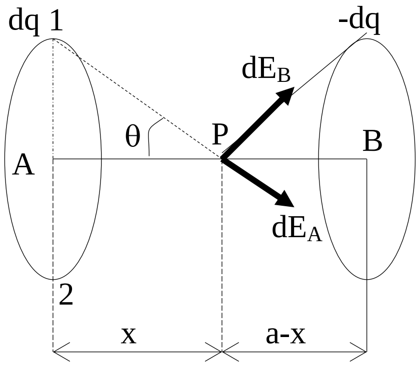


Fig.2

Si escogemos otro elemento del anillo A situado en 2 crearía un campo que sumado con el de 1 nos daría que la componente vertical se anula y la horizontal se suma. El razonamiento es válido para el anillo B.

$$dE_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{X^2} \Rightarrow \quad (dE_A)_X = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{X^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{X^3}\cdot R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (E_A)_X = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\frac{q}{2\pi R}dl}{\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qR}{\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$dE_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{Y^2} \Rightarrow \quad (dE_B)_X = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{Y^2}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{Y^3}\cdot R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (E_B)_X = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\frac{q}{2\pi R}dl}{\left[(a-x)^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}}\cdot R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qR}{\left[(a-x)^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

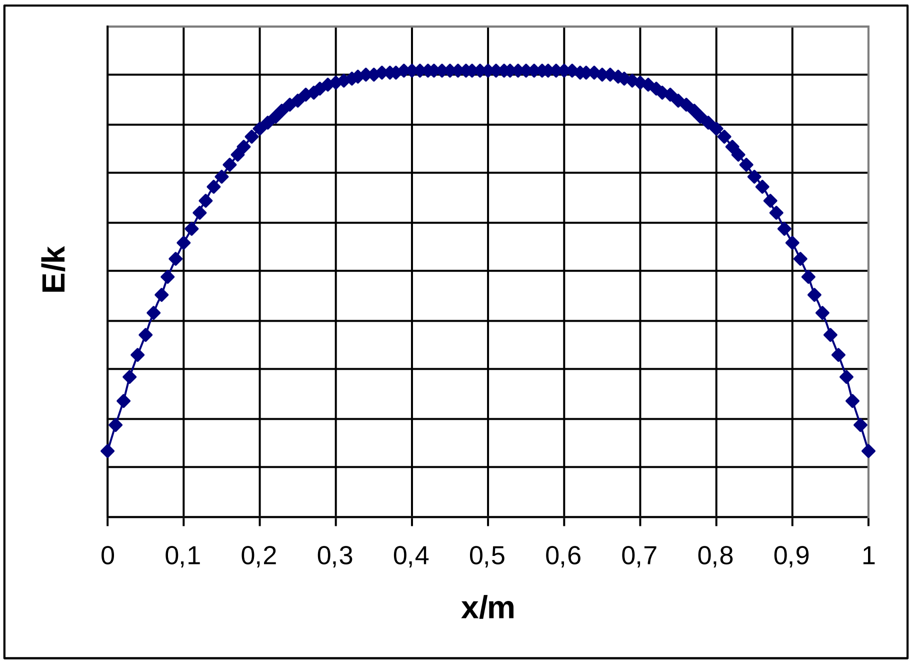
El campo en P es la suma de los dos anteriores

$$E = (E_A)_X + (E_B)_X = \frac{qR}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{\left(x^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[(a-x)^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right]$$

La ecuación anterior para a=R=1 m es:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[(1-x)^2+1\right]^{\frac{3}{2}}}\right] = k\left[\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[(1-x)^2+1\right]^{\frac{3}{2}}}\right]$$

Si en la ecuación damos valores a x y representamos E/k obtenemos una visión de cómo es el campo.



Alrededor de la posición x=0,5 m el campo es prácticamente constante desde x=0,3 m a x=0,7 m.

46.-Dos masas iguales m=10^{-3} kg con la misma carga Q =1 μC están apoyadas sobre un suelo horizontal a una distancia D =1 m. Ambas masas se mantienen en reposo. Posteriormente se dejan en libertad; sabiendo que el coeficiente de rozamiento de las mencionadas masas con el suelo es μ=0,1, se pide a) La distancia que recorrerá cada una de las masas hasta que se paran b) La ecuación de la velocidad de las masas c) El valor numérico de la velocidad máxima durante el movimiento.
d) La gráfica de la velocidad frente a la distancia recorrida
Datos g=10 m/s^2 ; ε_o=8,85.10^{-12} N^{-1} m^{-2} C^2

