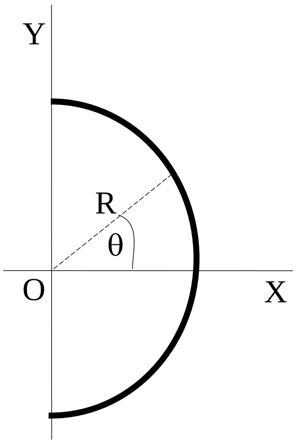
60.- Sobre un anillo en forma de semicircunferencia de radio R existe una densidad lineal de carga expresada mediante la ecuación

$$\lambda = \lambda_o \cos\theta$$

El ángulo θ puede observarse en la figura



a) Calcular la carga Q almacenada en el anillo.
b) El módulo del campo en el punto O.

Ayuda: $\cos^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

Consideremos un trocito de anillo de longitud dl, tal como indica la figura 1

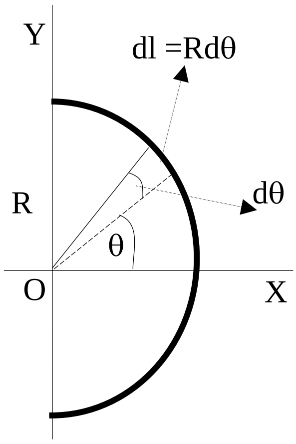


Fig.1

a) Dado que el arco es igual al radio por el ángulo en radianes: dl = R dθ; la carga que posee ese trocito del anillo vale:

$$dQ = \lambda \cdot dl = \lambda_o \cos\theta \cdot R\, d\theta$$

La carga Q de todo el anillo la obtenemos integrando la expresión anterior entre los ángulo $-\pi/2$ y $+\pi/2$

$$Q = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lambda_o R \cos\theta\, d\theta = \lambda_o R \,\mathrm{sen}\,\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \lambda_o R\left[\mathrm{sen}\frac{\pi}{2} - \left(\mathrm{sen}\frac{-\pi}{2}\right)\right] = 2\lambda_o R$$

b) El módulo del campo eléctrico elemental dE, creado en el punto O por la carga $dQ = \lambda_o \cos\theta \cdot R\, d\theta$ es:

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\pi_o r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda_o R\cos\theta\, d\theta}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda_o \cos\theta\, d\theta}{R}$$

Vectorialmente, el campo eléctrico elemental $d\vec{E}$, es un vector cuya dirección es radial y saliente desde el elemento dQ por tratarse de una carga positiva. Además, debido a la simetría de la distribución de cargas, respecto del punto O, si se toman dos elementos dQ, que formen con el eje X, ángulos iguales θ, ver figura, las componentes verticales dEy del vector campo $d\vec{E}$, se anulan dos a dos y solo quedan para la contribución al campo en O, las de las componentes dEx; según el eje X.

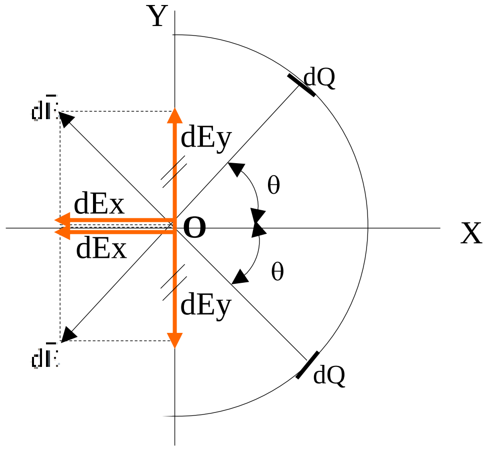


Fig.2

$$dE_X = dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda_o}{R}\cos^2\theta\, d\theta$$

El valor de E_X lo calculamos integrando la ecuación entre los límites -π/2 y +π/2.

$$E_X = \frac{\lambda_o}{4\pi\varepsilon_o R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\, d\theta = \frac{\lambda_o}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\operatorname{sen}2\theta}{2}d\theta = \frac{\lambda_o}{8\pi\varepsilon_o R}\left[\theta - \frac{\cos 2\theta}{2}\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ E_X = \frac{\lambda_o}{8\pi\varepsilon_o R}\left[\pi - \frac{\cos\pi - \cos(-\pi)}{2}\right] = \frac{\lambda_o}{8\,\varepsilon_o R}$$

61.-Una esfera conductora de radio R está formada por la unión de dos semiesferas. Todo el conjunto tiene distribuida de forma homogénea una carga Q.
a) Calcular la fuerza con que se repelen ambas partes.
b) Si una esfera de radio R y carga Q está cortada por un plano a una altura h de su centro ¿cuál es la fuerza con que se repelen esas partes?

a) Designamos con σ la densidad superficial de carga que existe sobre la esfera. Escogemos sobre ella un elemento de superficie de módulo dS, tal como indica la figura 1. La carga de ese elemento es: $dq = \sigma\, dS$

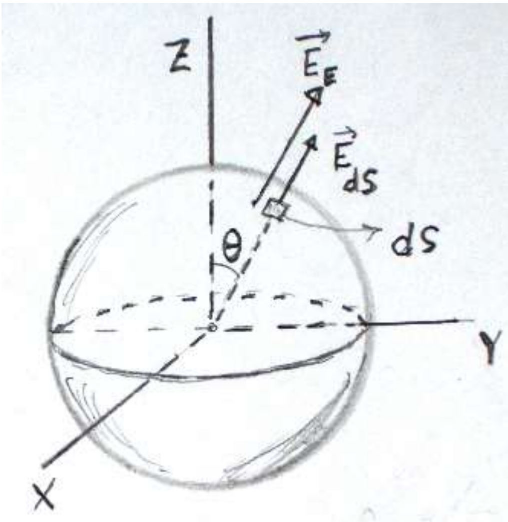


Fig.1

Aparentemente, y teniendo en cuenta que dS es muy pequeño, la fuerza que recibe es la originada por el campo de la esfera de radio R, esto es:

$$dF = E \cdot \sigma\, dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{R^2}\sigma\, dS$$

Sin embargo esto no es correcto. Muy cerca de la superficie dS, que posee la carga dq, (que aparece rayada en la fig.2) ésta crea un campo eléctrico que evaluamos aplicando el teorema de Gauss. Alrededor de dS tomamos una superficie cerrada, por ejemplo un cilindro, cuyas bases .Las superficies A y B están muy próximas a dS.

