70.- En cada uno de los vértices de un pentágono regular de altura 2b, existe una carga Q. Las cargas se encuentran en el plano XY como se indica en la figura 1. . En el eje Z existe un punto P que está a una altura h respecto del plano XY.

Determinar: 1) La intensidad $\vec{E}$ del campo gravitatorio en el punto P.

2) ¿Para qué valor de h el módulo del campo es máximo?

3) Dibujar la gráfica del módulo del campo frente a la altura h, si q=1/9.10^{-9} C y b = 1 m.

Dato: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$

1) De acuerdo con el principio de superposición, el campo $\vec{E}$ es la suma vectorial de los campos creados por cada una de las cargas.
Determinamos en primer lugar las coordenadas de posición de cada carga en el plano XY.(figura 1)

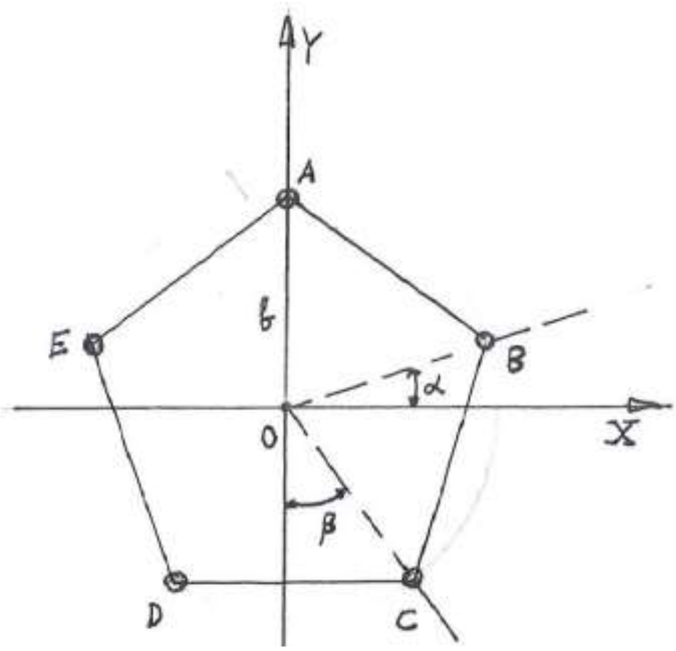


Fig.1

Carga situada en A , $\left(0 \ ; b\,\vec{j} \ ; 0\right)$; Carga situada en B , $\left(b\cos\alpha\,\vec{i} \ ; \ b\,\mathrm{sen}\alpha\,\vec{j}\right)$

Carga situada en C , $\left(b\,\mathrm{sen}\beta\,\vec{i} \ ; \ -b\cos\beta\,\vec{j} \ ; \ 0\right)$;

Carga situada en D , $\left(-b\,\mathrm{sen}\beta\,\vec{i} \ ; \ -b\cos\beta\,\vec{j} \ ; \ 0\right)$

Carga situada en E , $\left(-b\,\mathrm{sen}\beta\,\vec{i} \ ; \ b\cos\beta\,\vec{j} \ ; \ 0\right)$

La posición del punto P es : $\left(0\ ;0\ ;\ \ h\bar{k}\right)$

La distancia de la carga situada en A al punto P es: $d = \sqrt{b^2 + h^2}$

El módulo del vector campo creado por la carga Q situado en A es:

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{d^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{\left(b^2 + h^2\right)}:$$

El vector $\vec{d} = A\vec{O} + O\vec{P} = -b\,\vec{j} + h\,\vec{k}$

El vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{d}$ es: $\vec{u}_A = \frac{\vec{d}}{d} = \frac{-b\,\vec{j} + h\,\vec{k}}{\sqrt{b^2 + h^2}}$

El vector campo creado por la carga situada en A en el punto P es:

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O}\frac{Q}{\left(b^2 + h^2\right)}\vec{u}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O}\frac{Q}{\left(b^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-b\,\vec{j} + h\,\vec{k}\right) = \Omega\left(-b\,\vec{j} + h\,\vec{k}\right)$$

Para la caga situada en B, el valor de Ω es el mismo que en el caso anterior. Varía su vector unitario.

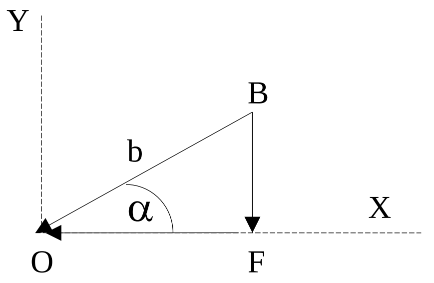


Fig.2

La figura 2 reproduce una parte de la figura 1.

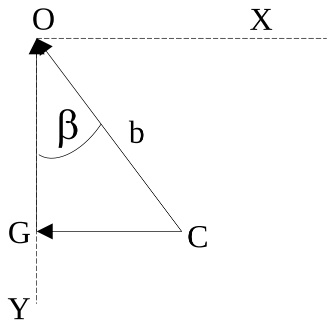
Se deduce que

$$B\vec{O} = B\vec{F} + F\vec{O} = -b\,\mathrm{sen}\alpha\,\vec{j} - b\cos\alpha\,\vec{i}$$

$$\vec{d} = B\vec{O} + O\vec{P} = -b\cos\alpha\,\vec{i} - b\,\mathrm{sen}\alpha\,\vec{j} + h\,\vec{k} \Rightarrow \vec{u}_B = \frac{-b\cos\alpha\,\vec{i} - b\,\mathrm{sen}\alpha\,\vec{j} + h\,\vec{k}}{\sqrt{b^2 + h^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}_B = \Omega \cdot \left(-b\cos\alpha\,\vec{i} - b\,\mathrm{sen}\alpha\,\vec{j} + h\,\vec{k}\right)$$

Para la carga situada en C

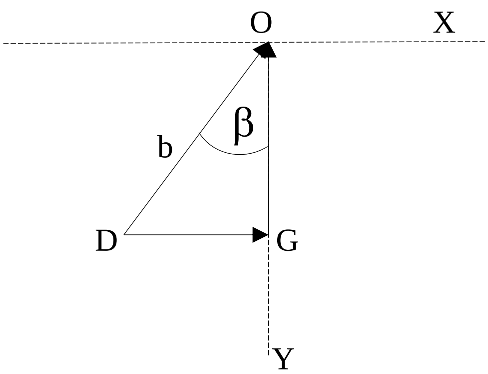


$$\vec{CO} = \vec{CG} + \vec{GO} = -b\,\mathrm{sen}\beta\,\vec{i} + b\cos\beta\,\vec{j}$$

$$\vec{d} = \vec{CO} + \vec{OP} = -b\,\mathrm{sen}\beta\,\vec{i} + b\cos\beta\,\vec{j} + h\,\vec{k} \Rightarrow \vec{u}_C = \frac{-b\,\mathrm{sen}\beta\,\vec{i} + b\cos\beta\,\vec{j} + h\,\vec{k}}{\sqrt{b^2 + h^2}} \Rightarrow :$$

$$\Rightarrow \vec{E}_C = \Omega \cdot \left(-b\,\mathrm{sen}\beta\,\vec{i} + b\cos\beta\,\vec{j} + h\,\vec{k}\right)$$

