80.- Calcular el calor desprendido en una resistencia R por la que pasa una cantidad de electricidad q, cuando:
a) La corriente disminuye uniformemente hasta anularse en un tiempo Δt
b) La corriente disminuye gradualmente reduciéndose a la mitad cada vez que transcurre un tiempo Δt.

a) En la figura 1 representamos cómo varía la intensidad de la corriente.

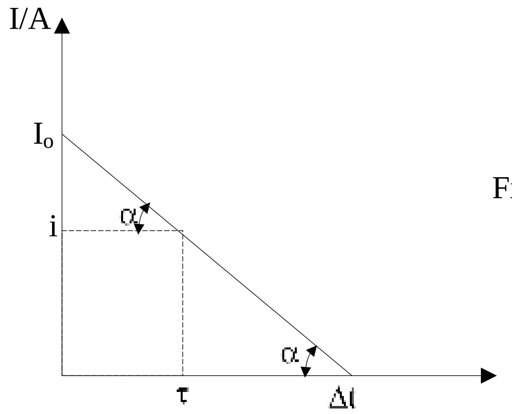


Fig.1

I_o representa la intensidad de la corriente en el instante inicial, i la intensidad de la corriente en un instante cualquiera τ , $0 \le \tau \le \Delta t$.

De la figura 1 se deduce que:

$$\operatorname{tag}\alpha = \frac{I_o}{\Delta t} = \frac{I_o - i}{\tau} \quad \Rightarrow \quad I_o\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\Delta t}\right) = \frac{i}{\tau} \quad \Rightarrow \quad i = I_o\left(1 - \frac{\tau}{\Delta t}\right)$$

La relación entre la carga q y la intensidad i es:

$$\int_0^q dq = \int_0^{\Delta t} i\, d\tau = \int_0^{\Delta t} I_o\, d\tau - \int_0^{\Delta t} \frac{I_o\, \tau}{\Delta t}\, d\tau \;\Rightarrow\; q = I_o \Delta t - \frac{I_o}{\Delta t}\cdot\frac{(\Delta t)^2}{2} = \frac{I_o\, \Delta t}{2} \quad \Rightarrow \quad I_o = \frac{2\, q}{\Delta t}$$

El calor desprendido en la resistencia R es:

$$Q = \int_0^{\Delta t} i^2\, R\, d\tau = \int_0^{\Delta t} I_o^2 \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t}\right)^2 R\, d\tau = I_o^2\, R \left[\int_0^{\Delta t} d\tau + \int_0^{\Delta t} \frac{\tau^2\, d\tau}{(\Delta t)^2} - \int_0^{\Delta t} \frac{2\,\tau\, d\tau}{\Delta t}\right]_0^{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad Q = I_o^2\, R\left[\Delta t + \frac{\Delta t}{3} - \Delta t\right] = \frac{I_o^2\, R\, \Delta t}{3} = \frac{\frac{4q^2}{(\Delta t)^2} R\;\, \Delta t}{3} = \frac{4q^2\, R}{3\, \Delta t}$$

b) La disminución de la corriente queda reflejada en la figura 2. Teniendo en cuenta cómo disminuye se deduce que la curva es exponencial.

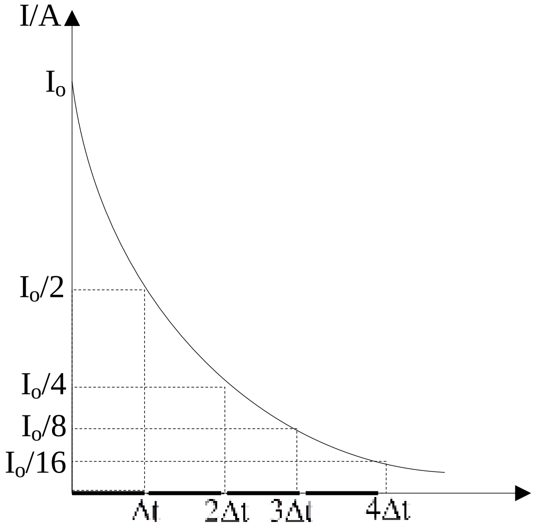


Fig.2

La ecuación matemática que la representa es del tipo: $i = I_o e^{-k\,\tau}$. Si $i = \frac{I_o}{2} \rightarrow \tau = \Delta t$

$$\frac{I_O}{2} = I_O\, e^{-k\,\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \ln 1 - \ln 2 = -k\,\Delta t \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln 2}{\Delta t} \Rightarrow \quad i = I_O\, e^{-\frac{\ln 2}{\Delta t}\cdot\tau}$$

