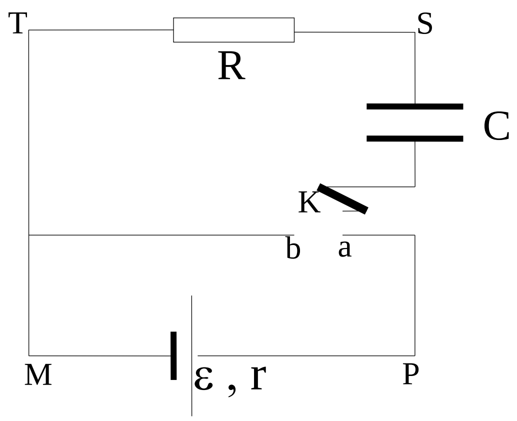
50.-En el circuito de la figura el conmutador electrónico K realiza N ciclos por segundo entre a y b. Cuando dicho conmutador está en la posición a, el condensador se encuentra completamente cargado y cuando está en b se descarga totalmente. Calcular la relación entre la potencia disipada en la resistencia R y la potencia suministrada por la pila.



Veamos en primer lugar cómo funciona el circuito. Cuando K hace contacto con a, la pila carga el condensador, de modo que éste en el instante inicial tiene carga cero y al cabo de un tiempo Δt se carga completamente siendo Q la carga de una de sus armaduras. Mientras se carga el condensador la intensidad que recorre la resistencia R la designamos con I, siendo I variable. Esta misma intensidad pasa por la pila.
Cuando a continuación el conmutador pasa a la posición b, la pila queda desconectada del condensador, y entonces el condensador se descarga a través de la resistencia R.

En el instante en que circula la intensidad I resulta que:

$$V_C + IR = V_{MP} = \varepsilon - Ir$$

Siendo V_C la caída de tensión entre las armaduras del condensador. En el instante inicial V_C es cero, pero a medida que transcurre el tiempo V_C aumenta y llegará un momento en que $V_C = \varepsilon$, entonces el condensador se ha cargado completamente con una carga Q, y la intensidad de la corriente es nula.
La carga Q ha pasado por la pila por lo que ésta ha dado al circuito una energía $W=Q\varepsilon$ en cada ciclo. El condensador almacena en cada ciclo una energía $W_C=\frac{1}{2}C\varepsilon^2$ .Teniendo en cuenta que $C=\frac{Q}{\varepsilon} \Rightarrow W = Q\varepsilon = C\varepsilon^2$, por tanto, la mitad de la energía suministrada por la pila se la lleva el condensador y la otra mitad es energía térmica que se disipa en la resistencia R y en la interna r de la pila. Como por la pila y por R pasa la misma intensidad de corriente y durante el mismo tiempo, las energías guardan la relación

$$\frac{W_R}{W_r} = \frac{R}{r} \Rightarrow W_r = W_R \frac{r}{R}$$

$$W_R + W_r = W_R\left(1+\frac{r}{R}\right) = \frac{1}{2}C\varepsilon^2 \Rightarrow \quad W_R = \frac{C\varepsilon^2 R}{2(R+r)}$$

Cuando el conmutador K pasa a b, la energía almacenada en el condensador pasa a la resistencia R, la energía en R y en un ciclo es:

$$W_R + \frac{1}{2}C\varepsilon^2 = \frac{C\varepsilon^2 R}{2(R+r)} + \frac{1}{2}C\varepsilon^2 = \frac{C\varepsilon^2}{2}\left(\frac{R}{R+r}+1\right) = \frac{C\varepsilon^2}{2}\left(\frac{2R+r}{R+r}\right)$$

Si se verifican N ciclos por segundo la potencia suministrada por la pila es $P_P = N\,Q\,\varepsilon$ y la potencia consumida en la resistencia R es: P_R

$$\frac{P_R}{P_P} = \frac{N\frac{C\varepsilon^2}{2}\left(\frac{2R+r}{R+r}\right)}{NQ\varepsilon} = \frac{\frac{C\varepsilon^2}{2}\left(\frac{2R+r}{R+r}\right)}{C\varepsilon^2} = \frac{2R+r}{2(R+r)}$$

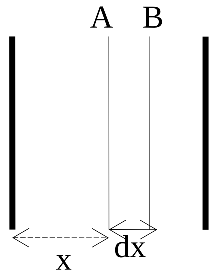
51.-Entre las armaduras de un condensador plano se coloca un dieléctrico que tiene la propiedad de que su constante dieléctrica varía linealmente entre los valores ε_1 y ε_2 siendo $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Determinar la capacidad de este condensador.

Designamos con q a la carga y con S la superficie de una armadura del condensador. El desplazamiento eléctrico es igual a:

$$D = \frac{q}{S} = \sigma$$

D está ligado a las cargas libres.

En la figura consideramos una sección del dieléctrico AB, que dista x de la armadura izquierda y que tiene un espesor dx ; d es la distancia entre las armaduras del condensador, ε_X es la constante dieléctrica de AB.