Para la carga situada en D

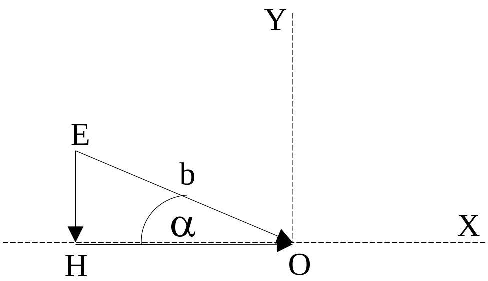


$$\vec{DO} = \vec{DG} + \vec{GO} = b\,\mathrm{sen}\beta\,\vec{i} + b\cos\beta\,\vec{j}$$

$$\vec{d} = \vec{DO} + \vec{OP} = b\,\mathrm{sen}\beta\,\vec{i} + b\cos\beta\,\vec{j} + h\,\vec{k} \Rightarrow \vec{u}_D = \frac{b\,\mathrm{sen}\beta\,\vec{i} + b\cos\beta\,\vec{j} + h\,\vec{k}}{\sqrt{b^2 + h^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}_D = \Omega \cdot \left(b\,\mathrm{sen}\beta\,\vec{i} + b\cos\beta\,\vec{j} + h\,\vec{k}\right)$$

Para la carga situada en E



$$\vec{EO} = \vec{EH} + \vec{HO} = -b\,\mathrm{sen}\alpha\,\vec{j} + b\cos\alpha\,\vec{i}$$

$$\vec{d} = \vec{EO} + \vec{OP} = -b\,\text{sen}\alpha\,\vec{j} + b\cos\alpha\,\vec{i} + h\,\vec{k} \Rightarrow \vec{u}_E = \frac{-b\,\text{sen}\alpha\,\vec{j} + b\cos\alpha\,\vec{i} + h\,\vec{k}}{\sqrt{b^2+h^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}_E = \Omega\cdot\left(b\cos\alpha\,\vec{i} - b\,\text{sen}\alpha\,\vec{j} + h\,\vec{k}\right)$$

El campo $\vec{\boldsymbol{E}}$

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D + \vec{E}_E = \Omega\cdot\begin{pmatrix} -b\,\vec{j} + h\,\vec{k} - b\cos\alpha\,\vec{i} - b\,\text{sen}\alpha\,\vec{j} + h\,\vec{k} \\ -b\,\text{sen}\beta\,\vec{i} + b\cos\beta\,\vec{j} + h\,\vec{k} + \\ +b\,\text{sen}\beta\,\vec{i} + b\cos\beta\,\vec{j} + h\,\vec{k} + \\ +b\cos\alpha\,\vec{i} - b\,\text{sen}\alpha\,\vec{j} + h\,\vec{k} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{E} = \Omega\cdot\left[5h\,\vec{k} + \vec{i}(-b\cos\alpha - b\,\text{sen}\beta + b\,\text{sen}\beta + b\cos\alpha) + \vec{j}(-b - b\,\text{sen}\alpha + b\cos\beta + b\cos\beta - b\,\text{sen}\alpha)\right]$$

$$\vec{E} = \Omega\cdot\left[5h\,\vec{k} + \vec{j}(-b - 2b\,\text{sen}\alpha + 2b\cos\beta)\right]$$

Teniendo en cuenta que a = 18º y b = 36º , el término que multiplica al vector $\vec{j}$ es nulo.

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O}\,\frac{5Q\,h}{\left(b^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\vec{k}$$

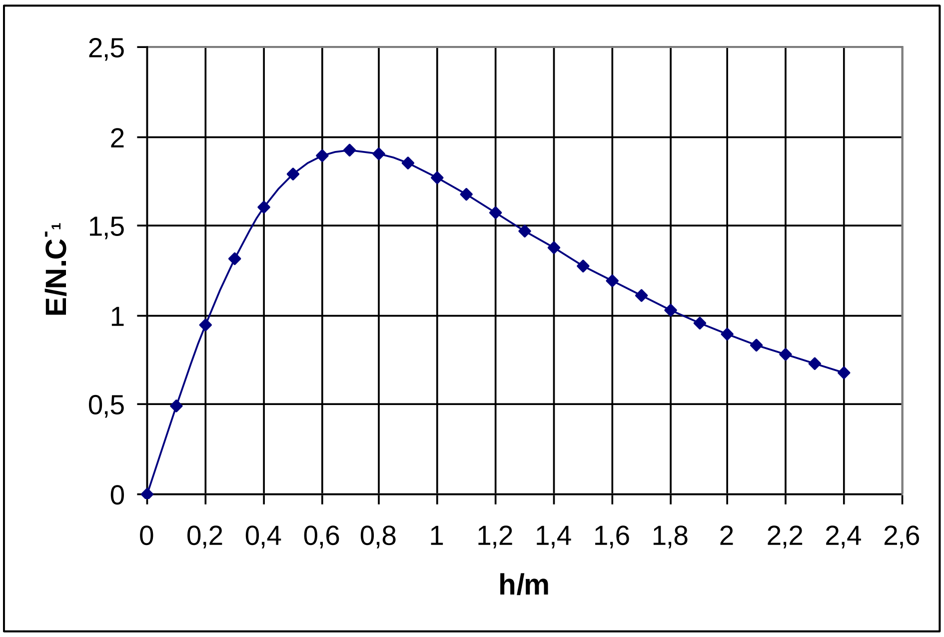
El campo solamente tiene componente vertical..

2) Para hallar el valor de h derivamos el módulo del campo respecto a la variable h e igualamos a cero.

$$\frac{dE}{dh} = \frac{5Q}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{\left(b^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot 1 - h\cdot\frac{3}{2}\left(b^2+h^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2h}{\left(b^2+h^2\right)^3} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\left(b^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(b^2+h^2\right)^{\frac{1}{2}}} = 3h^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ b^2 + h^2 = 3h^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{b\sqrt{2}}{2}$$

3)



71-. Supongamos que la energía en reposo de un partícula relativista es precisamente la energía electrostática del electrón, a) calcular el radio del electrón si su carga e, se distribuye de forma uniforme por todo el volumen esférico y b) si su carga se distribuye de forma homogénea por la superficie.