a) Cuando las masas se dejan en libertad se desplazan alejándose entre sí. Inicialmente las dos masas, debido a sus cargas, poseen energía potencial eléctrica, la cual disminuye a medida que se alejan, pero durante el movimiento existe una fuerza de rozamiento que realiza un trabajo disipativo. Un balance de energía nos dice que las masas se pararan cuando la pérdida de energía potencial eléctrica sea igual al trabajo de las fuerzas de rozamiento.
Designamos con z a la distancia que recorre cada una de las masas hasta que se paran. El balance de energía es el siguiente:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q^2}{D}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q^2}{D+2z}=\mu m g\cdot 2z \Rightarrow \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{D+2z}\right)=\mu m g\cdot 2z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o\,\mu m g}\left[\frac{2z}{D(D+2z)}\right]=2z \Rightarrow \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o\mu m g D}=D+2z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o\,\mu m g D}-\frac{D}{2} \Rightarrow z=\frac{10^{-12}}{8\pi\cdot 8{,}85.10^{-12}\cdot 0{,}1\cdot 10^{-3}\cdot 10\cdot 1}-\frac{1}{2}=4{,}0\,\mathrm{m}$$

b) Designamos con x<z la distancia recorrida por cada una de las masas. La distancia entre ambas masas es D+2x y las fuerzas que actúan sobre una de las masas es la fuerza de repulsión eléctrica y la fuerza de rozamiento, ambas con la misma dirección y sentido contrario. Aplicamos la segunda ley de Newton

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q^2}{(D+2x)^2}-\mu m g=m a=m\frac{dv}{dt}=m\cdot\frac{dx}{dt}=m v\frac{dv}{dx}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q^2}{(D+2x)^2 m}dx-\int\mu g\,dx=\int v\,dv$$

Para resolver la primera integral hacemos el siguiente cambio de variable: D+2x=a
Y por tanto 2 dx =da

$$\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o m}\int\frac{da}{2a^2}=-\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o m}\cdot\frac{1}{2a}=-\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o m}\cdot\frac{1}{2(D+2x)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o m}\cdot\frac{1}{2(D+2x)}-\mu g x=\frac{v^2}{2}+Cte\Rightarrow$$

Cuando x =0 , la velocidad es cero

$$-\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o m}\cdot\frac{1}{2D}=0+Cte\Rightarrow\frac{v^2}{2}=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o m}\cdot\frac{1}{2D}-\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o m}\cdot\frac{1}{2(D+2x)}-\mu g x\Rightarrow$$

$$v=\sqrt{\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o m}\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{D+2x}\right)-2\mu g x}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{10^{-12}}{4\pi 8.85.10^{-12}10^{-3}}\left(1-\frac{1}{1+2x}\right)-2\cdot 0{,}1\cdot 10x}$$

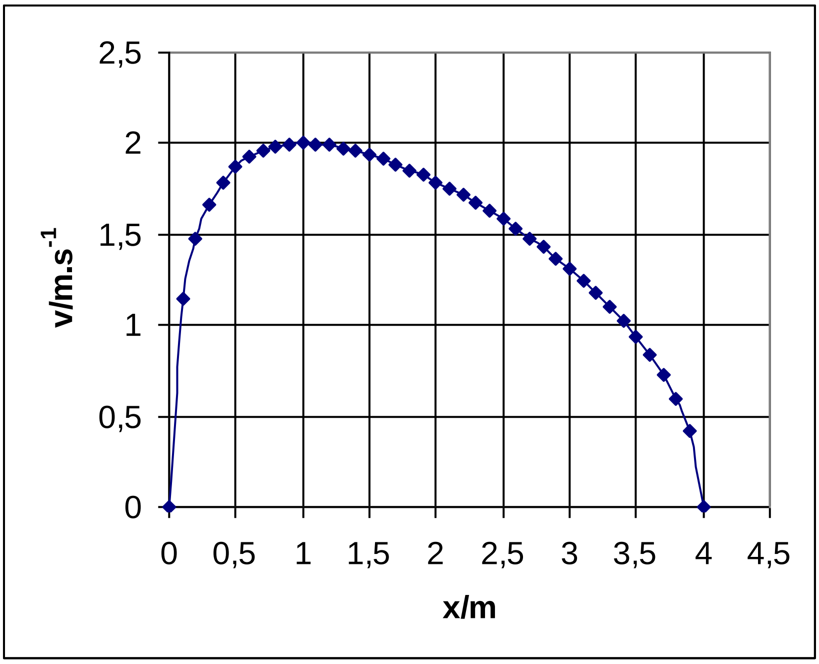
$$v=\sqrt{9\left(\frac{1+2x-1}{1+2x}\right)-2x}=\sqrt{\frac{16x-4x^2}{1+2x}}$$

c) Para hallar la velocidad máxima derivamos v con respecto x e igualamos a cero

$$\frac{dv}{dx}=\frac{\dfrac{(1+2x)\cdot(16-8x)-(16x-4x^2)\cdot 2}{(1+2x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{16x-4x^2}{1+2x}}}=0\quad\Rightarrow 16-8x+32x-16x^2-32x+8x^2=0\Rightarrow$$

$$16-8x-8x^2=0\quad\Rightarrow\quad x^2+x-2=0\Rightarrow\quad x=1\text{ m}\Rightarrow\quad v=\sqrt{\frac{16\cdot 1-4\cdot 1^2}{1+2\cdot 1}}=2\frac{m}{s}$$

d)