Teniendo en cuenta que D está ligado a las cargas libres, escribimos

$$D = \varepsilon_X \varepsilon_o E_X = \frac{q}{S} \quad \Rightarrow \quad E_X = \frac{q}{S\,\varepsilon_X \varepsilon_o}$$

La diferencia de potencial entre A y B es:

$$dV_{AB} = E_X dx = \frac{q}{S\varepsilon_X \varepsilon_o} dx$$

Dado que la constante dieléctrica varía linealmente con la distancia podemos escribir:

$$\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} = \frac{\varepsilon_X - \varepsilon_1}{x} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_X = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)x}{d} + \varepsilon_1$$

Sustituyendo en la ecuación anterior

$$dV_{AB} = E_X dx = \frac{q}{S\varepsilon_o\left[\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)x}{d}+\varepsilon_1\right]}dx \Rightarrow V_{AB} = \frac{q}{S\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\cdot \ln\left(\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)x}{d}+\varepsilon_1\right)_0^d$$

$$V_{AB} = \frac{q}{S\varepsilon_o}\cdot\frac{d}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\left[\ln(\varepsilon_2-\varepsilon_1+\varepsilon_1)-\ln\varepsilon_1\right] = \frac{q\,d}{S\varepsilon_o}\cdot\frac{\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$$

La capacidad del condensador es:

$$C = \frac{q}{V_{AB}} = \frac{q\,d}{\frac{q}{S\varepsilon_o}\frac{\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}} = \frac{S\varepsilon_o\,(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{d\left(\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)}$$

52.- Una delgada barra recta de longitud 2a posee una carga distribuida uniformemente de valor q. Se pide el campo eléctrico creado por dicha barra en los puntos P y P´ que distan del centro de la barra la distancia r. P se encuentra en la recta perpendicular al centro de la barra y P´ en el eje de la barra, siendo r>a.

En la figura 1 se indica la posición de P.

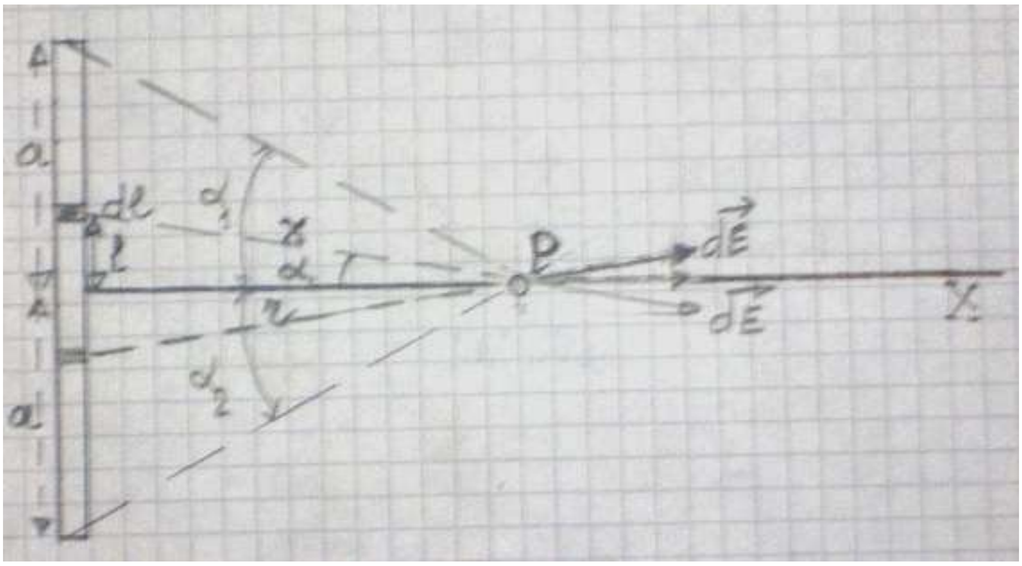


Fig.1

Sobre la barra se elige un elemento de longitud dl situado a una distancia l del centro de la barra que posee una carga $\frac{q}{2a}dl$ Este elemento crea en P un campo

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\frac{q}{2a}dl}{x^2}\vec{i}$$

cuyas componentes son : $d\vec{E}\cos\alpha \;\; ; \; -d\vec{E}\text{sen}\alpha$. Como sobre la barra se puede escoger otro elemento dl simétrico del anterior que origina un campo cuyas componentes son $d\vec{E}\cos\alpha \;\; ; \; d\vec{E}\text{sen}\alpha$, se deduce que solamente hemos de considerar la componente sobre el je X , esto es, la componente horizontal. Empleando módulos llegamos a

$$dE_X = dE\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{2a}\frac{\cos\alpha}{x^2}dl$$

En la ecuación anterior existen tres variable, a saber, l, x y α.,las cuales están relacionada entre sí , por lo que la ecuación anterior la transformamos para que sólo quede en función de α.
De la figura 1 se deduce:

$$l = r\,\mathrm{tag}\alpha \;\Rightarrow\; dl = \frac{r}{\cos^2\alpha}d\alpha \;; \qquad x = \frac{r}{\cos\alpha}$$

Llevamos estas relaciones a la ecuación del campo

$$dE_X = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{2a}\frac{\cos\alpha}{\frac{r^2}{\cos^2\alpha}}\frac{r\,d\alpha}{\cos^2\alpha} \;\Rightarrow\; E_X = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{2ar}\int_{\alpha 2}^{\alpha 1}\cos\alpha\,d\alpha \Rightarrow$$

$$E_X = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{2ar}\left(\mathrm{sen}\alpha_1 - \mathrm{sen}\alpha_2\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{2ar}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}} - \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}\right)\right]$$

$$E_X = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r\sqrt{a^2+r^2}}$$

En la figura 2 se representa la posición de P´, en el eje de la barra y el campo creado por el elemento de corriente de longitud dx