La relación entre q, e i es:

$$\int_0^q dq = \int_0^\infty i\, d\tau = \int_0^\infty I_o\, e^{-\frac{\ln 2}{\Delta t}\cdot\tau}\, d\tau \quad \Rightarrow \quad q = \left[I_o\, e^{-\frac{\ln 2}{\Delta t}\cdot\tau} \cdot \frac{\Delta t}{-\ln 2} \right]_0^\infty \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad q = I_o\, e^{-\frac{\ln 2}{\Delta t}\cdot\infty} \cdot \frac{\Delta t}{-\ln 2} + I_o\, e^{-\frac{\ln 2}{\Delta t}\cdot 0} \cdot \frac{\Delta t}{\ln 2} = \frac{I_o\, \Delta t}{\ln 2} \quad \Rightarrow \quad I_o = \frac{q\, \ln 2}{\Delta t}$$

El calor desprendido en la resistencia R es:

$$Q=\int_0^\infty i^2 R\,d\tau=\int_0^\infty \left(I_o e^{-\frac{\ln 2}{\Delta t}\tau}\right)^2 R\,d\tau=I_o^2 R\int_0^\infty e^{-\frac{2\cdot\ln 2}{\Delta t}\tau}d\tau=I_o^2 R\left[e^{-\frac{2\cdot\ln 2}{\Delta t}\tau}\cdot\frac{\Delta t}{-2\cdot\ln 2}\right]_0^\infty\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q=I_o^2 R\left[e^{-\frac{2\cdot\ln 2}{\Delta t}\infty}\cdot\frac{\Delta t}{-2\cdot\ln 2}-e^{-\frac{2\cdot\ln 2}{\Delta t}\cdot 0}\cdot\frac{\Delta t}{-2\cdot\ln 2}\right]=\frac{I_o^2 R\,\Delta t}{2\cdot\ln 2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\qquad Q=\frac{\left(\frac{q\,\ln 2}{\Delta t}\right)^2 R\,\Delta t}{2\cdot\ln 2}=\frac{\ln 2}{2}\frac{q^2 R}{\Delta t}$$

81-. En lo alto de una esfera de radio R existe una masa m que posee una cierta carga q. En el punto más bajo de la esfera, esto es, a una distancia 2R de m, existe una carga fija Q. La fuerza de atracción entre las dos cargas es en módulo la cuarta parte del peso de m. La masa m comienza a moverse, sin velocidad inicial y sin rozamiento, a lo largo de la esfera y se separa de ella formado un cierto ángulo entre el radio vector de m en el momento de separarse de la esfera y la dirección vertical. Determinar el valor del ángulo θ.

La fuerza de atracción entre las cargas cuando m se halla en lo más alto de la esfera es:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Qq}{(2R)^2}=\frac{1}{4}mg \Rightarrow \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_o}=R^2mg$$

En la figura 1 se ha colocado la masa m en una cierta posición: En esa posición se representan las fuerzas que actúan sobre la masa m: El peso mg, la fuerza eléctrica F_E y la fuerza de reacción N con que la esfera empuja a la masa.

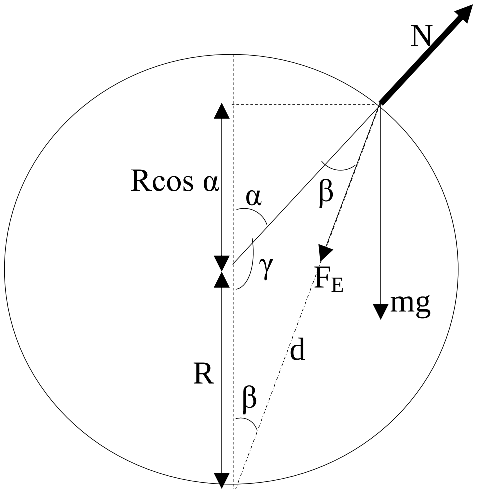


Fig.1

Desde la posición inicial de m hasta el lugar indicado en la figura 1, hacemos un balance de energías: En la parte más alta, la masa m tiene energía potencial eléctrica y energía potencial gravitatoria (respecto de la posición más baja de la esfera) y en la posición indicada en la figura 1,a las anteriores energías hay que añadir la cinética. Como ambos campos, gravitatorio y eléctrico son conservativos, se conserva la energía de la masa ya que no hay disipación, en consecuencia ésta vale igual en la posición inicial que en la genérica.