47.-Un motor eléctrico de corriente continua se conectó a una tensión U. La resistencia del inducido del anillo es R. Si la potencia del motor es la máxima posible, indicar a) cuál es la intensidad que atraviesa el devanado b) el valor de la potencia máxima y c) el rendimiento del motor.

a) Designamos en general por i la intensidad que atraviesa el devanado del motor para una potencia cualquiera del motor.

Ui es la potencia suministrada al circuito por la tensión, εi la potencia desarrollada en el motor, i^2R la potencia que se desarrolla en el devanado debido al efecto Joule.

Según el principio de conservación de la energía

$$Ui = \varepsilon I + i^2 R \Rightarrow \varepsilon i = Ui - i^2 R$$

Como la potencia εi ha de ser la máxima posible, derivamos εi con respecto a i e igualamos a cero

$$\frac{d\,\varepsilon i}{di} = U - 2i\ R = 0\ \Rightarrow\ i = \frac{U}{2R}$$

b) Potencia máxima

$$P_{max} = \varepsilon\, i = Ui - i^2 R = \frac{U^2}{2R} - \frac{U^2}{4R^2} R = \frac{U^2}{4R}$$

c) Rendimiento

$$\eta = \frac{\varepsilon i}{Ui} = \frac{\frac{U^2}{4R}}{U\frac{U}{2R}} = \frac{1}{2}$$

48.- Una partícula alfa (Z=2, A = 4)(posee una energía de 0,40 MeV y se dirige frontalmente contra un núcleo pesado de plomo (Z=82) que se encuentra en reposo. a) Determinar la distancia mínima a la que se acerca la partícula alfa a dicho núcleo. b) Realizar el mismo calculo si la partícula se acerca frontalmente a un núcleo ligero de Litio (Z = 3 , A=7). Dato: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} = 9.10^9 \frac{N\,m^2}{C^2}$

a) Una suposición razonable es considerar que el núcleo pesado de plomo, aunque se le acerca la partícula alfa, permanece en reposo. Con este supuesto, la partícula alfa al irse acercando al núcleo de plomo pierde energía cinética que aparece en forma de energía potencial eléctrica.

$$E_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_\alpha q_{Pb}}{r} \Rightarrow 0,40.10^6 \cdot 1,6.10^{-19} = 9.10^9 \frac{2\cdot 1,6.10^{-19}\cdot 82\cdot 1,6.10^{-19}}{r} \Rightarrow$$

$$r = \frac{9.10^9 \cdot 2\cdot 1,6.10^{-19}\cdot 82}{0,40.10^6} = 5,9.10^{-13}\ \mathrm{m} = 0,59\mathrm{pm}$$

b) Cuando la partícula alfa se encuentra muy lejos del núcleo de litio posee una velocidad que designamos con v_o. Al irse acercando al núcleo de litio pierde velocidad y el núcleo de litio la gana, así que llegará un momento en que ambas velocidades se igualen, llamamos v a esta velocidad, cuando esto ocurre la distancia entre la partícula alfa y el núcleo de litio es la mínima.
Aplicamos los principios de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento

$$\frac{1}{2}m_\alpha v_o^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_\alpha q_{Li}}{r} + \frac{1}{2}(m_\alpha + m_{Li})v^2 \quad ; \quad m_\alpha v_o = (m_\alpha + m_{Li})v \Rightarrow v = \frac{m_\alpha v_o}{m_\alpha + m_{Li}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_\alpha v_o^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_\alpha q_{Li}}{r} + \frac{1}{2}(m_\alpha + m_{Li})\left(\frac{m_\alpha v_o}{m_\alpha + m_{Li}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_\alpha v_o^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_\alpha q_{Li}}{r} + \frac{1}{2}\frac{(m_\alpha v_o)^2}{m_\alpha + m_{Li}} \Rightarrow \qquad \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_\alpha q_{Li}}{r} = \frac{1}{2}m_\alpha v_o^2 - \frac{1}{2}\frac{(m_\alpha v_o)^2}{m_\alpha + m_{Li}} \quad (1)$$