El mismo flujo eléctrico atraviesa las bases y ninguno por la superficie lateral y de acuerdo con el teorema de Gauss, designando con E_{dS} al campo creado por dq en las dos bases, resulta:

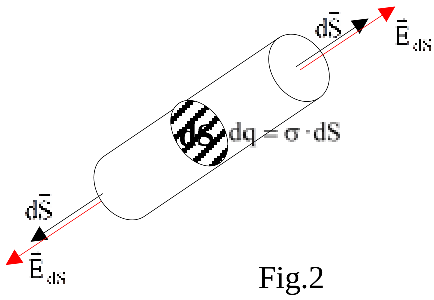


Fig.2

$$2E_{dS} \cdot dS = \frac{\sigma\, dS}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_{dS} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Dado que el campo en la superficie de la esfera es

$$E_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{R^2} = \frac{Q}{4\pi\pi^2}\frac{1}{\varepsilon_o} = \frac{Q}{S}\frac{1}{\varepsilon_o} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$

Si nos fijamos en la figura 1, resulta que el campo debido a la esfera menos el elemento dq =σ dS, vale:

$$E = E_E - E_{dS} = \frac{\sigma}{\varepsilon_O} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_O} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_O}$$

La fuerza que recibe la carga dq es:

$$dF = E \cdot dq = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \cdot \sigma\, dS = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_o} dS$$

Para calcular la fuerza debemos integrar la expresión anterior. Antes de ello debemos fijarnos en la fig.3, en la que se ha representado la superficie de módulo dS sobre la esfera mediante el vector $d\vec{S}$. La fuerza que recibe ese elemento de superficie es un vector que tiene la misma dirección y sentido que $d\vec{S}$. La proyección de $d\vec{S}$ en dirección vertical es $d\vec{S}'$, el cual representa una superficie sobre el plano XY.

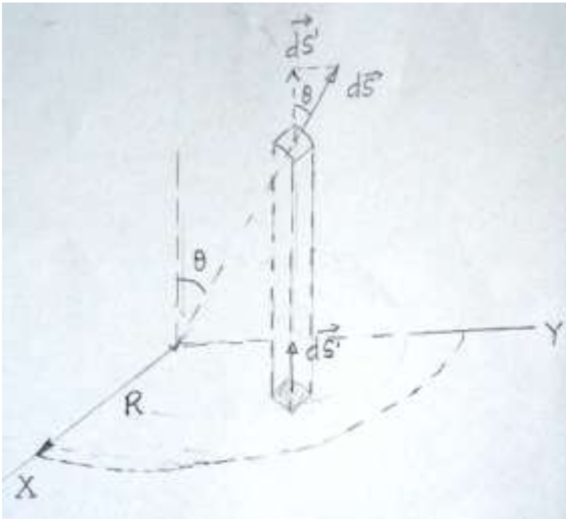


Fig.3

Si consideramos los distintos elementos de superficie sobre la semiesfera y las fuerzas que sobre cada uno de ellos actúan, resulta que solamente deben sumarse las componentes de las fuerzas en sentido vertical, ya que las de sentido horizontal se anulan por pares. La fig. 4 indica este hecho para un par de estas superficies. La componente de $\vec{F}$ según Z

$$dF_Z = dF\cos\theta = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_o} dS\cos\theta$$

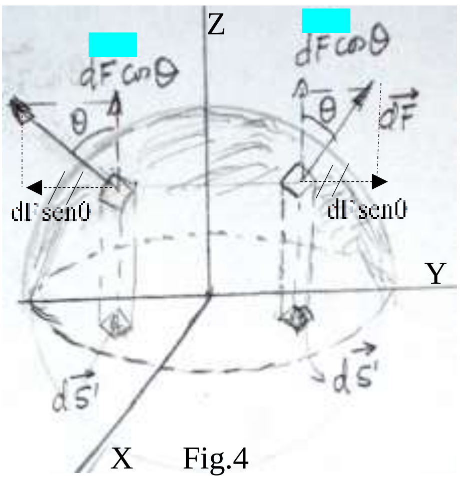


Fig.4

Considerando que todos los elementos de superficie $d\vec{S}$ que forman la semiesfera, son vectores perpendiculares al elemento correspondientes y si se proyectan en la dirección de Z, y se suman estas contribuciones, resulta que la suma es la superficie del círculo de radio R, situado en el plano XY.

Por consiguientes la fuerza F_Z se obtiene integrando sobre toda la semiesfera:

$$F_Z = \int_S dF\cos\theta = \int_S \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_o} dS\cos\theta = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_o}\int_S dS\cos\theta = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_o}\pi R^2$$

$$F_Z = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_o}\pi R^2 = \frac{\left(\frac{1}{4\pi}\frac{Q}{R^2}\right)^2}{2\varepsilon_o}\pi R^2 = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_o R^2}$$

Vectorialmente: $$\vec{F}_Z = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_o R^2}\vec{k}$$

Evidentemente, por el principio de acción y reacción, sobre la otra semiesfera actúa una fuerza igual y de sentido contrario: $$\vec{F}'_Z = -\frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_o R^2}\vec{k}$$

b) El razonamiento para este caso es el mismo que el anterior, pero ahora r hemos de expresarlo en función de h y del radio de la esfera R, ver fig.5

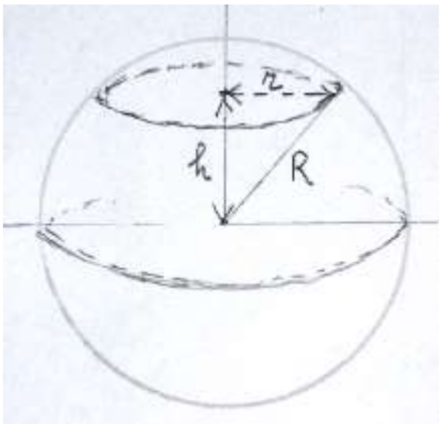


Fig.5

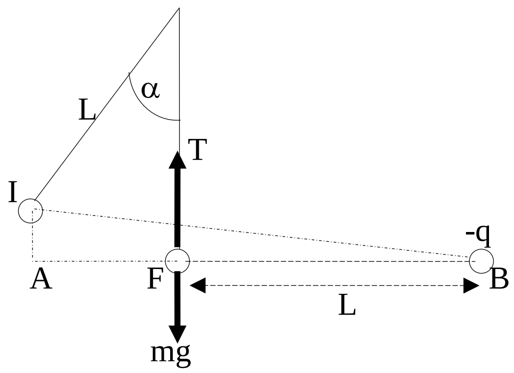
$$\sum dS\cos\theta = \pi r^2 = \pi\left(R^2 - h^2\right) \Rightarrow F_Z = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_o}\pi\left(R^2 - h^2\right) \Rightarrow$$

$$F_Z = \frac{\left(\frac{Q}{4\pi R^2}\right)^2}{2\varepsilon_o}\pi\left(R^2 - h^2\right) = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_o R^4}\left(R^2 - h^2\right)$$

$$F_Z = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_o R^2}\left(1 - \frac{h^2}{R^2}\right)$$