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Qq}{2R}+mg\,2R=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Qq}{d}+mgR(1+\cos\alpha)+\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow$$

$$-\frac{R^2mg}{2R}+mg\,2R=-\frac{R^2mg}{d}+mgR(1+\cos\alpha)+\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{3gR}{2}=-\frac{R^2g}{d}+gR(1+\cos\alpha)+\frac{1}{2}v^2\quad\Rightarrow\quad v^2=3\,gR+\frac{2\,R^2g}{d}-2gR(1+\cos\alpha)\quad(1)$$

La masa m tiene, en la posición de la figura 1, una velocidad v y se mueve sobre la esfera, por tanto, para que dicha masa siga pegada a la esfera debe haber alguna/s fuerza/s que proporcione/n la fuerza centrípeta. Esta fuerza es proporcionada por la resultante de las componentes sobre la dirección del radio R: del peso, de la fuerza eléctrica y de la reacción.

$$mg\cos\alpha+F_E\cos\beta-N=\frac{mv^2}{R}\Rightarrow mg\cos\alpha+\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Qq}{d^2}\cos\beta-N=\frac{mv^2}{R}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg\cos\alpha+\frac{R^2mg}{d^2}\cos\beta-N=\frac{mv^2}{R}\Rightarrow gR\cos\alpha+\frac{R^3g\cos\beta}{d^2}-NR=v^2\quad(2)$$

De la figura 1 se deduce:

$$\alpha+\gamma=180^o;\ \gamma+2\beta=180^o\quad\Rightarrow\quad\alpha=2\beta$$

$$d=\sqrt{[R+R\cos\alpha]^2+(R\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2}=\sqrt{R^2+R^2\cos^2\alpha+2R^2\cos\alpha+R^2\mathrm{sen}^2\alpha}=R\sqrt{2(1+\cos\alpha)}$$

Cuando la masa m se separa de la esfera, no hay reacción y la fuerza N=0. De igualar (1) y (2) deducimos:

$$3gR+\frac{2R^2g}{R\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}-2gR(1+\cos\alpha)=gR\cos\alpha+\frac{R^3 g\cos\frac{\alpha}{2}}{R^2\,2(1+\cos\alpha)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3gR+\frac{2Rg}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}-2gR(1+\cos\alpha)=gR\cos\alpha+Rg\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2(1+\cos\alpha)}\Rightarrow$$

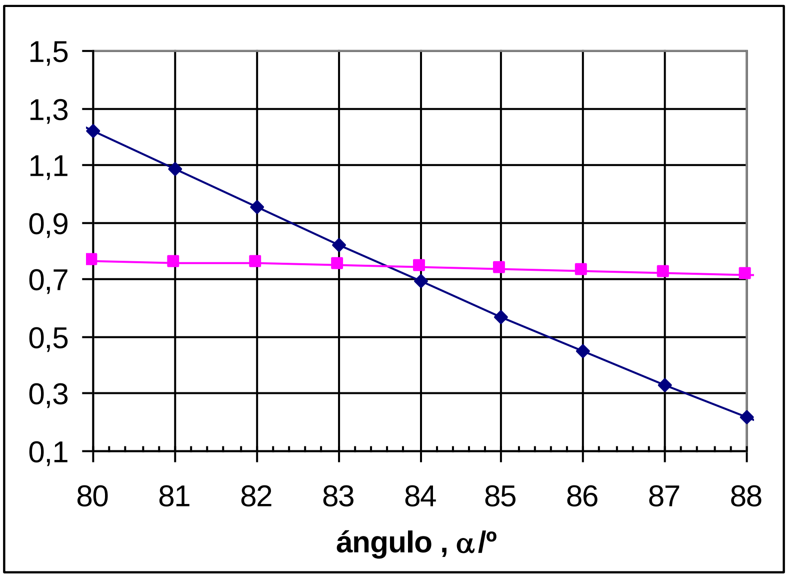
$$\Rightarrow 3+\frac{2}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}-2(1+\cos\alpha)=\cos\alpha+\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2(1+\cos\alpha)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\frac{2}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}-3\cos\alpha=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2(1+\cos\alpha)}\Rightarrow$$

$$2(1+\cos\alpha)\frac{4(1+\cos\alpha)}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}-6\cos\alpha(1+\cos\alpha)=\cos\frac{\alpha}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{8(1+\cos\alpha)^2}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}-6\cos\alpha(1+\cos\alpha)=\cos\frac{\alpha}{2}\qquad (3)$$