Entre el caso a) y b) existe una diferencia. La energía creada por la carga, está en el caso a) tanto en el exterior como en el interior de la esfera del electrón, mientras que en el caso b) solamente está en el exterior ya que en el interior el campo es nulo.
La energía almacenada en un campo eléctrico esta dada por la expresión

$$U = \frac{\varepsilon_o}{2}\int E^2 dV$$

La integral debe calcularse en todo el espacio en el que exista campo eléctrico..

Para el caso a), dividimos el campo creado en dos partes, una la que corresponde al espacio exterior al electrón, y otra al interior del mismo.

Para calcular el campo exterior aplicamos el teorema de Gauss

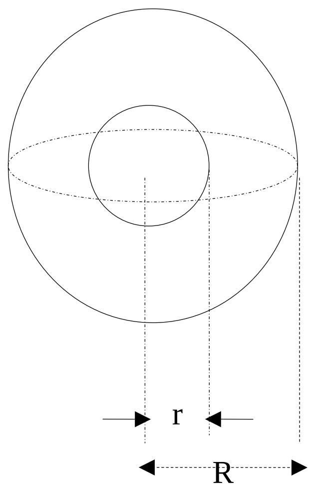
Consideramos una esfera de radio r>R (R radio del electrón) concéntrica con la esfera que contiene la carga e. El teorema de Gauss expresado en forma matemática es:

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum q}{\varepsilon_o}$$

En nuestro caso $\sum q = e$

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{e}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E_e \cdot 4\pi r^2 = \frac{e}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E_e = \frac{e}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r^2} \quad (1)$$

Para calcular el campo en el interior del electrón, hacemos uso del teorema de Gauss



Consideramos una esfera concéntrica con la que tiene la carga Q´ de radio r<R

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E_i \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q´}{\varepsilon_o}$$

Q´ es la carga contenida en la esfera de radio r. Teniendo presente que la distribución de carga es homogénea, la densidad volumétrica de carga es la misma en la esfera de radio R que en la de radio r.

$$\rho = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Q´}{\frac{4}{3}\pi r^3} \quad \Rightarrow \quad Q´ = e\frac{r^3}{R^3}$$

$$E_i = \frac{Q´}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{e\frac{r^3}{R^3}}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{e\,r}{4\pi\varepsilon_o R^3}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad dV = 4\pi r^2 dr$$

Calculamos la energía almacenada en el campo exterior a la esfera.

$$U_e = \frac{\varepsilon_o}{2}\int E^2 dV = \frac{\varepsilon_o}{2}\int_R^\infty \left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_o r^2}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_o}\int_R^\infty \frac{1}{r^2}dr = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{R}\right] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad U_e = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R}$$

Calculamos la energía almacenada en el campo interior a la esfera.

$$U_i = \frac{\varepsilon_o}{2}\int E^2 dV = \frac{\varepsilon_o}{2}\int_0^R \left(\frac{Q´r}{4\pi\varepsilon_o R^3}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_o R^6}\int_o^R r^4 dr = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_o R^6}\left[\frac{R^5}{5}-\frac{0}{5}\right] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad U_i = \frac{e^2}{40\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R}$$

$$U_{total} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o R} + \frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_o R} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o R}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\right) = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_o R}$$

Según el enunciado del problema $U_{total} = m_o c^2$ (m_o masa en reposo del electrón)

$$m_o c^2 = \frac{3e^2}{20\pi\varepsilon_o R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{3e^2}{20\pi\varepsilon_o\, m_o c^2}$$

b) Ahora la energía se encuentra solamente en el campo exterior

$$m_o c^2 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_o R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_o\, m_o c^2}$$

72.- Un aro de hilo fino y radio R y carga q está en el plano XY y su centro coincide con el eje de coordenadas. A lo largo del eje Z positivo existe un hilo de longitud infinita cuya carga por unidad de longitud es λ. Se pide la fuerza de interacción entre el anillo y el hilo.

Consideramos una longitud dh sobre el hilo que está a una altura h del centro del aro. La carga de ese elemento es $dq = \lambda dh$, el cual crea un campo eléctrico a lo largo del aro. En la figura se representa el vector campo en dos puntos del aro P y P´ separados por un diámetro

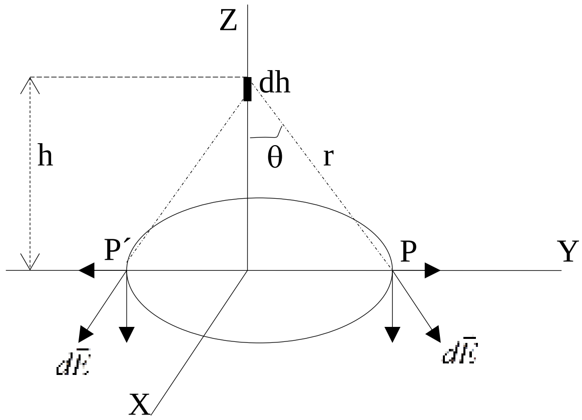


Fig.1

En la figura 1 se ha dibujado el vector campo tanto en P como en P´, así como sus componentes sobre los ejes Y y Z(figura 1). Se deduce de la figura que las componentes sobre el eje Y se anulan y se suman las del eje Z. Podemos escoger pares de puntos como P y P´ a lo largo del aro teniendo todo el conjunto la carga q. El módulo de la fuerza sobre el aro debido al elemento dh es:

$$dF = dE \cdot q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda dh}{r^2} \cdot q \cdot \cos\theta$$

En esta ecuación existen tres variable: r , θ y h, que pueden relacionarse entre ellas.

$$r^2 = h^2 + R^2 \quad ; \quad \cos\theta = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}$$

Llevando estas relaciones a la fuerza resulta:

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda dh}{h^2 + R^2} \cdot q \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} = \frac{\lambda q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{h\ dh}{\left(h^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Para calcular la fuerza de todo el hilo hemos de integrar la ecuación anterior poniendo como límites de la variable h cero e infinito.

$$F=\int_0^\infty \frac{\lambda q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{h\ dh}{\left(h^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\lambda q}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^\infty \frac{h\ dh}{\left(h^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Para resolver la integral hacemos el cambio de variable siguiente

$$h^2+R^2=a^2 \quad \Rightarrow \quad h\ dh=a\ \ da$$

$$\int \frac{a\,da}{a^3}=\int\frac{da}{a^2}=-\frac{1}{a}=-\frac{1}{\sqrt{h^2+R^2}}$$

Sustituyendo en (1)

$$F=\frac{\lambda q}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^\infty \frac{h\ dh}{\left(h^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\lambda q}{4\pi\varepsilon_o}\left(-\frac{1}{\sqrt{h^2+R^2}}\right)_o^\infty=\frac{\lambda q}{4\pi\varepsilon_o}\left(-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\sqrt{R^2}}\right)=\frac{\lambda q}{4\pi\varepsilon_o R} \quad (1)$$

El vector fuerza es: $\vec{F}=\dfrac{\lambda q}{4\pi\varepsilon_o R}\left(-\vec{k}\right)$.