62.- Un péndulo simple de longitud L=1 m, lleva en su extremo una masa m= 5 g, con una carga +q=10^{-6}C. Inicialmente se encuentra separado de su posición vertical por un ángulo α y con velocidad cero. A una distancia L, medida en dirección horizontal, de la posición más baja del péndulo está situada una carga fija -q. a) Calcular la tensión de la cuerda cuando la masa m pasa por la posición más baja. b) Calcular el valor numérico de T si α= 45º. c) Calcular el valor de α si T = 3/2 mg.
La aceleración de la gravedad es g=10 m/s^2.

a) Cuando el péndulo pasa por la posición más baja, la tensión T de la cuerda sostiene el peso de la masa m y proporciona la fuerza centrípeta.



$$T = mg + m\frac{v^2}{L}$$

Para calcular la velocidad v que lleva la masa m al pasar por la posición más baja, considerando que el campo gravitatorio y el electrostático son conservativos, aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica, entre la posición inicial I y la posición más baja F. Tomamos como referencia nula de la energía potencial gravitatoria la posición F.

En la posición I, la energía de la masa m es potencial y electrostática

$$E_I = mg\,\overline{IA} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q\cdot(-q)}{IB} = mg(L - L\cos\alpha) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{\sqrt{IA^2 + AB^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_I = mgL(1-\cos\alpha) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{\sqrt{[L(1-\cos\alpha)]^2 + (AF + L)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_I = mgL(1-\cos\alpha) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{\sqrt{[L(1-\cos\alpha)]^2 + (L\,\mathrm{sen}\,\alpha + L)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_I = mgL(1-\cos\alpha) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o L}\frac{q^2}{\sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + (1+\mathrm{sen}\,\alpha)^2}}$$

En la posición F, las energías de la masa m son cinética y potencial electrostática

$$E_F = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{L}$$

Del principio de conservación de la energía.

$$E_F = E_I \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{L} = mgL(1-\cos\alpha) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{L\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+(1+\operatorname{sen}\alpha)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{mv^2}{L} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2q^2}{L^2}\left[1-\frac{1}{\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+(1+\operatorname{sen}\alpha)^2}}\right] + 2mg(1-\cos\alpha)$$

La tensión de la cuerda es:

$$T = mg + \frac{mv^2}{L} = mg + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2q^2}{L^2}\left[1-\frac{1}{\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+(1+\operatorname{sen}\alpha)^2}}\right] + 2mg(1-\cos\alpha) \Rightarrow$$

$$T = mg(3-2\cos\alpha) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2q^2}{L^2}\left[1-\frac{1}{\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+(1+\operatorname{sen}\alpha)^2}}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = mg(3-2\cos\alpha) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2q^2}{L^2}\left[1-\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\alpha-2\cos\alpha+1+\operatorname{sen}^2\alpha+2\operatorname{sen}\alpha}}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = mg(3-2\cos\alpha) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2q^2}{L^2}\left[1-\frac{1}{\sqrt{3+2(\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha)}}\right]$$

b)

$$T = 7{,}93.10^{-2} + 9.10^9 \cdot 2 \cdot (10^{-6})^2\left[1-\frac{1}{\sqrt{3+2(\operatorname{sen}45-\cos45)}}\right] = 7{,}93.10^{-2} + 7{,}61.10^{-3} \Rightarrow$$

$$T = 8{,}69.10^{-2}\ \mathrm{N}$$

c)

$$\frac{\frac{3}{2}mg - mg(3-2\cos\alpha)}{18.10^{-3}} = 1-\frac{1}{\sqrt{3+2(\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha)}} \Rightarrow$$

$$\frac{2\cos\alpha\cdot mg - \frac{3}{2}mg}{18.10^{-3}} = 1-\frac{1}{\sqrt{3+2(\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha)}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3+2(\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha)}} = 1-\frac{0{,}1\cos\alpha-0{,}075}{18.10^{-3}} \Rightarrow$$

$$\frac{0{,}018}{\sqrt{3+2(\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha)}} + 0{,}1\cos\alpha = 0{,}093$$

La última ecuación se resuelve por tanteo

α=33º	0,095 > 0,093
α=34º	0,094 > 0,093
α=35º	0,093 = 0,093

63.- Un hilo conductor tiene forma de polígono regular con n lados. Está inscrito sobre una circunferencia de radio R y recorrido por una corriente continua de intensidad I. a) Calcular el módulo de campo magnético creado por el conductor en el centro de la circunferencia b) Hallar el valor del módulo del campo cuando n tiende a infinito.

a) Designamos con L=AB, a la longitud de uno de los lados del polígono. El vector $\overrightarrow{dB}$ creado por un elemento de corriente, situado en uno de los lados del polígono es perpendicular al plano que contiene a la circunferencia y saliente hacia el lector, como se puede deducir de la ley de Biot-Savart. Por ser todos los vectores campo magnético de cada uno de los lados, de la misma dirección y sentido, el módulo del vector campo magnético debido a los n lados del polígono, es igual al de un lado multiplicado por el número de lados.
En la figura 1 hemos representado uno de los lados del polígono, el AB=L, y sobre él hemos considerado un elemento de corriente cuya longitud es dx y que dista x=MN del punto M (punto central del lado AB), situado a una distancia a de O.