Si E_c designa la energía cinética inicial de la partícula alfa tenemos que:

$$E_C = \frac{1}{2}m_\alpha v_o^2 \Rightarrow m_\alpha v_o^2 = 2E_C$$

Llevando lolas ecuaciones anteriores a (1) resulta:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_\alpha q_{Li}}{r} = E_C - \frac{1}{2}\frac{m_\alpha \cdot 2E_c}{m_\alpha + m_{Li}} = E_C\left(1 - \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_{Li}}\right) = E_C\left(\frac{m_{Li}}{m_\alpha + m_{Li}}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{q_\alpha q_{Li}}{4\pi\varepsilon_o \cdot E_C\left(\frac{m_{Li}}{m_\alpha + m_{Li}}\right)} = \frac{9.10^9 \cdot 2 \cdot 1{,}6.10^{-19} \cdot 3 \cdot 1{,}6.10^{-19}}{0{,}40.10^6 \cdot 1{,}6.10^{-19}\left(\frac{7}{4+7}\right)} = 3{,}4.10^{-14}\,\mathrm{m} = 0{,}034\mathrm{pm}$$

49.-Dos cargas puntuales +q y –q están situadas sobre el eje X, la positiva con x=-L y la negativa con x=+L. Un círculo de radio R tiene su centro en el origen de coordenadas y está situado en el plano YZ. Se pide el flujo eléctrico que atraviesa el mencionado círculo.

Por definición el flujo eléctrico que atraviesa una superficie es:

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

En la figura 1 está representado el círculo de radio R. El campo eléctrico varía de unos puntos a otros del círculo, por ello se ha tomado, a una distancia x, un anillo circular de espesor dx. Todos los puntos de ese anillo están a la misma distancia de las cargas y por tanto en todos ellos existe el mismo campo eléctrico.

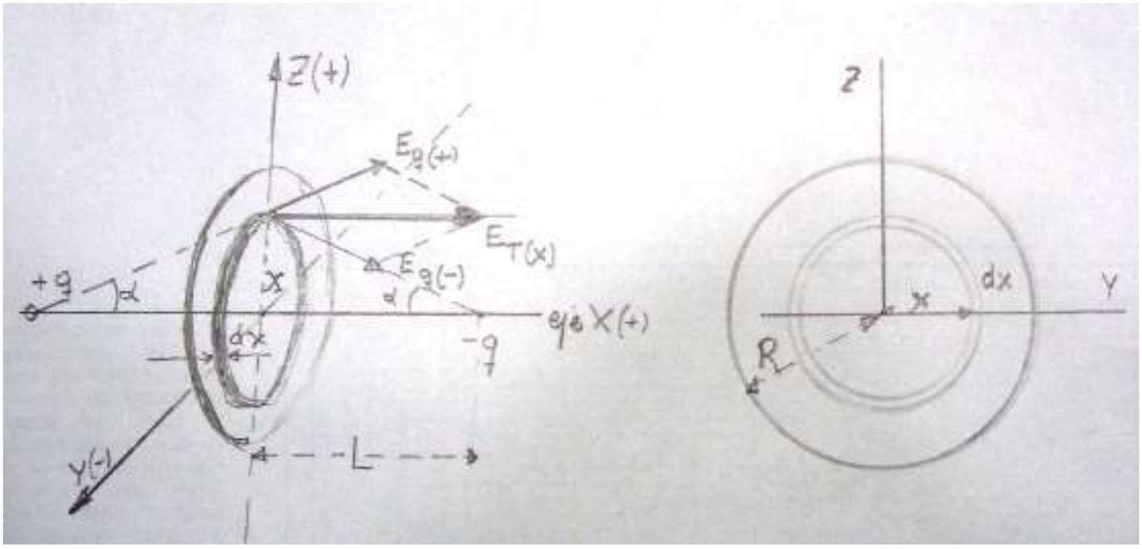


Fig.1

En la figura 1 se observan los campos que crean las dos cargas y se deduce que las componentes sobre el eje X se suman mientras que las que están sobre el eje Y se anulan.

$$E_X(+q) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{\left(L^2+x^2\right)}\cdot\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{\left(L^2+x^2\right)}\cdot\frac{L}{\sqrt{L^2+x^2}} \;;$$

$$E_X(-q) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{\left(L^2+x^2\right)}\cdot\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{\left(L^2+x^2\right)}\cdot\frac{L}{L+x}$$

$$E_{T(x)} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{q\ L}{\left(L^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$E_{T(x)}$ es perpendicular al anillo. La integral del flujo resulta ser:

$$\Phi_E = \int_0^R E_{T(X)} \cdot 2\pi x\, dx = \int_0^R \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{qL}{\left(L^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2\pi x\, dx = \frac{q\,L}{\varepsilon_o} \int_0^R \frac{x\, dx}{\left(L^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot$$

Para resolver la integral hacemos el cambio de variable

$$L^2 + x^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad x\, dx = a\, da$$

$$\int_0^R \frac{a\, da}{a^3} = -\frac{1}{a}\Bigg]_o^R = -\frac{1}{\sqrt{L^2 + x^2}}\Bigg]_o^R = \frac{1}{L} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + R^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_o}\left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + R^2}}\right)$$