Este problema se puede resolver también a partir del campo creado por el aro en el lugar donde se encuentra el elemento de corriente dh.

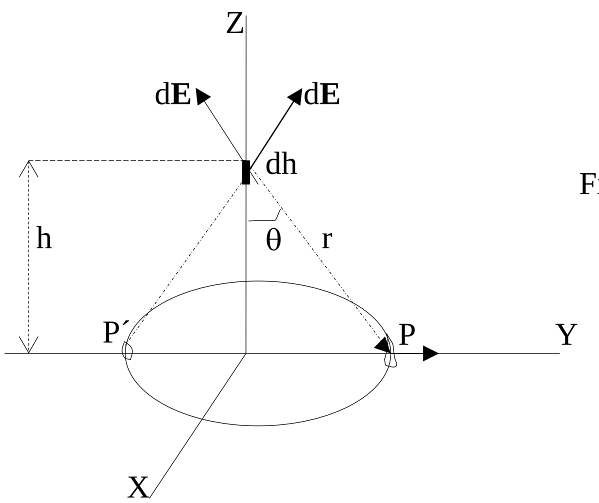


Fig.2

En la figura 2 hemos elegido dos elementos del aro de longitud cada uno dl, (situados en P y P´) y que cada uno posee la carga:

$$dq=\frac{q}{2\pi R}dl$$

Los cuales crean sendos campos del mismo modulo .Se observa en la figura 2 que las componentes sobre el eje Y se anulan y se suman sobre el eje Z, Esto ocurre para cada par de elementos separados por un diámetro en el aro. Si lo aplicamos a todo el aro, que posee la carga q , el módulo del campo debido a todo el aro en el punto de altura h es:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{\left(h^2+R^2\right)}\cos\theta$$

El módulo de la fuerza que sufre un elemento de longitud dh y carga dq =λ dh vale:

$$dF = E\cdot\lambda\,dh = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q\ \cos\theta}{\left(h^2+R^2\right)}\lambda\ dh$$

De la figura se deduce que

$$\cos\theta = \frac{h}{h^2+R^2}$$

El módulo de la fuerza sobre el hilo es:

$$F = \frac{\lambda\,q}{4\pi\varepsilon_O}\int_0^{\infty}\frac{h\ \ dh}{\left(h^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda\,q}{4\pi\varepsilon_O R}$$

Resultado igual al obtenido anteriormente

El vector fuerza es: $\vec{F} = \frac{\lambda q}{4\pi\varepsilon_o R}\vec{k}$.

El vector fuerza tiene la dirección positiva del eje Z ya que corresponde a la fuerza del aro sobre el hilo, mientras que antes obtuvimos la fuerza del hilo sobre el aro. Este resultado está de acuerdo con el tercer principio de la Dinámica o principio de acción y reacción.

73.-Se asocian en paralelo N pilas iguales cada una de fuerza electromotriz ε y resistencia interna r. Dicha asociación se une a una resistencia exterior R con lo que circula por ella una intensidad I. Ahora, a una de las pilas de la asociación se cambia su polaridad y la intensidad que circula por R es I´ Calcular la relación I´/I.

Cuando las N pilas están asociadas en paralelo, el conjunto es equivalente a una pila de la misma fuerza electromotriz ε y resistencia menor, de valor r/N. La intensidad que circula por la resistencia exterior es:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + \frac{r}{N}} \quad (1)$$

Si se cambia la polaridad de una pila, el circuito resultante es el de la figura 1. El equivalente a las N-1 pilas que se encuentran asociadas en paralelo es una pila de fuerza electromotriz ε con una resistencia interna de valor: $\frac{r}{N-1}$.Esta pila está en paralelo con una de fuerza electromotriz ε y resistencia interna r, siendo sus polaridades opuestas.

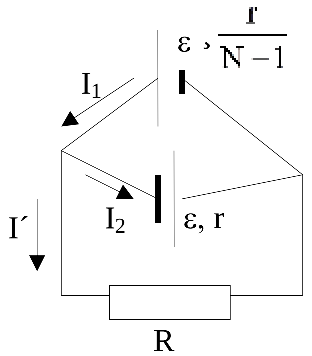


Fig.1

Aplicamos las leyes de Kirchhoff a uno de los nudos y a las dos mallas: una abarca R y la pila superior y la otra R y la pila inferior.

$$I´ = I_1 - I_2$$

$$I´R + I_1 \frac{r}{N-1} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{(N-1)(\varepsilon - I´R)}{r}$$

$$I´R + I_2 r = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{\varepsilon - I´R}{r}$$

Sustituimos las dos últimas ecuaciones en la primera

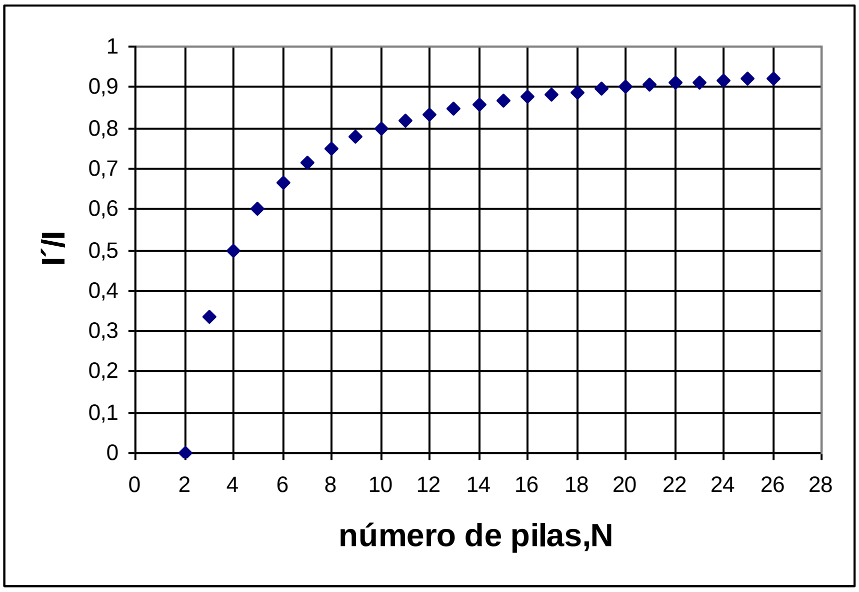
$$I´ = \frac{(N-1)\varepsilon - (N-1)I´R - \varepsilon + I´R}{r} = \frac{(N-2)\varepsilon - N\,I´R}{r} \quad \Rightarrow \quad I´(r + N\,R) = (N-2)\varepsilon \quad (2)$$

Despejamos ε de la ecuación (1) y la sustituimos en (2)

$$I'(r+NR)=(N-2)\varepsilon=(N-2)I\left(R+\frac{r}{N}\right)\ \Rightarrow\ \frac{I'}{I}=\frac{(N-2)\left(\frac{RN+r}{N}\right)}{r+NR}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{I'}{I}=\frac{(N-2)(r+NR)}{N(r+NR)}=1-\frac{2}{N}$$

La gráfica de I/I´ frente a N es la siguiente:



Si la batería es de cuatro pilas al cambiar la polaridad de una de ellas la intensidad que pasa por la resistencia R se reduce a la mitad. A medida que aumenta el número de pilas la disminución de la intensidad es cada vez menor.