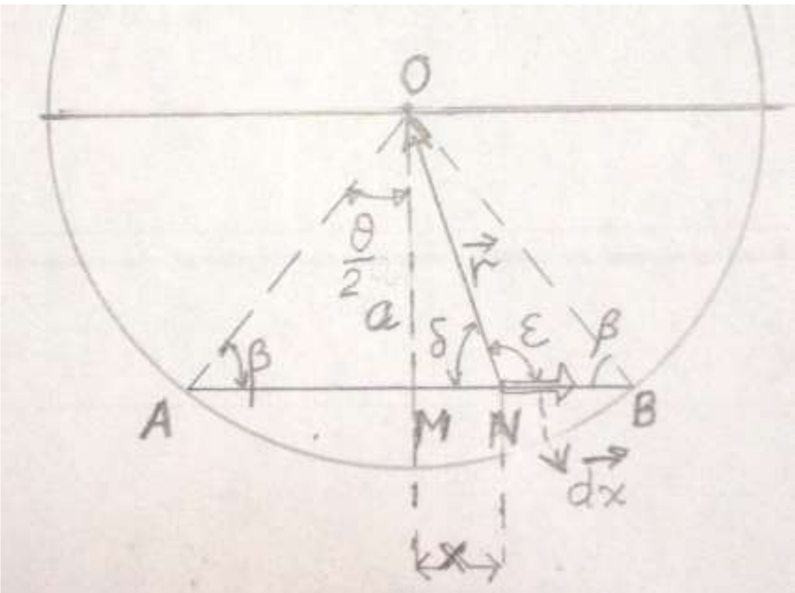


Fig. 1

De acuerdo con la ley de Biot-Savart el vector campo creado por ese elemento de corriente en el centro de la circunferencia vale:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_O I}{4\pi}\frac{d\vec{x} \times \vec{r}}{r^3} \quad \Rightarrow \quad dB = \frac{\mu_O I}{4\pi}\frac{dx \cdot r \cdot sen\varepsilon}{r^3} = \frac{\mu_O I}{4\pi}\frac{dx \cdot sen\varepsilon}{r^2} \quad (1)$$

De la figura 1 se deduce que x, r y ε son variables. Vamos a tratar de relacionarlas entre sí.

$$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}(\pi-\varepsilon) = \frac{a}{r} \Rightarrow \quad r = \frac{a}{\operatorname{sen}(\pi-\varepsilon)}; \qquad \cos\delta = \cos(\pi-\varepsilon) = \frac{x}{r} \quad \Rightarrow \quad x = r\cos(\pi-\varepsilon)$$

$$\Rightarrow x = \frac{a\cdot\cos(\pi-\varepsilon)}{\operatorname{sen}(\pi-\varepsilon)} = \frac{\sqrt{R^2-\left(\frac{L}{2}\right)^2}\cdot\cos(\pi-\varepsilon)}{\operatorname{sen}(\pi-\varepsilon)} = \frac{\sqrt{4R^2-L^2}\cos(\pi-\varepsilon)}{2\operatorname{sen}(\pi-\varepsilon)} \Rightarrow$$

Diferenciando la ecuación: $dx = \frac{dx}{d\varepsilon}d\varepsilon$ resulta:

$$dx = -\frac{\sqrt{4R^2-L^2}}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2(\pi-\varepsilon)+\cos^2(\pi-\varepsilon)}{\operatorname{sen}^2(\pi-\varepsilon)}d\varepsilon = -\frac{\sqrt{4R^2-L^2}}{2\operatorname{sen}^2(\pi-\varepsilon)}d\varepsilon$$

Llevando los valores de dx y r a la ecuación (1) resulta:

$$dB = -\frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{\frac{\sqrt{4R^2-L^2}}{2\operatorname{sen}^2(\pi-\varepsilon)}}{\frac{a^2}{\operatorname{sen}^2(\pi-\varepsilon)}}\cdot(\operatorname{sen}\varepsilon)d\varepsilon = -\frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{\sqrt{4R^2-L^2}}{2a^2}(\operatorname{sen}\varepsilon)d\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dB = -\frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{\sqrt{4R^2-L^2}}{2\left(\frac{4R^2-L^2}{4}\right)}(\operatorname{sen}\varepsilon)d\varepsilon \quad \Rightarrow \quad dB = -\frac{\mu_o I}{2\pi\sqrt{4R^2-L^2}}\cdot\operatorname{sen}\varepsilon\, d\varepsilon$$

Ahora, la ecuación anterior solamente tiene la variable ε. Para evaluar la contribución al módulo del campo magnético, del lado AB = 2 AM = 2 MB, integramos, situando un 2 delante, para que nos permita variar el ángulo ε desde π/2 hasta β; ver fig.1:

$$B_{AB} = -2\frac{\mu_O I}{2\pi\sqrt{4R^2-L^2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\beta}\operatorname{sen}\varepsilon\, d\varepsilon = -\frac{\mu_O I}{\pi\sqrt{4R^2-L^2}}\left[-\cos\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\beta} = \frac{\mu_O I}{\pi\sqrt{4R^2-L^2}}\cos\beta$$

De la figura 1 se deduce que $\cos\beta = \frac{\frac{L}{2}}{R} = \frac{L}{2R}$ y $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{\frac{L}{2}}{R} \Rightarrow L = 2R\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$

$$B_{AB} = \frac{\mu_o\, I}{\pi\sqrt{4R^2 - L^2}} \cdot \frac{L}{2R} = \frac{\mu_o\, I}{\pi\sqrt{4R^2 - 4R^2\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}}} \cdot \frac{2R\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}}{2R} \Rightarrow$$

$$B_{AB} = \frac{\mu_o\, I}{\pi\, 2R\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}}}\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{\mu_o\, I\cdot \mathrm{sen}\frac{\theta}{2}}{\pi\, 2R\,\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\mu_o\, I\cdot \mathrm{tag}\frac{\theta}{2}}{2\pi R}$$

Si el polígono tiene n lados se cumple que $\theta = \frac{2\pi}{n}$ y además el campo magnético debido a todo el polígono es, $B_{total} = n\, B_{AB}$.

$$B_{total} = n\,\frac{\mu_o\, I}{2\pi R}\,\mathrm{tag}\frac{\pi}{n}$$

b) Si n tiende a infinito el polígono tiende a formar una circunferencia y el campo vale.

$$B_C = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\,\mu_o I}{2\pi\, R}\,\mathrm{tag}\frac{\pi}{n}\right] = \frac{\mu_o I}{2\pi\, R}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\mathrm{tag}\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}\right]$$