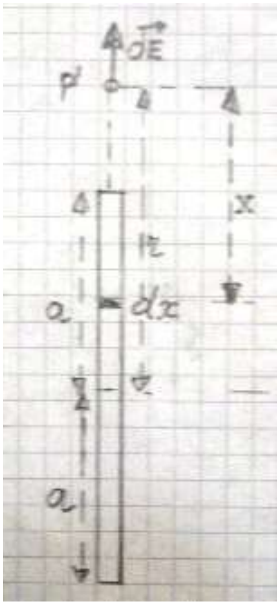


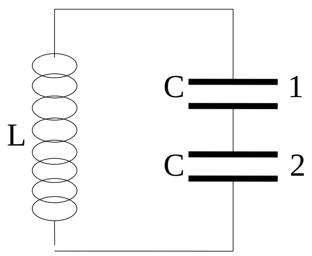
Fig.2

El campo creado por ese elemento de carga es:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{2a}\frac{dx}{x^2} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{2a}\int_{r-a}^{r+a}\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{2a}\left(-\frac{1}{r+a} + \frac{1}{r-a}\right) \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{2a}\left(\frac{-r+a+r+a}{(r-a)^2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{(r-a)^2}$$

53.-En el circuito de la figura inferior los dos condensadores tienen la misma capacidad C y la bobina tiene un coeficiente de autoinducción L. No hay resistencia óhmica en el circuito. El condensador 1 se carga con una diferencia de potencial ε, el 2 está descargado.
Determinar. a) La intensidad que circula por el circuito en régimen estacionario. b) Las ecuaciones de las cargas de los condensadores frente al tiempo. c) Si C = 1μ F , L=0,1 H , ε=100V dibujar la gráfica intensidad frente al tiempo y la gráfica de la carga de los condensadores frente al tiempo . Calcular el tiempo que transcurre desde que el condensador 1 está completamente cargado hasta que su carga se reduce a la mitad.



a) El circuito es oscilante y su periodo es igual a $T = 2\pi\sqrt{LC_E} = 2\pi\sqrt{L\frac{C}{2}}$. La intensidad en régimen estacionario es armónica

$$I = I_m \operatorname{sen}\omega t = I_m \operatorname{sen}\frac{2\pi}{T}t$$

La carga inicial del condensador 1 es igual a $q_i = C\varepsilon$.
En un determinado instante la carga del condensador 2 es q_2, la del condensador 1 q_i-q_2 y la intensidad instantánea I.

Al no haber resistencia óhmica no hay pérdidas de energía calorífica y podemos escribir que la energía reinicial del condensador 1 está ahora repartida en la autoinducción y en los dos condensadores.

$$\frac{q_i^2}{2C} = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{(q_i - q_2)^2}{2C} + \frac{q_2^2}{2C} \Rightarrow I = \sqrt{\frac{q_i^2 - (q_i - q_2)^2 - q_2^2}{L\,C}} = \sqrt{\frac{2q_iq_2 - 2q_2^2}{LC}} \quad (1)$$

Para calcular la intensidad máxima derivamos I con respecto a q_2 e igualamos a cero.

$$\frac{dI}{dq_2} = \frac{2q_i - 4q_2}{2\sqrt{\frac{2q_iq_2 - 2q_2^2}{LC}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{q_i}{2}$$

Llevamos esta condición a la ecuación de la intensidad

$$I_m = \sqrt{\frac{2q_i\frac{q_i}{2} - 2\frac{q_i^2}{4}}{LC}} = \sqrt{\frac{q_i^2}{2LC}} = \sqrt{\frac{C^2\varepsilon^2}{2LC}}$$

La ecuación de la intensidad en el circuito es:

$$I = \sqrt{\frac{C^2\varepsilon^2}{2LC}}\cdot \mathrm{sen}\frac{2\pi}{T}t = \sqrt{\frac{C^2\varepsilon^2}{2LC}}\cdot \mathrm{sen}\frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{LC}{2}}}t = \sqrt{\frac{C^2\varepsilon^2}{2LC}}\cdot \mathrm{sen}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t \quad (2)$$

b) Igualamos la ecuación (1) y (2)

$$\sqrt{\frac{C^2\varepsilon^2}{2LC}}\cdot \mathrm{sen}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t = \sqrt{\frac{2q_iq_2 - 2q_2^2}{LC}} \Rightarrow \frac{C^2\varepsilon^2}{2LC}\cdot \mathrm{sen}^2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t = \frac{2q_iq_2 - 2q_2^2}{LC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_2^2 - q_iq_2 + \frac{C^2\varepsilon^2}{4}\cdot \mathrm{sen}^2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t = 0 \Rightarrow q_2 = \frac{q_i \pm \sqrt{q_i^2 - 4\cdot\frac{C^2\varepsilon^2}{4}\cdot \mathrm{sen}^2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t}}{2} \Rightarrow$$

$$q_2 = \frac{q_i \pm \sqrt{q_i^2 - 4\cdot\frac{q_i^2}{4}\cdot \mathrm{sen}^2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t}}{2} = \frac{q_i \pm \sqrt{q_i^2\cdot\left(1 - \mathrm{sen}^2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t\right)}}{2} = \frac{q_i\left(1 \pm \cos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t\right)}{2}$$