74.-Un generador de corriente alterna se une a una resistencia de 5 Ω que está en paralelo con una bobina de coeficiente de autoinducción 0,04 H. El voltaje aplicado está dado por la ecuación $V = 10\cos(50t + 60^o)$. Determinar la ecuación de la intensidad total utilizando la función coseno.

Nota. Representamos un número complejo en su forma polar (r , θ), θ se mide en grados o en radianes.

La intensidad total I, que es la que circula por el generador, se bifurca en dos intensidades: una i_R que pasa por la resistencia y otra i_L que atraviesa la bobina. Recordemos que

$$i_R = \frac{\text{Voltaje}}{\text{Resistencia}} \quad ; \qquad V = L\frac{di_L}{dt} \;\Rightarrow\; i_L = \frac{1}{L}\int V\,dt$$

$$I = i_R + i_L = \frac{V}{R} + \frac{1}{L}\int V dt = \frac{10\cos(50t + 60^o)}{5} + \frac{1}{0{,}04}\int 10\cos(50t + 60^o)dt \;\Rightarrow$$

$$I = 2\cos(50t + 60^o) + \frac{10}{0{,}04}\,\frac{\operatorname{sen}(50t + 60^o)}{50} = 2\cos 50t\cdot\cos 60^o - 2\operatorname{sen} 50t\cdot\operatorname{sen} 60^o +$$
$$+ 5\operatorname{sen} 50t\cdot\cos 60^o + 5\cos 50t\cdot\operatorname{sen} 60^o = \cos 50t\cdot(2\cos 60^o + 5\operatorname{sen} 60^o) + \operatorname{sen} 50t(5\cos 60^o - 2\operatorname{sen} 60^o) \Rightarrow$$

$$I = 5{,}33\cos 50t + 0{,}77\operatorname{sen} 50t$$

Escribimos la ecuación de la intensidad en la forma $I = I_o\cos(50t + \varphi)$

$$I = I_o\cos(50t + \varphi) = I_o\cos 50t\cdot\cos\varphi - I_o\operatorname{sen} 50t\cdot\operatorname{sen}\varphi$$

$$I = 5{,}33\cos 50t + 0{,}77\operatorname{sen} 50t$$

Igualando miembro a miembro las dos ecuaciones resulta:

$$I_o\cos 50t\cdot\cos\varphi = 5{,}33\cos 50t \;\Rightarrow\; I_o\cos\varphi = 5{,}33$$

$$-I_o\operatorname{sen} 50t\cdot\operatorname{sen}\varphi = 0{,}77\operatorname{sen} 50t \;\Rightarrow\; -I_o\operatorname{sen}\varphi = 0{,}77$$

Dividiendo las dos últimas ecuaciones

$$\operatorname{tag}\varphi = -\frac{0,77}{5,33} \quad \Rightarrow \quad \varphi = -8,2^{\circ}$$

$$I_o = \frac{5,33}{\cos(-8,2^{\circ})} = 5,4 \text{ A}$$

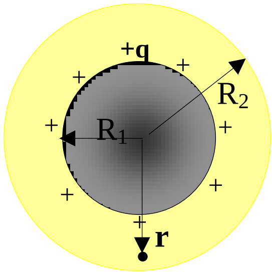
$$I = 5,4\cos(50t - 8,2)$$

El valor de I_o lo podemos hallar por otro camino. Calculamos la impedancia del circuito en paralelo

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{L\omega}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \left(\frac{1}{0,04 \cdot 50}\right)} = 0,5385 \;\Rightarrow\; Z = 1,86\ \Omega$$

$$I_o = \frac{V_M}{Z} = \frac{10}{1,85} = 5,4 \text{ A}$$

75.- Una esfera conductora de radio R_1 se encuentra rodeada por un dieléctrico de radio R_2 y constante dieléctrica relativa ε. Calcular la capacidad de este conductor.



La capacidad de un conductor se define como la razón entre su carga y su potencial, de modo que si este tiene una carga q, para poder calcularla hemos de determinar el potencial de su superficie, Asignaremos un punto de la superficie con la letra A.

La esfera se encuentra rodeada por el dieléctrico de radio R_2 y por una capa de vacío de constante dieléctrica ε_o que se extiende desde R_2 hasta el infinito.

De acuerdo con las consecuencias del teorema de Gauss, por tratarse de una esfera conductora, se puede considerar idealmente toda su carga en su centro y aplicar la ecuación del campo eléctrico valida para las cargas puntuales,

Supongamos que la esfera conductora posee una carga +q. A una distancia r del centro de la esfera, siendo $R_2>r>R_1$, el campo eléctrico varía su módulo E, según la dirección radial r, medida esta distancia desde el centro de la esfera y por ser el campo eléctrico el gradiente del potencial cambiado de signo vale: $E=-\frac{dV}{dr}$:

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_O\,\varepsilon}\frac{1}{r^2}=-\frac{dV}{dr}\Rightarrow-\int_A^B dV=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_O\,\varepsilon}\frac{dr}{r^2}\Rightarrow V_A-V_B=\frac{q}{4\pi\varepsilon_O\,\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\quad(1)$$

A es cualquier punto de la superficie de la esfera y B cualquier punto que dista R_2 del centro de la esfera.