Aplicando la regla de L´Hopital

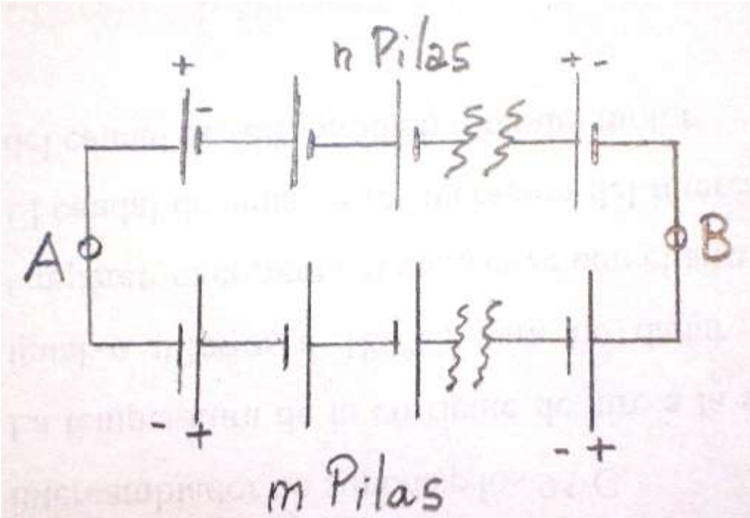
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\mathrm{tag}\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{n}}\cdot\left(-\frac{\pi}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}}\right] = \pi$$

Sustituyendo en la ecuación anterior resulta:

$$B_C = \frac{\mu_o\, I}{2\, R}$$

Ecuación que corresponde, como es lógico, al campo magnético creado por una espira circular, recorrida por una corriente de intensidad I, en el centro de la misma.

64.- Se construye un circuito como indica la figura inferior, a base de pilas iguales de fuerza electromotriz ε y resistencia interna r. En el circuito consideramos dos puntos A y B de modo que en la parte superior se han colocado n pilas y en la inferior m. Se pide la diferencia de potencial entre los puntos A y B.



Hallamos la diferencia de potencial entre A y B por el camino inferior. Designamos con I la intensidad que circula por el circuito que es la misma en todo él.

$$V_A - V_B = \sum \varepsilon - \sum IR \quad \Rightarrow \quad V_A - V_B = m\varepsilon - I\,m\,r \quad \Rightarrow \quad I = \frac{m\varepsilon - (V_A - V_B)}{mr}$$

Aplicamos la ley de Ohm generalizada a todo el circuito:

$$I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R} = \frac{(m+n)\varepsilon}{(m+n)r} = \frac{\varepsilon}{r}$$

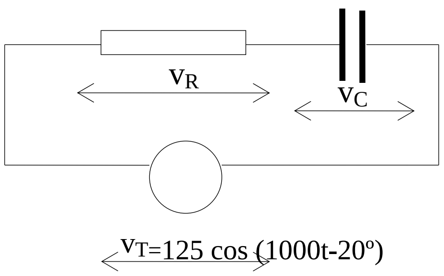
Igualando las dos ecuaciones:

$$\frac{m\varepsilon - (V_A - V_B)}{m\,r} = \frac{\varepsilon}{r} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon - \frac{(V_A - V_B)}{m} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{(V_A - V_B)}{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A - V_B = 0$$

Cualquiera que sea la relación entre n y m la diferencia de potencial es nula.

65.- Se dispone de un condensador de capacidad C=2μF y de una resistencia R = 100 Ω. Ambos elementos se colocan primero en serie y después en paralelo, en ambos casos se someten a una diferencia de potencial alterna de valor V= 125 cos(1000t-20º). Determinar en cada caso la intensidad total.

a) En la figura se representan las caídas de tensión en la resistencia y en el condensador



Representamos mediante la ecuación

$$I = I_m \cos(1000t + \varphi)$$

la intensidad que circula por la resistencia y el condensador.

Calculamos el valor de I_m a partir de la impedancia del circuito

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{100^2 + \left(\frac{1}{2.10^{-6}\cdot 1000}\right)^2} = 510\Omega \quad \Rightarrow \quad I_m = \frac{125}{510} = 0{,}245\text{A}$$

En el circuito se cumple:

$$v_T = v_R + v_C = IR + \frac{\int I\,dt}{C} \Rightarrow \; 125\cos(1000t - 20^\circ) = 0{,}245\cdot 100\cdot\cos(1000t+\varphi) + \frac{1}{2.10^{-6}}\int I\,dt$$

$$125\cos(1000t - 20^\circ) = 0{,}245\cdot 100\cdot\cos(1000t+\varphi) + \frac{1}{2.10^{-6}}\left[0{,}245\operatorname{sen}(1000t+\varphi)\right]\cdot\frac{1}{1000}$$

La ecuación anterior se cumple para cualquier instante de tiempo $t \geq 0$ Si consideramos el instante t =0 nos queda:

$$125\cdot\cos(-20^\circ) = 24{,}5\cdot\cos\varphi - 122{,}5\operatorname{sen}\varphi = 24{,}5\cdot\cos\varphi + 122{,}5\sqrt{1-\cos^2\varphi} \Rightarrow$$

$$117{,}5 - 24{,}5\cos\varphi = 122{,}5\sqrt{1-\cos^2\varphi} \quad \Rightarrow \quad 0{,}959 - 0{,}20\cos\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la última ecuación, reagrupamos términos y resolvemos la ecuación de segundo grado.

$$0{,}920+0{,}040\cos^2\varphi-0{,}384\cos\varphi=1-\cos^2\varphi \;\Rightarrow\; 1{,}040\cos^2\varphi-0{,}384\cos\varphi-0{,}080=0 \;\Rightarrow$$

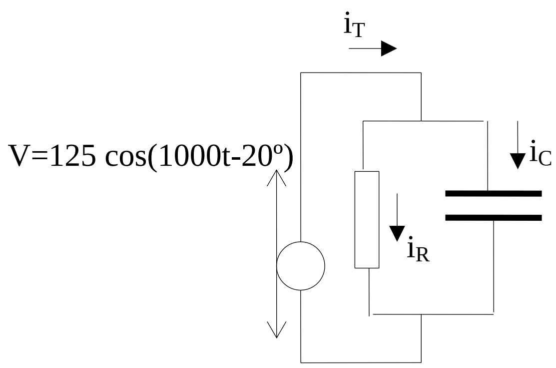
$$\Rightarrow \cos\varphi=\frac{0{,}384\pm\sqrt{0{,}384^2+4\cdot 1{,}040\cdot 0{,}080}}{2{,}08}=\frac{0{,}384\pm 0{,}693}{2{,}08}$$

Las dos soluciones de la ecuación son: cos φ=0,518 y cos φ=-0,149, que corresponden a los ángulos φ=58,8º y φ=98,6º.La primera solución es la correcta pues el desfase no puede ser mayor de 90º por haber solo una resistencia y un condensador, por tanto.

$$I=0{,}245\cos(1000t+58{,}8^{\circ})$$

b) En el esquema siguiente se establecen las intensidades que circulan por la fuente, la resistencia y el condensador.