Para resolver la ecuación anterior operamos por tanteo, damos valores al ángulo α y hallamos los correspondientes valores del primero y del segundo miembro de la ecuación (3), aquel ángulo para el cual el primer miembro y el segundo sean iguales, es la solución.
Además, hacemos las representaciones gráficas y observamos que la solución ocurre cuando las dos gráficas se cortan.



De la gráfica se deduce que α =83,6º.

82-Una esfera de radio R posee una carga volumétrica ρ, distribuida uniformemente. Considerar sobre la esfera un círculo cuyo centro dista del centro de la esfera $r_o<R$. Calcular el flujo eléctrico que atraviesa el citado círculo.

En la fig.1 se ha representado la esfera de radio R y el círculo de radio d. Sobre ese círculo se considera una corona circular a una distancia x del centro del circulo de espesor dx. Para los cálculos posteriores x es variable y sus valores extremos son: cero y d.

De la fig. 1 se deducen las siguientes relaciones:

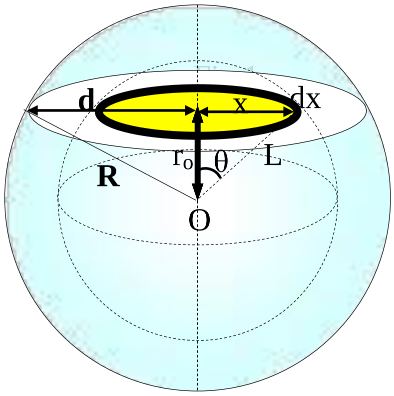


Fig.1

$$d=\sqrt{R^2-r_o^2}\quad ;\ L=\sqrt{r_o^2+x^2}$$

Con centro en O trazamos una esfera de radio L, de puntos en la fig-1.

La carga eléctrica que existe dentro de la esfera de radio L es: $q=\rho\cdot V=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi L^3$

El campo eléctrico que existe en la superficie de esa esfera, lo calculamos mediante el teorema de Gauss, considerando solamente la carga que tiene dentro dicha esfera.

$$\int\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_o}\ \Rightarrow\ E\cdot 4\pi\ L^2=\frac{\frac{4}{3}\pi L^3\rho}{\varepsilon_o}\ \Rightarrow\ E=\frac{\rho L}{3\varepsilon_o}=\frac{\rho\sqrt{r_o^2+x^2}}{3\varepsilon_o}$$

El valor hallado de E, representa solamente el módulo del vector campo. El campo como magnitud vectorial $\vec{E}$ se ha representado en la fig.2, en dos lugares opuestos de la corona circular y en un lado $\vec{E}$ se ha descompuestos en dos componentes. Evidentemente, al otro lado sucede exactamente igual.

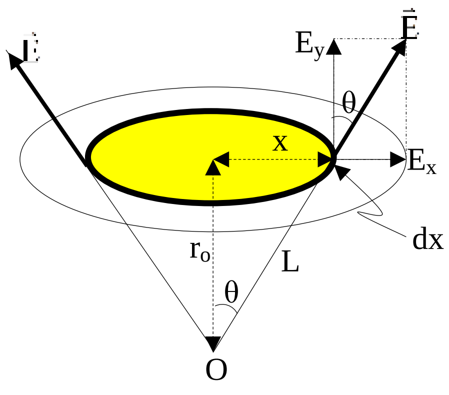


Fig.2

Se observa en la fig.2 que las componentes horizontales se anularán dos a dos, y se suman las componentes verticales. Sobre la corona circular de radio x, y espesor dx, el vector campo eléctrico es perpendicular a la misma y el flujo elemental.

$$d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cos\theta\cdot 2\pi x\,dx = \frac{\rho\sqrt{r_o^2 + x^2}}{3\varepsilon_o}\frac{r_0}{L}2\pi x\,dx = \frac{\rho\sqrt{r_o^2 + x^2}}{3\varepsilon_o}\frac{r_0}{\sqrt{r_o^2 + x^2}}2\pi x\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad d\Phi = \frac{\rho\, r_o}{3\varepsilon_o}2\pi x\,dx$$

Para calcular el flujo que atraviesa el círculo de radio d, debemos sumar todas las contribuciones de las coronas circulares comprendidas entre cero y d.