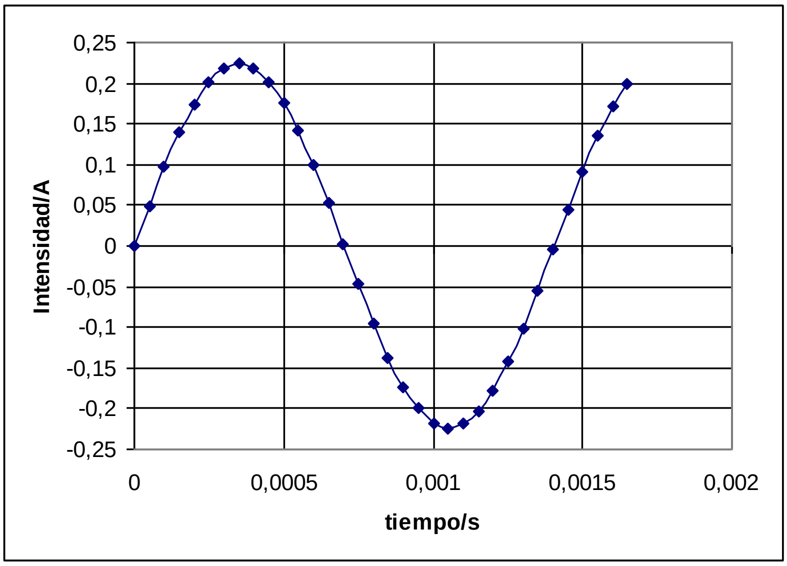
Para t=0 la carga del condensador 2 es nula, por tanto, en la ecuación anterior escogemos el signo negativo

$$q_2 = \frac{q_i}{2}\left(1 - \cos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t\right) \quad \Rightarrow \quad q_1 = q_i - q_2 = q_1 - \frac{q_i}{2}\left(1 - \cos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t\right) = \frac{q_i}{2}\left(1 + \cos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t\right)$$

c) Sustituimos en (2) los valores numéricos

$$I = \sqrt{\frac{\left(10^{-6}\right)^2\cdot\left(10^2\right)^2}{2\cdot 0{,}1\cdot 10^{-6}}}\mathrm{sen}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{0{,}1\cdot 10^{-6}}} = 0{,}22\,\mathrm{sen}\,4472t \quad A$$

Dando valores a t se obtiene la siguiente gráfica.
3g

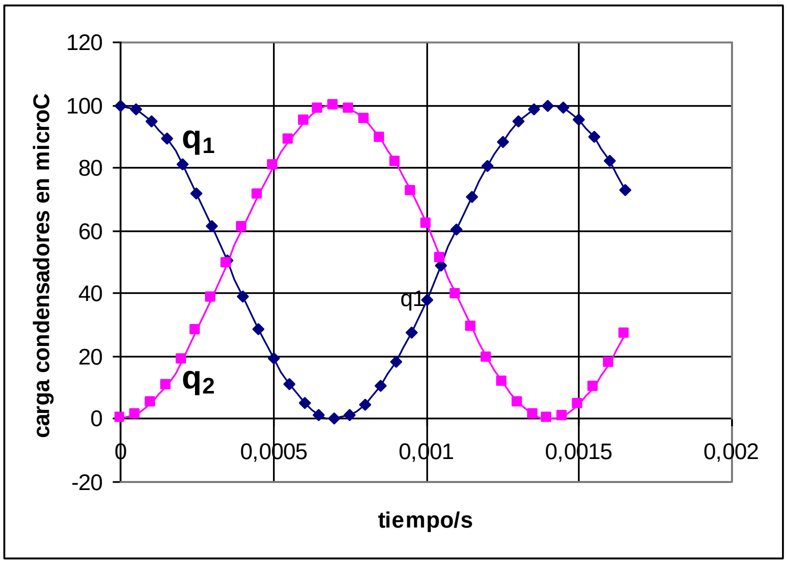


Sustituimos los valores numéricos en q_1 y q_2.

$$q_i = 10^{-6} \cdot 10^{2} = 10^{-4} = 100\mu C \quad \Rightarrow \quad q_1 = 50\left(1 + \cos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t\right) = 50(1+\cos 4472t)\mu C$$

$$q_2 = 50\left(1 - \cos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t\right) = 50(1-\cos 4472t)\mu C$$

Dando valores a t se obtiene la siguiente gráfica

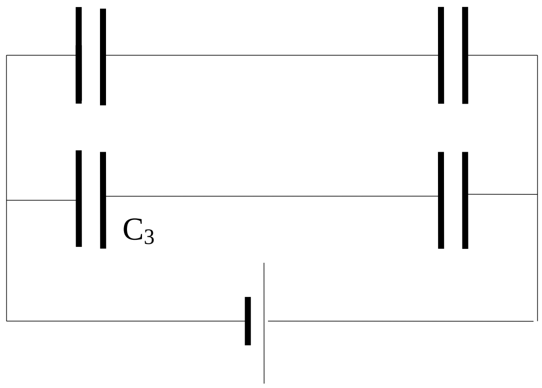


Cuando los dos condensadores tienen la misma carga es que el 1 la ha reducido a la mitad

$$1+\cos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t = 1-\cos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t \Rightarrow 2\cos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}}t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