Calculamos el valor de I_m a partir de la impedancia del circuito



La ecuación de la intensidad total es:

$$i_T=I_m\cos(1000t+\varphi)$$

Calculamos la impedancia del circuito:

$$\frac{1}{Z}=\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2+\frac{1}{\left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}}=\sqrt{\frac{1}{10^4}+\left(2.10^{-6}\cdot 1000\right)^2} \;\Rightarrow\; Z=98\ \Omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_m=\frac{125}{Z}=\frac{125}{98}=1{,}28\text{A}$$

$$i_T = 1,28\cos(1000t + \varphi) = i_R + i_C = \frac{125\cos(1000t - 20^o)}{100} + C\frac{dV}{dt} =$$

$$= \frac{125\cos(1000t - 20^o)}{100} - C \cdot 125\mathrm{sen}(1000t - 20^o) \cdot 1000 \Rightarrow$$

$$1,28\cos(1000t + \varphi) = 1,25\cos(1000t - 20^o) - 0,25\mathrm{sen}(1000t - 20^o)$$

Si en la última ecuación hacemos t=0, resulta:

$$1,28\cos\varphi = 1,25\cos(-20^o) - 0,25\mathrm{sen}(-20^o) \Rightarrow \quad \cos\varphi = 0,984 \Rightarrow \ \varphi = 10,1^o$$

$$i_T = 1,28\cos(1000t + 10,1^o)$$

66.- Un condensador plano está formado por dos armaduras de superficie 8.10^{-3} m^{2} y separadas entre sí por una distancia de d=1 cm. La masa de cada una de de las armaduras es m=100 gramos.
Se suministra a las armaduras cargas de +Q =10^{-9} C y –Q =10^{-9} C.
Admitiendo que las armaduras se pueden desplazar libremente sin rozamiento y que las cargas citadas se mantienen constantes; determinar el tiempo que tardan en chocar las armaduras y la velocidad en ese instante.

Si en el condensador plano la distancia entre sus armaduras es x, siendo x variable, la energía almacenada en el condensador es:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}C\frac{Q^2}{C^2} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 x}{\varepsilon_o S}$$

Si la carga de las armaduras se mantiene constante, la energía del condensador depende directamente de la separación entre sus armaduras. La relación de F con U nos permite escribir

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

La fuerza F actúa sobre cada una de las armaduras, de modo que ellas, si se pueden desplazar libremente, se acercan una a la otra con movimiento uniformemente acelerado, ya que la fuerza es constante y al chocar, cada una de ellas ha debido recorrer una distancia d/2 cm.

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_o S m} \Rightarrow \frac{d}{2} = \frac{1}{2}a\,t^2 = t = \sqrt{\frac{d}{a}} = \sqrt{\frac{d \cdot 2\varepsilon_o S m}{Q^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\cdot 10^{-2}\cdot 8.85.10^{-12}\cdot 8.10^{-3}\cdot 0,1}{\left(10^{-9}\right)^2}} = 11,9\text{s}$$

Partiendo del reposo su velocidad inicial es nula.

$$v = at = \frac{Q^2}{2\varepsilon_o S m}\cdot 11,9 = \frac{\left(10^{-9}\right)^2}{2\cdot 8.85.10^{-12}\cdot 8.10^{-3}\cdot 0,1}\cdot 11,9 = 8,4.10^4\frac{m}{s}$$

67.- Dos condensadores, uno cargado, de capacidad C_1 , y otro descargado, de capacidad C_2 , se conectan entre sí.. Calcular qué fracción de la carga inicial tiene cada condensador una vez alcanzado el equilibrio.
Hallar la relación entre la energía final de los condensadores después de la unión y antes de ella.

Designamos con Q la carga del condensador 1 y con q_1 y q_2 la de cada condensador cuando se alcanza el equilibrio. La conservación de la carga nos permite escribir:

$$Q = q_1 + q_2$$

Cuando se alcanza el equilibrio los condensadores tienen la misma diferencia de potencial.

$$\Delta V = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$$

De ambas ecuaciones resulta:

$$\frac{Q - q_2}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} \Rightarrow Q - q_2 = q_2 + q_2 \frac{C_1}{C_2} = q_2\left(\frac{C_1 + C_2}{C_2}\right)$$

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{Q - q_1}{C_2} \Rightarrow Q - q_1 = q_1 + q_2 \frac{C_2}{C_1} = q_1\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1}\right)$$

Las energías antes y después de la unión son respectivamente.

$$E_A = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1} \;\; ; \;\; E_D = \frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{q_2^2}{C_2}$$

Como

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{Q - q_1}{C_2} \Rightarrow \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1}{C_2} = \frac{Q}{C_2} \quad \Rightarrow \quad q_1 \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} = \frac{Q}{C_2} \quad \Rightarrow \quad q_1 = Q\frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

$$\frac{q_2}{C_2} = \frac{Q - q_2}{C_1} \Rightarrow \frac{q_2}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = \frac{Q}{C_1} \quad \Rightarrow \quad q_2 \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} = \frac{Q}{C_1} \quad \Rightarrow \quad q_2 = Q\frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