El campo para un punto que diste r del centro de la esfera y sea $r>R_2$, puesto que ahora el medio es el vacío, de constante dieléctrica ε_o; y tomando el segundo punto en el infinito, vale:

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_O}\frac{1}{r^2}=-\frac{dV}{dr}\Rightarrow-\int_B^\infty dV=\int_{R_2}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_O}\frac{dr}{r^2}\Rightarrow V_B-V_\infty=\frac{q}{4\pi\varepsilon_O}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{\infty}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_B=\frac{q}{4\pi\varepsilon_O}\frac{1}{R_2}$$

Hemos considerado como punto de referencia para el potencial, al que asignamos el valor cero, el infinito, de modo que $V_\infty=0$

Sustituimos el valor de V_B en la ecuación (1)

$$V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_O}\frac{1}{R_2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_O\,\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_O}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\varepsilon R_1} - \frac{1}{\varepsilon R_2}\right)$$

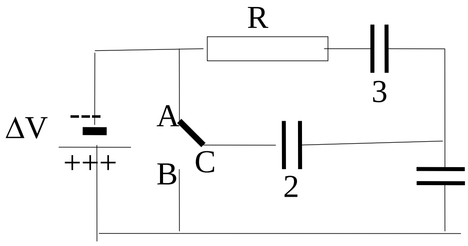
La capacidad de la esfera es:

$$C = \frac{q}{V_A} = \frac{4\pi\varepsilon_o}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\varepsilon R_1} - \frac{1}{\varepsilon R_2}} = \frac{4\pi\varepsilon_o}{\frac{1}{R_2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon R_1}} = \frac{4\pi\varepsilon_o}{\frac{1}{R_2}\left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon R_1}} \Rightarrow$$

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_o}{\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\varepsilon - 1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right]} = \frac{4\pi\varepsilon_o\,\varepsilon}{\frac{\varepsilon - 1}{R_2} + \frac{1}{R_1}} = \frac{4\pi\varepsilon_o\varepsilon R_1 R_2}{R_1(\varepsilon - 1) + R_2}$$

Que como se puede observar en la ecuación solo depende de magnitudes geométricas y de las constantes electrostáticas de los medios.

76.-En la figura inferior los tres condensadores son iguales, siendo la capacidad de cada uno C, y la caída de tensión en los bornes de la batería ΔV. El interruptor se cambia de la posición CA a la CB y se pide la energía que ha aportado la batería para ese cambio. En la posición inicial el sistema se encuentra en estado estacionario.



Cuando el interruptor se encuentra en la posición CA y se ha alcanzado el estado estacionario podemos prescindir de la resistencia R, ya que no existe corriente por el circuito y los condensadores se encuentran cargados con los signos de cargas que se indican en la figura 1.

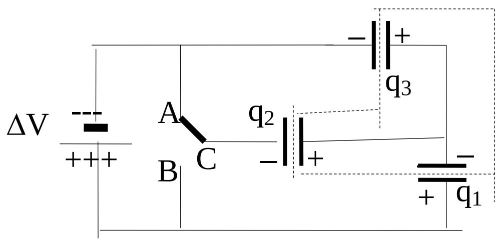


Fig.1

La línea quebrada de puntos de la figura 1 abarca a los tres condensadores con las armaduras que no están en contacto con la fuente de corriente y que se han cargado por inducción electrostática, por tanto por el principio de conservación de la carga eléctrica se verifica que:

$$q_1 = q_2 + q_3$$

Los condensadores 2 y 3 se encuentran en paralelo, lo que indica que están a la misma diferencia de potencial y como tienen la misma capacidad, resulta:

$$q_2 = q_3 = q \quad \Rightarrow \quad q_1 = 2q$$

Designamos con ΔV_1 a la caída de tensión en el condensador 1 y ΔV_2 a la caída de tensión entre los condensadores 2 y 3.

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{q_1}{C} + \frac{q_2}{C} = \frac{q_1}{C} + \frac{q_1}{2C} = \frac{3q_1}{2C} \quad \Rightarrow \quad q_1 = \frac{2C\Delta V}{3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad q = q_2 = q_3 = \frac{C\Delta V}{3}$$

Cuando el interruptor pasa de la posición CA a la CB y se alcanza el estado estacionario, los condensadores 1 y 2 están en paralelo y el conjunto en serie con el 3, tal como puede observarse en la figura 2.

Designamos Q_1, Q_2 y Q_3 la carga de los condensadores y con Δv_1 la caída de tensión en el condensador 1 y Δv_2 la caída de tensión en el condensador 3.

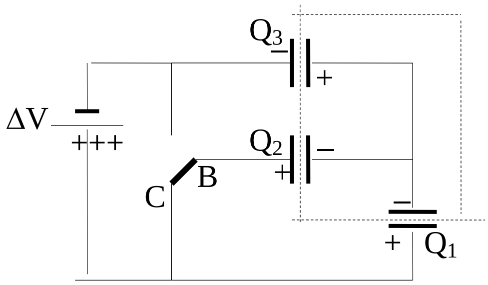


Fig.2

Siguiendo el razonamiento empleado en el caso anterior:

$$Q_3 = Q_1 + Q_2$$

Los condensadores 1 y 2 se encuentran en paralelo, lo que indica que están a la misma diferencia de potencial y como tienen la misma capacidad, resulta:

$$Q_1 = Q_2 = Q \quad \Rightarrow \quad Q_3 = 2Q$$

$$\Delta V = \Delta v_1 + \Delta v_2 = \frac{Q_1}{C} + \frac{Q_3}{C} = \frac{Q_3}{2C} + \frac{Q_3}{C} = \frac{3Q_3}{2C} \quad \Rightarrow \quad Q_3 = \frac{2C\Delta V}{3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Q = Q_1 = Q_2 = \frac{C\Delta V}{3}$$

Comparamos las cargas de los condensadores en los dos casos:

$$Q_1 - q_1 = \frac{C\Delta V}{3} - \frac{2C\Delta V}{3} = -\frac{C\Delta V}{3}$$
$$Q_2 - q_2 = \frac{C\Delta V}{3} - \frac{C\Delta V}{3} = 0$$
$$Q_3 - q_3 = \frac{2C\Delta V}{3} - \frac{C\Delta V}{3} = +\frac{C\Delta V}{3}$$

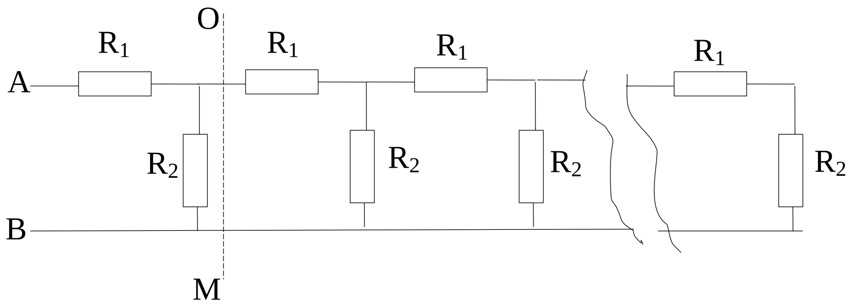
De un caso a otro el condensador 2 no cambia su carga, el condensador 3 la aumenta y el uno la disminuye en la misma cuantía.

Por lo tanto, la batería ha tenido que transportar carga, realizando un trabajo

$$W = \frac{C\,\Delta V}{3} \cdot \Delta V = \frac{C\,\Delta V^2}{3}$$

Como la energía electrostática de los condensadores, en los estados estacionarios inicial y final es la misma, el trabajo realizado por la batería aparece como energía calorífica desprendida en la resistencia R.