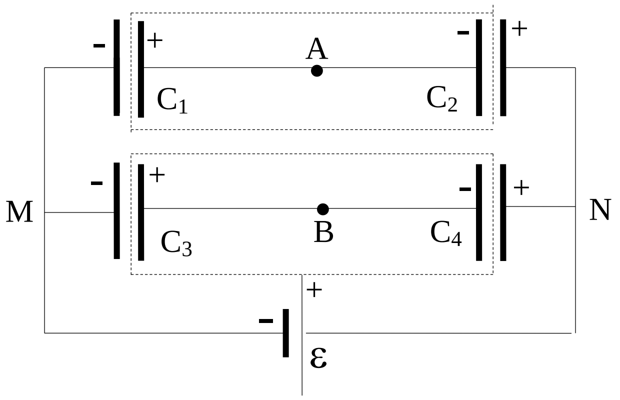
$$t = \frac{\pi\sqrt{LC}}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{0,1\cdot 10^{-6}}}{2\sqrt{2}} = 0,00035s$$

54.-Calcular la diferencia de potencial entre los puntos A y B del circuito de la figura inferior.



Establecer la condición para que la diferencia de potencial V_A-V_B sea nula.

Teniendo en cuenta los signos de la batería podemos asignar a cada condensador el signo de las cargas de sus armaduras.



Designamos con q_1, q_2 , q_3 y q_4 la carga de cada condensador. La línea de puntos entre los condensadores 1 y 2 nos indica que la suma de las cargas es nula, esto es, q_1=q_2. Análogamente para los condensadores 3 y 4 , q_3=q_4.

$$V_A - V_M = \frac{q_1}{C_1} \ (1) \ ; \ V_N - V_A = \frac{q_2}{C_2} \ (2) \ ; \ V_B - V_M = \frac{q_3}{C_3} \ (3) \ ; \ V_N - V_B = \frac{q_4}{C_4} \ (4)$$

De (1) y (3) resulta: $V_A - V_B = \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_3}{C_3}$; De (2) y (4) resulta: $V_A - V_B = \frac{q_4}{C_4} - \frac{q_2}{C_2}$

De (1) y (2)

$$V_N - V_M = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = \varepsilon \Rightarrow \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1}{C_2} = \varepsilon \ \Rightarrow \ \frac{q_1(C_1 + C_2)}{C_1 C_2} = \varepsilon \ \Rightarrow \ q_1 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\varepsilon = q_2$$

De (3) y (4)

$$V_N - V_M = \frac{q_3}{C_3} + \frac{q_4}{C_4} = \varepsilon \Rightarrow \frac{q_3}{C_3} + \frac{q_3}{C_4} = \varepsilon \Rightarrow \frac{q_3(C_3 + C_4)}{C_3 C_4} = \varepsilon \Rightarrow q_3 = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4}\varepsilon = q_4$$

$$V_A - V_B = \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_3}{C_3} = \frac{\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\varepsilon}{C_1} - \frac{\frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4}\varepsilon}{C_3} = \varepsilon\left(\frac{C_2}{C_1 + C_2} - \frac{C_4}{C_3 + C_4}\right) = \varepsilon\frac{C_2 C_3 - C_1 C_4}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}$$

Para que V_A-V_B sea cero debe serlo el numerador de la ecuación anterior

$$C_2 C_3 = C_1 C_4 \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{C_3}{C_4}$$

55.-El espacio entre dos esferas concéntricas de radios r_1 y r_2 , siendo $r_2>r_1$, está lleno de un dieléctrico con constante dieléctrica ε. En el centro de las esferas se encuentra una carga puntual de valor +Q. Calcular la intensidad del campo eléctrico y el potencial en los siguientes casos:

a) $r>r_2$ b) $r_1<r<r_2$ c) $r<r_1$.

Designamos con –q la carga de polarización del dieléctrico que hace contacto con la esfera de radio r_1 y +q cuando hace contacto con la esfera de radio r_2.

a) $r>r_2$

Supongamos una esfera imaginaria de radio r concéntrica con las otras dos y aplicamos el teorema de Gauss

$$\int \vec{E}\cdot dS = \frac{\sum Q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q+q-q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \quad (1)$$

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int -dV = \int E\,dr = \int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} dr \Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r} + Cte$$

Cuando $r=\infty$, el potencial, por definición, es nulo, luego:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r} \quad (2)$$

b) $r_1<r<r_2$

Consideramos una superficie esférica concéntrica con las anteriores y de radio r y aplicamos el teorema de Gauss

$$\int \vec{E}\cdot dS = \frac{\sum Q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q-q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q-q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

Si no hubiese dieléctrico el campo valdría $E_o = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \Rightarrow E = \frac{E_o}{\varepsilon}$

$$\frac{Q-q}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}}{\varepsilon} \Rightarrow Q-q = \frac{Q}{\varepsilon} \Rightarrow q = Q\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right) = Q\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$$

El valor del campo es:

$$E = \frac{Q-Q\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o\,\varepsilon\, r^2} \quad (3)$$

Calculamos el potencial

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int -dV = \int E\,dr = \int \frac{Q - q}{4\pi\varepsilon_o r^2} dr \quad \Rightarrow \quad V = \frac{Q - q}{4\pi\varepsilon_o r} + Cte$$

Para hallar la constante de integración tenemos en cuenta que cuando $r = r_2$, el potencial viene dado por la ecuación (2)