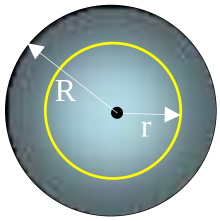
$$\Phi = \int_0^{\sqrt{R^2 - r_0^2}} \frac{\rho\, r_o}{3\varepsilon_o}2\pi x\,dx = \frac{\rho\, r_o}{3\varepsilon_o}\cdot\frac{2\pi x^2}{2}\Bigg|_o^{\sqrt{R^2 - r_0^2}} = \frac{\rho\, r_o\,\pi}{3\varepsilon_o}\left(R^2 - r_o^2\right)$$

83-.Una esfera de radio R no conductora tiene una carga Q distribuída de forma uniforme por todo el volumen. El módulo del campo radial dentro de la esfera está dado por la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{r}{R^3}\right)}$$

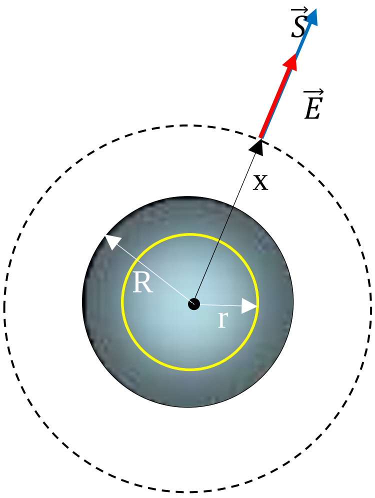
En la ecuación r es la distancia del centro de la esfera al punto considerado. Calcular el potencial eléctrico de la esfera en función de r.

Partimos de la relación entre el campo y el potencial $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$. Al tratarse de cargas distribuidas uniformemente y por la simetría de la esfera, tanto el potencial como el campo, varían en módulo con la distancia *r* al centro, de modo que la anterior ecuación se puede expresar en módulo.



$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int dV = -\int E\,dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^3}\int r\,dr \Rightarrow V = -\frac{Q r^2}{8\pi\varepsilon_o R^3} + Cte \quad (1)$$

Para hallar la constante de integración tendremos en cuenta que en la superficie de la esfera, el potencial está definido por la ecuación anterior o por la que se obtenga para puntos exteriores con distancias $x \geq R$. considerando que se toma el punto de referencia a potencial 0, en el infinito.



Supongamos una esfera imaginaria (superficie gaussiana) de radio x>R y concéntrica con la esfera cargada. Por la simetría del problema si aplicamos el teorema de Gauss, además de proporcionarnos el valor del flujo, nos permite hallar el módulo del campo eléctrico, que es el objetivo del apartado. Además, como el campo en módulo, vale igual en todos los puntos de la superficie gaussiana resulta.

$\emptyset = \vec{E} \cdot \vec{S} = E \cdot S \cdot cos\ 0 = E \cdot S = Q/\varepsilon_o$ Donde Q es la carga total en el interior de la superficie gaussiana y S el área de la esfera de radio x.

$$E \cdot 4\pi x^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{x^2} = -\frac{dV}{dx} \quad \Rightarrow \quad -V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\int\frac{dx}{x^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(-\frac{1}{x}\right) + Cte´$$

Para hallar la constante Cte´, hacemos $x = \infty$ y allí el potencial es nulo, por lo que Cte´ = 0 .