La relación entre las energías

$$\frac{E_D}{E_A}=\frac{\dfrac{q_1^2}{C_1}+\dfrac{q_2^2}{C_2}}{\dfrac{Q^2}{C_1}}=\frac{\dfrac{Q^2C_1^2}{C_1\left(C_1+C_2\right)^2}+\dfrac{Q^2C_2^2}{C_2\left(C_1+C_2\right)^2}}{\dfrac{Q^2}{C_1}}=\frac{\dfrac{C_1^2C_2+C_1C_2^2}{C_1C_2\left(C_1+C_2\right)^2}}{\dfrac{1}{C_1}}=\frac{C_1^2C_2+C_1C_2^2}{C_2\left(C_1+C_2\right)^2}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\qquad \frac{E_D}{E_A}=\frac{C_1C_2\left(C_1+C_2\right)}{C_2\left(C_1+C_2\right)^2}=\frac{C_1}{C_1+C_2}$$

68.- Un hilo de longitud infinita está situado en el plano YZ a una altura h sobre el eje Y. Por él circula una corriente constante de intensidad I. En el plano XY está situada una hoja conductora de longitud infinita con una densidad de corriente laminar J_S en A/m* El ancho de la hoja es a, y el eje Y la divide en dos partes iguales tal como indica la figura 1. Determinar la fuerza que por unidad de longitud sufre el conductor.

****La definición puede verse en el libro Electromagnetismo de la serie Sc, párrafo 6.8.haum***

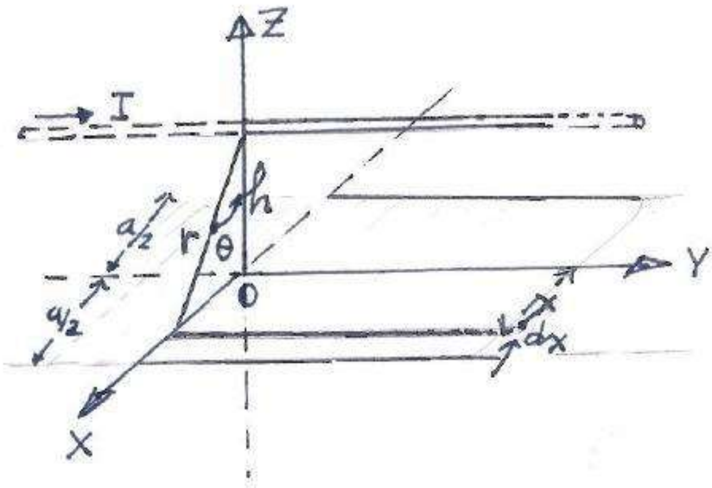


Fig.1

Sobre la hoja consideramos una tira de ancho dx que dista del eje Y la distancia x. La intensidad de corriente que circula por ella es Jdx y crea un campo magnético sobre el hilo conductor cuyo módulo es, según la ley de Biot-Savart

$$dB = \frac{\mu_o J\,dx}{2\pi r} \quad (1)$$

Para resolver el problema debemos tener en cuenta:

1) que el campo magnético es un vector.
2) que existe un elemento simétrico respecto de la tira que hemos considerado, que está a la distancia –x y que crea un campo magnético cuyo módulo es igual al dado por la ecuación (1).

Para deducir cómo es el campo magnético un método es recordar la ley del tornillo a derechas que está representado en la figura 2.

El tornillo de rosca a derechas se coloca en la dirección y sentido de la corriente en el hilo y se determina cómo hay que girarlo para que avance en el sentido de la corriente y esa forma de giro determina el sentido de **B** (figura 2).

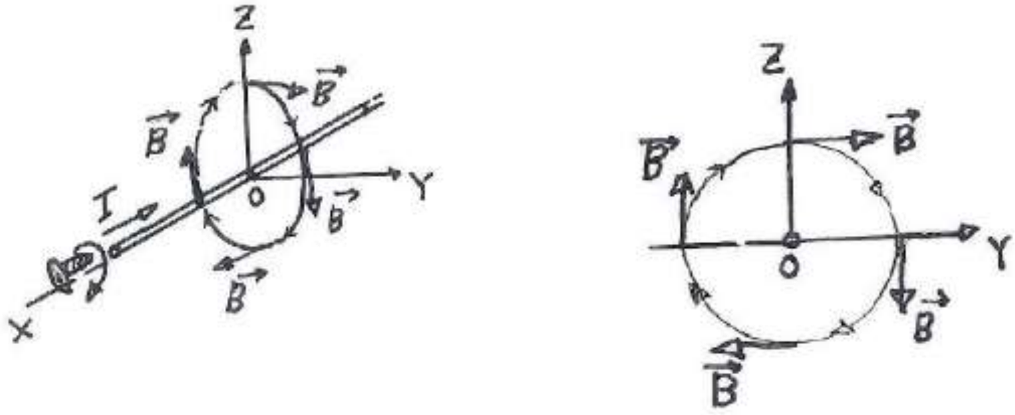


Fig.2

Ahora la figura 1 la vamos a observar desde el eje Y positivo (figura 3).

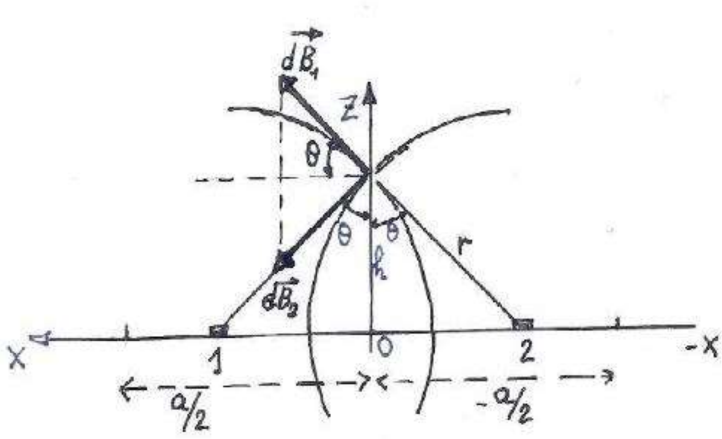


Fig.3

Las tiras de coordenadas (x) y (–x) las designamos con 1 y 2 y los campos que producen con $d\vec{B}_1$ y $d\vec{B}_2$, aunque sus módulos son iguales a dB. Las intensidades que recorren las tiras de corrientes son perpendiculares al papel y dirigidas al lector, aplicando la regla del tornillo se determina sus direcciones y sentidos.