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r_2} = \frac{Q - q}{4\pi\varepsilon_o r_2} + Cte \Rightarrow Cte = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r_2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r_2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r_2}$$

$$V = \frac{Q - q}{4\pi\varepsilon_o r} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r_2} = \frac{Q - Q\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}}{4\pi\varepsilon_o r} + \frac{Q\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}}{4\pi\varepsilon_o r_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o \varepsilon r} + \frac{Q(\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon_o \varepsilon r_2} \Rightarrow$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\varepsilon r} + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon r_2}\right) \quad (4)$$

b) $r<r_1$

Consideramos una superficie esférica concéntrica con las anteriores de radio r y aplicamos el teorema de Gauss

$$\int \vec{E} \cdot dS = \frac{\sum Q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int -dV = \int E\,dr = \int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} dr \quad \Rightarrow \quad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r} + Cte$$

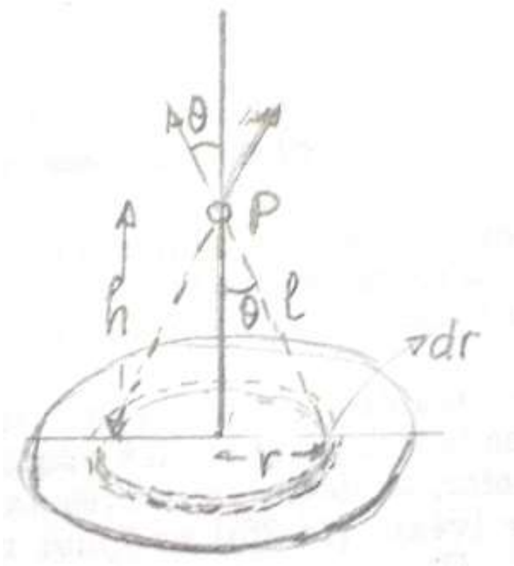
Cuando $r=r_1$ el potencial adquiere el valor dado por (4)

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\varepsilon r_1} + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon r_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r_1} + Cte \Rightarrow Cte = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\varepsilon r_1} + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\varepsilon r_1} + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon r_2}\right]$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{r_1} + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon r_2}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r} + \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)\right]$$

56.-Un disco posee una carga superficial con una densidad $\sigma = k r^2$, donde r es la distancia desde el centro del disco. El radio del disco es r_o. Hallar la intensidad del campo eléctrico en la perpendicular al plano del disco que pasa por su centro y a una altura h.



Consideramos una corona circular de radio r y espesor dr. Su superficie es $dS = 2\pi r\,dr$ y su carga eléctrica $dq = 2\pi r dr \cdot k r^2 = 2\pi r^3 k\,dr$ .Esta carga crea en el punto P (ver figura) un campo de módulo dE_c. Dada la simetría el módulo del campo en P vale $dE=dE_C \cos\theta$.

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{l^2}\cdot\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2\pi r^3\ k\,dr}{l^2}\cdot\frac{h}{l}$$

De la figura se deduce que

$$l = \sqrt{h^2 + r^2}$$

Por lo que

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2\pi r^3\ k\,h}{\left(h^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}dr = \frac{k\,h}{2\varepsilon_o}\frac{r^3}{\left(h^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}dr$$

Para hallar el campo debido a todo el disco debemos integrar la expresión anterior

$$E = \frac{k\,h}{2\varepsilon_o}\int_o^{r_o}\frac{r^3}{\left(h^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}dr \quad (1)$$

Para resolver la integral anterior hacemos el siguiente cambio de variable

$$h^2 + r^2 = u^2 \;\Rightarrow\; r\,dr = u\,du$$

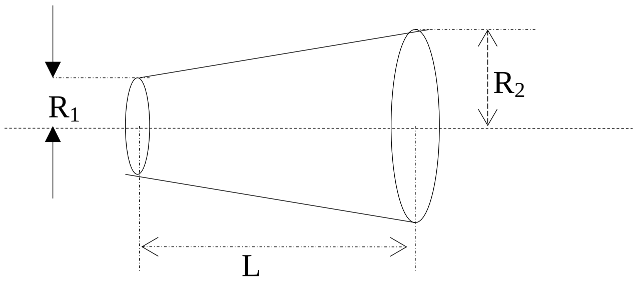
$$\int \frac{r^2 \cdot r \cdot dr}{u^3} = \int \frac{\left(u^2 - h^2\right)u\,du}{u^3} = \int du - \int \frac{h^2}{u^2}du = u + \frac{h^2}{u} = \sqrt{h^2 + r^2} + \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + r^2}}$$

Llevando este resultado a (1)

$$E = \frac{h\,k}{2\varepsilon_o}\left[\sqrt{h^2 + r^2} + \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + r^2}}\right]_o^{r_o} = \frac{h\,k}{2\varepsilon_o}\left[\sqrt{h^2 + r_o^2} - h + \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + r_o^2}} - h\right] \Rightarrow$$

$$E = \frac{h\,k}{2\varepsilon_o}\left[\sqrt{h^2 + r_o^2} + \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + r_o^2}} - 2h\right]$$

57.-Un alambre metálico tiene la forma de un tronco de cono como se indica en la figura. El radio de la sección mayor es R_2 y el de la menor R_1, la resistividad del metal ρ y su longitud L. Calcular la resistencia del conductor



En la figura 1 se considera una sección del hilo cuyo radio es R, distancia al círculo de radio R_1 , x, y espesor dx .