77.-El circuito de la figura es ilimitado. Calcular la resistencia entre los extremos A y B. Hallar el valor numérico si R_1 = 1000 Ω y R_2 = 470 Ω y si se intercambian las posiciones de las resistencias.



La resolución de este problema es semejante al problema 10 del apartado Electricidad que se encuentra en el almacén de esta web en la sección Problemas para una Olimpiada de Física.

Como el sistema es ilimitado, consideramos que a partir de la raya vertical OM de la figura y hacia la derecha la resistencia total es R_{OM}. Basándonos en que al ser ilimitado el circuito, el añadir a R_{OM} las resistencias que están a la izquierda de OM no produce cambios.

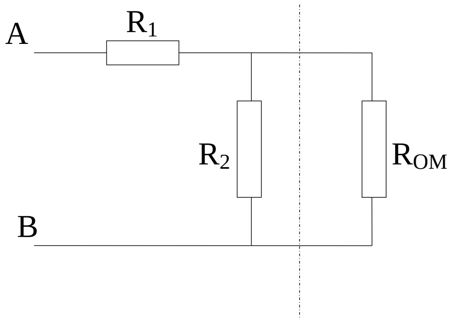


Fig.1

De la figura 1 se deduce que R_{OM} y R_2 están en paralelo:

$$\frac{1}{R_E}=\frac{1}{R_{OM}}+\frac{1}{R_2}=\frac{R_{OM}+R_2}{R_{OM}\cdot R_2} \quad\Rightarrow\quad R_E=\frac{R_{OM}\cdot R_2}{R_{OM}+R_2}$$

R_E está en serie con R_1.

$$R_{Total}=R_{OM}=R_1+\frac{R_{OM}\cdot R_2}{R_{OM}+R_2}\Rightarrow R_{OM}^2+R_{OM}R_2=R_{OM}R_1+R_1R_2+R_{OM}R_2\Rightarrow$$

$$R_{OM}^2-R_{OM}R_1-R_1R_2=0 \qquad\Rightarrow\qquad R_{OM}=\frac{R_1+\sqrt{R_1^2+4R_1R_2}}{2} \quad (1)$$

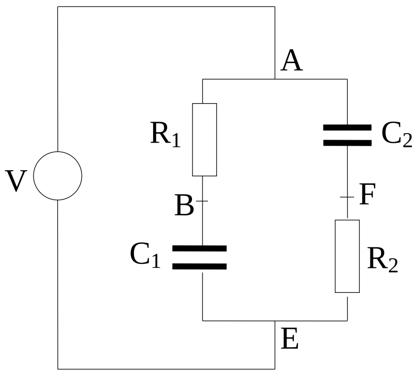
Aplicamos la fórmula (1) cuando R_1=1000 Ω y R_2 =470 Ω

$$R_{OM} = \frac{1000 + \sqrt{1000^2 + 4 \cdot 1000 \cdot 470}}{2} = 1349\Omega$$

Aplicamos la fórmula (1) cuando R_1=470 Ω y R_2 =1000 Ω.

$$R_{OM} = \frac{470 + \sqrt{470^2 + 4 \cdot \cdot 470 \cdot 1000}}{2} = 960\ \Omega$$

78.- En el circuito de alterna de la corriente deducir la intensidad que circula por cada rama y la diferencia de potencial entre los puntos F y B.



$V = 220 \cos 50t$
$R_1 = 5000\ \Omega$
$C_1 = 1\ \mu F$
$R_2 = 10\,000\ \Omega$
$C_2 = 2\ \mu F$

Calculamos las reactancias capacitivas de los dos condensadores.

$$X(C_1) = \frac{1}{C_1\omega} = \frac{1}{10^{-6}\cdot 50} = 20000\ \Omega \quad ; \quad X(C_2) = \frac{1}{C_2\omega} = \frac{1}{2.10^{-6}\cdot 50} = 10000\ \Omega$$

Impedancia de la rama ABE

$$\overline{Z}_1 = 5000 - 20000\bar{j} \;\; ; \;\; Z_1 = \sqrt{5000^2 + 20000^2} = 20616\Omega \;\; ; \;\; \mathrm{tag}\varphi_1 = \frac{-20000}{5000} \Rightarrow \varphi_1 = -76^{\circ}$$

$$\overline{Z}_1 = 20616//-76^{\circ}$$

Impedancia de la rama AFE

$$\overline{Z}_2 = 10000 - 10000\bar{j} \;\; ; \;\; Z_2 = \sqrt{10000^2 + 10000^2} = 14142\Omega \;\; ; \;\; \mathrm{tag}\varphi_2 = \frac{-10000}{10000} \Rightarrow \varphi_1 = -45^{\circ}$$

$$\overline{Z}_2 = 14142//-45^{\circ}$$

Ambas impedancias están en paralelo

$$\overline{Z}_T = \frac{\overline{Z}_1\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} = \frac{(20616//-76^{\circ})(14142//-45^{\circ})}{(5000 - 20000\bar{j}) + (10000 - 10000\bar{j})} = \frac{2,916.10^8//-121^{\circ}}{(15000 - 30000\bar{j})}$$

$$\overline{Z}_T = \frac{2,916.10^8//-121^{\circ}}{\sqrt{15000^2 + 30000^2}\;;\mathrm{tag}\varphi = \dfrac{-30000}{15000}} = \frac{2,916.10^8//-121^{\circ}}{3,354.10^4//-63,4^{\circ}} = 8694//-57,6^{\circ}$$

La intensidad que circula por el generador es:

$$\bar{I}_T = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}} = \frac{220//0^{\circ}}{8694//-57,6} = 0,0253//57,6^{\circ}$$

La intensidad por la rama ABE

$$\bar{I}_1 = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_1} = \frac{220//0º}{20616//-76º} = 0{,}0107//76º$$

La intensidad por la rama AFE

$$\bar{I}_2 = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_2} = \frac{220//0º}{14142//-45º} = 0{,}0156//45º$$

Diferencias de potencial a través de R_1 y C_1

$$\overline{V}(R_1) = \bar{I}_1\overline{R}_1 = (0{,}0107//76º)(5000//0º) = 53{,}5//76º$$

$$\overline{V}(C_1) = \bar{I}_1\overline{X}(C_1) = (0{,}0107//76º)(20000//-90º) = 214//-14º$$

Diferencias de potencial a través de R_2 y C_2

$$\overline{V}(R_2) = \bar{I}_2\overline{R}_2 = (0{,}0156//45º)(10000//0º) = 156//45º$$

$$\overline{V}(C_2) = \bar{I}_2\overline{X}(C_2) = (0{,}0156//45º)(10000//-90º) = 156//-45º$$

Construimos un diagrama en donde se reflejen el conjunto de los cálculos realizados. Dicho diagrama corresponde a la figura1