Al descomponer estos vectores elementales, en la dirección de Z y en otra transversal según X, las componentes de los vectores se anulan sobre el eje Z y se suman sobre el eje X. Esas componentes sobre el eje X son perpendiculares al conductor, por consiguientes el módulo de la fuerza por unidad de longitud es:

$$dF_L = 2\,dB\cos\theta = 2\,dB\,\frac{h}{r} = \frac{\mu_o\,I\,J\,h\,dx}{\pi\,r^2} = \frac{\mu_o\,I\,J\,x\,dx}{\pi\left(h^2+x^2\right)} \Rightarrow F_L = \frac{\mu_o\,I\,J\,h}{\pi}\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{dx}{h^2+x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_L = \frac{\mu_o\,I\,J\,h}{\pi}\left[\frac{1}{h}\text{arco tag}\,\frac{x}{h}\right]_o^{\frac{a}{2}} = \frac{\mu_o\,I\,J}{\pi}\cdot\text{arco tag}\,\frac{a}{2h}$$

Vectorialmente como el campo magnético está según el sentido positivo del eje X, resulta:

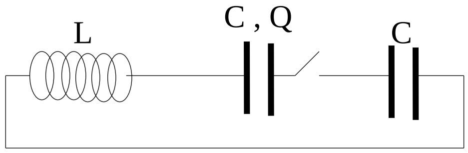
$$\vec{B} = \frac{\mu_o J_s}{\pi} \cdot \text{arco tag } \frac{a}{2h} \vec{i}$$

La fuerza sobre un conductor de longitud $\vec{L}$ recorrido por una corriente I, situado en un campo magnético uniforme $\vec{B}$, se determina por la ecuación $\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$ y la fuerza por unidad de longitud se obtiene dividiendo por toda la longitud del conductor y si recordamos que el cociente de un vector entre su módulo es un vector unitario en su dirección resulta :

$$\frac{\vec{F}}{L} = I \frac{\vec{L}}{L} \times \vec{B} = I \vec{u}_L \times \vec{B} = I \vec{j} \times \frac{\mu_o J_S}{\pi} \cdot \text{arco tag} \frac{a}{2h} \vec{i} = -\frac{\mu_o I J_S}{\pi} \cdot \text{arco tag} \frac{a}{2h} \vec{k}$$

El vector $\frac{\vec{F}}{L}$ está contenido en el eje Z y dirigido en sentido negativo, en otras palabras, es perpendicular al hilo conductor y a la hoja y por ello existe una fuerza de atracción por parte de la hoja sobre el hilo conductor.

69.- El circuito de la figura esta formado por dos condensadores iguales de capacidad C y una autoinducción pura L. Inicialmente un condensador posee la carga Q y el otro está descargado. Se cierra el interruptor y una vez alcanzado el estado estacionario, calcular la intensidad de la corriente en el circuito y las cargas en cada condensador.



Cuando se alcance el estado estacionario, la intensidad de la corriente puede expresarse por la ecuación:

$$I = I_m \operatorname{sen}(\omega t)$$

En ese estado es un circuito oscilante; admitiendo que no radia, formado por un condensador equivalente C_E y una autoinducción pura.

$$\frac{1}{C_E} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} \quad \Rightarrow \quad C_E = \frac{C}{2} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{L C_E}} = \sqrt{\frac{2}{LC}}$$

Designamos con q la carga que en un determinado instante tiene el condensador que estaba cargado, el otro tendrá una carga Q-q. La intensidad de la corriente en ese instante es I. La energía almacenada inicialmente en el condensador cargado se distribuye ahora entre los dos condensadores y la autoinducción.

$$\frac{Q^2}{2C} = \frac{q^2}{2C} + \frac{(Q-q)^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} \Rightarrow Q^2 = q^2 + (Q-q)^2 + LCI^2 = q^2 + Q^2 + q^2 - 2Qq + LCI^2$$

$$\Rightarrow \quad LCI^2 = 2Qq - 2q^2 \Rightarrow \qquad I = \sqrt{\frac{2Qq - 2q^2}{LC}} \qquad (1)$$

El valor de la intensidad máxima I_m, lo obtendremos derivando I con respecto a q, e igualando a cero.

$$\frac{dI}{dq} = \frac{2Q - 4q}{2\sqrt{\frac{2Qq - 2q^2}{LC}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{Q}{2}$$

La intensidad máxima se obtiene cuando cada condensador tiene la misma carga.

Sustituyendo en (1).

$$I_m = \sqrt{\frac{2Q \cdot \frac{Q}{2} - 2 \cdot \frac{Q^2}{4}}{LC}} = \sqrt{\frac{Q^2}{2LC}}$$

La ecuación que describe la intensidad de la corriente en el circuito oscilante es:

$$I=\frac{Q}{\sqrt{2LC}}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{2}{LC}}\cdot t\right) \qquad (2)$$

De(1) y (2)

$$\frac{Q}{\sqrt{2LC}}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{2}{LC}}\cdot t\right)=\sqrt{\frac{2Qq-2q^2}{LC}} \quad\Rightarrow\quad \frac{Q^2}{2LC}\,\mathrm{sen}^2\left(\sqrt{\frac{2}{LC}}\cdot t\right)=\frac{2Qq-2q^2}{LC}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q^2\mathrm{sen}^2\left(\sqrt{\frac{2}{LC}}\cdot t\right)=4Qq-4q^2\Rightarrow q^2-Qq+AQ^2=0,\ \text{siendo}\ A=\frac{1}{4}\mathrm{sen}^2\left(\sqrt{\frac{2}{LC}}\cdot t\right)$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$q=\frac{Q\pm\sqrt{Q^2-4Q^2A}}{2}=\frac{Q\pm Q\sqrt{1-4A}}{2}=\frac{Q\left[1\pm\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\left(\sqrt{\frac{2}{LC}}\cdot t\right)}\right]}{2}\Rightarrow$$

$$q=\frac{Q\left[1\pm\sqrt{\cos^2\left(\sqrt{\frac{2}{LC}}\cdot t\right)}\right]}{2}=\frac{Q\left[1\pm\cos\left(\sqrt{\frac{2}{LC}}\cdot t\right)\right]}{2}$$

Para t=0, la solución positiva da el valor q=Q y la negativa q=0, un condensador está completamente cargado y el otro descargado a medida que el tiempo transcurre el coseno es menor que uno y por tanto el cargado disminuye su carga y el que estaba descargado comienza a cargarse.