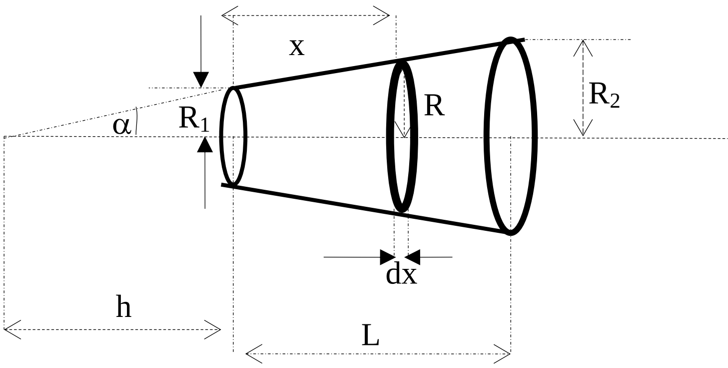


Fig.1

La resistencia óhmica de esa sección es

$$d\Omega = \frac{\rho\, dx}{\pi R^2} \quad (1)$$

R y x son variables y debemos encontrar una relación entre ambas. De la figura 1 se deduce:

$$\operatorname{tag}\alpha = \frac{R_1}{h} = \frac{R}{x+h} = \frac{R_2}{L+h} \Rightarrow R_1 L + R_1 h = R_2 h \Rightarrow h = \frac{R_1 L}{R_2 - R_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = R_1 \frac{x+h}{h} = R_1\left(\frac{x}{h}+1\right) = R_1\left(\frac{x}{\frac{R_1 L}{R_2 - R_1}}+1\right) = \frac{x\left(R_2 - R_1\right)}{L} + R_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dR = \frac{\left(R_2 - R_1\right)}{L} dx \Rightarrow dx = \frac{L\, dR}{R_2 - R_1}$$

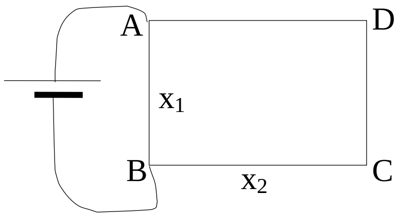
Llevando el valor de dx a la ecuación (1).

$$d\Omega = \frac{\rho}{\pi}\frac{\frac{L\,dR}{R_2 - R_1}}{R^2} \Rightarrow \Omega = \frac{\rho\,L}{\pi(R_2 - R_1)}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{R^2} = \frac{\rho\,L}{\pi(R_2 - R_1)}\left(-\frac{1}{R}\right)_{R_1}^{R_2} \Rightarrow$$

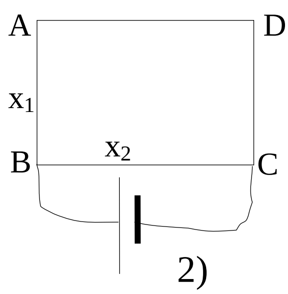
$$\Rightarrow \Omega = \frac{\rho\,L}{\pi(R_2 - R_1)}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{\rho\,L}{\pi(R_2 - R_1)}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1\,R_2}\right) = \frac{\rho\,L}{\pi\,R_1\,R_2}$$

58.- Una espira rectangular ABCD, con los lados AB=CD y BC=AD, siendo AB<BC, se conecta a una fuente de corriente de dos maneras.1) los extremos AB a la pila, 2) los extremos BC a la pila. En el caso 1 la resistencia es R y en el caso 2, 1,6 R. Se pide la relación de las resistencias eléctricas entre el lado mayor y el menor de la espira.

Designamos con x_1 a la resistencia del lado menor y con x_2 a la del lado mayor



1)



2)

En el caso 1) los lados AD, DC y CB están en serie siendo su resistencia equivalente $2x_2 + x_1$, la cual se encuentra en paralelo con AB, resistencia total:

$$\frac{1}{R_E} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 + 2x_2} = \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1(x_1 + 2x_2)} \quad \Rightarrow \quad R_E = \frac{x_1(x_1 + 2x_2)}{2(x_1 + x_2)} = R$$

En el caso 2) los lados AB, AD y DC están en serie siendo su resistencia equivalente $2x_1 + x_2$, la cual se encuentra en paralelo con BC, resistencia total:

$$\frac{1}{R_E'} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{2x_1 + x_2} = \frac{2(x_1 + x_2)}{x_2(2x_1 + x_2)} \quad \Rightarrow \quad R_E'' = \frac{x_2(2x_1 + x_2)}{2(x_1 + x_2)} = 1{,}6R$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera, resulta:

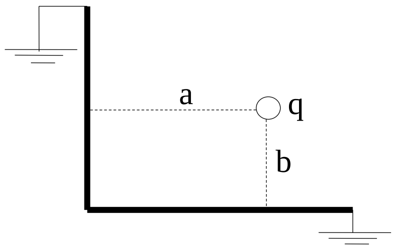
$$1{,}6 = \frac{x_2(2x_1 + x_2)}{x_1(x_1 + 2x_2)}$$

Designamos co u a la relación pedida: $u = \frac{x_2}{x_1}$

$$1{,}6 = u\,\frac{\frac{2x_1 + x_2}{x_1}}{\frac{x_1 + 2x_2}{x_1}} = u\,\frac{2+u}{1+2u} \quad \Rightarrow \quad 1{,}6 + 3{,}2u = 2u + u^2 \quad \Rightarrow \quad u^2 - 1{,}2u - 1{,}6 = 0$$