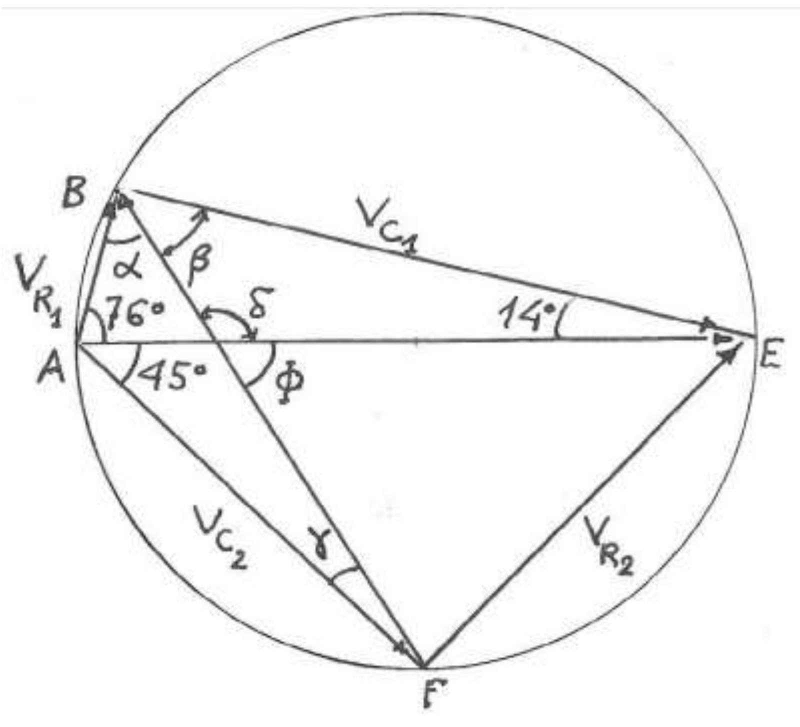


Fig.1

La recta AE tiene un valor de 220 V. AB corresponde a V_{R1} y su valor es 53,5 V y forma un ángulo de 76º.AF representa V_{C2} con un valor 156 V formando un ángulo de -45º.. BE corresponde a V_{C1} y FE a V_{R2}.

Para calcular el valor de FB utilizamos el teorema del coseno aplicado al triángulo ABF

$$FB = \sqrt{V_{R1}^2 + V_{C2}^2 - 2V_{R1}V_{C2} \cdot \cos(76º + 45º)} = \sqrt{53{,}5^2 + 156^2 - 2.53{,}5 * 156 * (-0515)} \Rightarrow$$

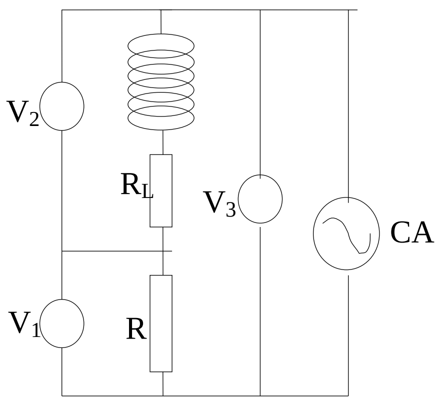
$$FB = 189V$$

Para calcular el ángulo entre AE y FB aplicamos el teorema del seno al triángulo ABF

$$\frac{sen121}{FB} = \frac{sen\,a}{V_{R1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{0{,}857}{189} = \frac{sen\,\alpha}{156} \quad \alpha = 45º \Rightarrow 76 + 45 + \varphi = 180 \Rightarrow$$

$$\varphi = 59º \quad \Rightarrow \quad \delta = 180 - 59 = 121º$$

79.- Con el dispositivo eléctrico de la figura, denominado el método de los tres voltímetros, es posible determinar a) la potencia suministrada a la bobina, b) su resistencia óhmica y c) su reactancia inductiva.



R es una resistencia de valor conocido llamada resistencia patrón, Z es la impedancia de la bobina que consta de una resistencia óhmica R_L y una reactancia inductiva X_L.

a) Designamos con I la intensidad eficaz del circuito, V_L la caída de tensión en R_L y V_B la caída de tensión en la autoinducción. Ambos voltajes están desfasados 90º. El diagrama de las tensiones es el de la figura 1

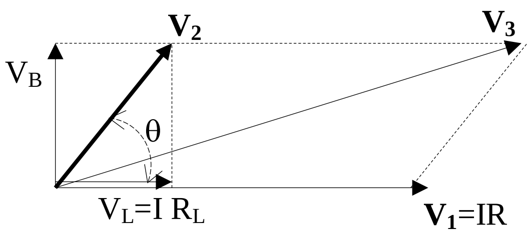


Fig.1

La potencia suministrada por el generador de alterna a la bobina vale: $P = I V_2 \cos\theta$. De la figura 1 al aplicar el teorema del coseno resulta:

$$V_3^2 = V_1^2 + V_2^2 - 2 V_1 V_2 \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{V_3^2 - V_1^2 - V_2^2}{2 V_1 V_2}$$

La intensidad eficaz que pasa por el circuito es: $I = \dfrac{V_1}{R}$

$$P = \frac{V_1}{R} \cdot V_2 \cdot \frac{V_3^2 - V_1^2 - V_2^2}{2 V_1 V_2} = \frac{V_3^2 - V_1^2 - V_2^2}{2\ R}$$

b) Si los voltímetros se consideran ideales tenemos las siguientes ecuaciones:

$$I = \frac{V_1}{R} \quad ; \quad I = \frac{V_2}{\sqrt{R_L^2 + X_L^2}} \quad ; \quad I = \frac{V_3}{\sqrt{(R_L + R)^2 + X_L^2}}$$

De las dos primeras ecuaciones se deduce que:

$$\left(\frac{V_1}{R}\right)^2 = \frac{V_2^2}{\left(R_L^2 + X_L^2\right)} \Rightarrow \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 = \frac{R^2}{R_L^2 + X_L^2} \Rightarrow R_L^2 + X_L^2 = R^2\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2$$

De la segunda y tercera ecuación:

$$\left(\frac{V_1}{V_3}\right)^2 = \frac{R^2}{(R_L + R)^2 + X_L^2} = \frac{R^2}{R_L^2 + R^2 + 2R_L R + X_L^2} = \frac{R^2}{R^2 + 2R_L R + R^2\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 + 2R_L R + R^2\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = R^2\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^2 \Rightarrow R + 2R_L = R\left[\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^2 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad R_L = \frac{R}{2}\left[\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^2 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 - 1\right]$$

c)

$$X_L^2 = R^2\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 - R_L^2 = R^2\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 - \frac{R^2}{4}\left[\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^2 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 - 1\right]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_L^2 = R^2\left[\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^2 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 - 1\right]^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_L = R\sqrt{\left[\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^2 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 - 1\right]^2\right]}$$