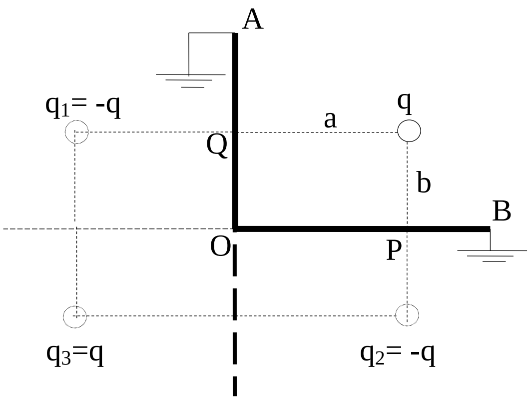
$$u = \frac{1{,}2 \pm \sqrt{1{,}2^2 + 4\cdot 1{,}6}}{2} = 2$$

59.- Dos semiplanos conductores forman entre sí un ángulo de 90º y se encuentran ambos conectados a tierra. Se coloca una carga q entre ellos tal como se muestra en la figura. Determinar la energía de interacción electrostática de la carga q con los planos (energía del sistema).



La carga q induce cargas sobre los dos planos y el cálculo del campo creado por el sistema aparece como difícil. Existe un método, llamado de las imágenes, que consiste en establecer una serie de cargas que permiten calcular el campo de una manera más sencilla. Las cargas se eligen de modo que las superficies conductoras se sustituyen por superficies equipotenciales a los mismos potenciales.

En el problema debemos encontrar cargas puntuales que determinen que los potenciales de los semiplanos sean nulos ya que éstos se encuentran unidos a tierra.



Si el semiplano OA estuviese solo, para hacer su potencial nulo ponemos la carga imagen q_1=-q. Si el semiplano OB estuviese solo, para hacer su potencial nulo ponemos la carga imagen q_2=-q, pero al estar juntos los dos semiplanos conductores con esas cargas, no logramos que los potenciales sean nulos. Colocamos una tercera carga q_3=q; simétrica de la primera respecto del origen, y comprobamos si el conjunto de la carga q y las tres cargas imágenes hacen el potencial nulo tanto en OA como en OB.

Escogemos un punto arbitrario P del semiplano OB el potencial es:

$$V_P = V_q + V_{q1} + V_{q2} + V_{q3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{q}{b} + \frac{-q}{\sqrt{4a^2+b^2}} + \frac{q}{\sqrt{4a^2+b^2}} + \frac{-q}{b}\right) = 0$$

Escogemos un punto arbitrario Q del semiplano OA el potencial es:

$$V_Q = V_q + V_{q1} + V_{q2} + V_{q3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{q}{a} + \frac{-q}{a} + \frac{q}{\sqrt{a^2+4b^2}} + \frac{-q}{\sqrt{a^2+4b^2}}\right) = 0$$

La interacción electrostática de q con los planos la calculamos como la energía de interacción entre las cuatro cargas, es decir la energía de un sistema de cargas.
Podemos hacerlo calculando los trabajos desde el infinito hasta formar la configuración de las cuatro cargas. Recordando que el trabajo es: la carga transportada por la diferencia de potencial entre el punto de partida y el de llegada. Se toma como potencial de referencia el infinito con valor cero

El trabajo para llevar q desde el infinito hasta su posición es cero.

El trabajo para llevar q_1 desde el infinito a su posición es:

$$W_1 = q_1 \cdot \left(0 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{2a}\right) = -q \cdot \left(0 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{2a}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{2a}$$

El trabajo para llevar q_2 desde el infinito a su posición es:

$$W_2 = q_2 \cdot \left[0 - \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{\sqrt{4a^2+4b^2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1}{2b}\right)\right] =$$

$$= q \cdot \left[0 - \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{\sqrt{4a^2+4b^2}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{2b}\right)\right] \quad \Rightarrow \quad W_2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o}\left(-\frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{2b}\right)$$

El trabajo para llevar q_3 desde el infinito a su posición es:

$$W_3 = q_3 \cdot \left[0 - \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{2b} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1}{\sqrt{4a^2+4b^2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_2}{2a}\right)\right] =$$

$$= -q \cdot \left[0 - \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{2b} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{\sqrt{4a^2+4b^2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{2a}\right)\right] = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{2b} - \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{2a}\right)$$

El trabajo total: $\qquad W_T = \sum_{i=1}^{3} W_i = W_1 + W_2 + W_3$

$$W_T = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2b} - \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{2a}\right) \Rightarrow$$

$$W_T = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o}\left(-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = -E \quad \Rightarrow \quad E = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Otra forma de realizar el cálculo anterior y de forma más rápida consiste, en sumar las energías potenciales de todas las parejas que puedan formarse sin repetir ninguna, así: la carga q con q_1, q_2 y q_3, la carga q_1 con q_2 y q_3 y la carga q_2 con q_3.

$$E = \sum_{i \neq j} \frac{q_i \; q_j}{4\pi\varepsilon_o r_{ij}}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{q\,q_1}{2a} + \frac{q\,q_2}{2\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{q\,q_3}{2b} + \frac{q_1\,q_2}{2b} + \frac{q_1\,q_3}{2\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{q_2 q_3}{2a}\right] =$$

$$E = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{1}{2a} + \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{2b} - \frac{1}{2b} + \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{2a}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; E = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b}\right]$$