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{x} \quad (2)$$

La ecuación (1) da el valor del potencial cuando r≤R y la ecuación (2) proporciona el potencial cuando x≥R; pero ambas deberán dar el mismo valor cuando x = R, porque el valor del potencial de una distribución de cargas en unívoco, en consecuencia:

$$-\frac{QR^2}{8\pi\varepsilon_o R^3}+\mathrm{Cte}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Cte}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}+\frac{Q}{8\pi\varepsilon_o R}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}\left(1+\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Cte}=\frac{3Q}{8\pi\varepsilon_o R}$$

Sustituyendo Cte en (1)

$$V=-\frac{Qr^2}{8\pi\varepsilon_o R^3}+\frac{3Q}{8\pi\varepsilon_o R}=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_o}\left(\frac{3}{R}-\frac{r^2}{R^3}\right)$$

Nótese que si hacemos $r = R$ resulta un valor para el potencial en la superficie de la esfera, como si toda su carga Q distribuida en el volumen, se encontrara como puntual en su centro.

$$V=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_o}\left(\frac{3}{R}-\frac{r^2}{R^3}\right)=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_o}\left(\frac{3}{R}-\frac{R^2}{R^3}\right)=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_o}\left(\frac{3-1}{R}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}$$

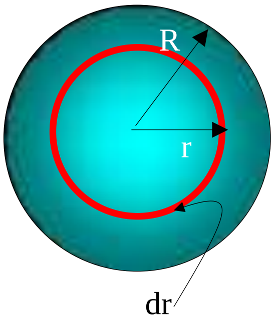
Por otra parte en el centro de la esfera es $r = 0$ pero el potencial vale:

$$V=\frac{3Q}{8\pi\varepsilon_o R}$$

Que es su valor máximo. Recuérdese que el potencial era nulo en el infinito.

84.-Una esfera de radio R posee una densidad volumétrica de carga dada por la ecuación $\rho = k\sqrt{r}$, siendo r la distancia del centro de la esfera a cualquier punto de ella y k una constante positiva. Calcular el campo eléctrico creado por la esfera dentro y fuera de ella.

Consideramos una capa esférica de radio r<R y de espesor dr. El volumen de esta capa esférica es: $dV = 4\pi r^2 dr$ y su carga eléctrica elemental:

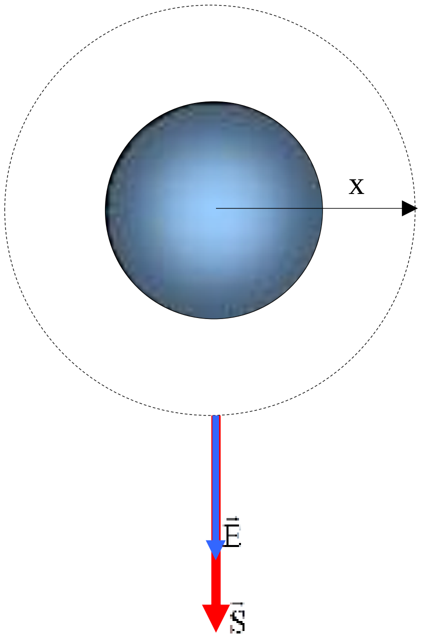


$$dq = \rho \cdot dV = 4\pi r^2 k\sqrt{r}dr = 4\pi k r^{\frac{5}{2}} dr$$

La carga total de la esfera es la suma de los distintos elementos dq desde $r = 0$ a $r = R$

$$Q = \int_0^R 4\pi k r^{\frac{5}{2}} dr = \left. \frac{4\pi k \cdot r^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} \right|_o^R = \frac{8\pi k R^{\frac{7}{2}}}{7} \quad (1)$$

Para calcular el campo en puntos exteriores a la esfera y debido a que la distribución de carga es esférica, el campo tiene mucha simetría y en este caso la aplicación del teorema de Gauss, permite determinar además del flujo, el valor del campo eléctrico. Consideremos una superficie gaussiana esférica, con el mismo centro que la esfera cargada y radio $x \geq R$. Ahora, toda la carga del interior de la superficie gaussiana es la carga total de la esfera Q. Como en todos los puntos de esta superficie el campo vale igual en módulo E, por encontrarse a la misma distancia x del centro de la esfera, podemos aplicar la forma finita del teorema de Gauss.



$$\vec{E} \cdot \vec{S} = \frac{Q_{interior}}{\varepsilon_o}$$

Donde $\vec{E}$ es el campo en un punto de la superficie que por estar cargada positivamente tiene dirección radial y con sentido saliente. $\vec{S}$ es un vector superficie, perpendicular a la misma y saliente, por definición del vector superficie..

$$E \cdot 4\pi x^2 \cdot \cos 0 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{8\pi k R^{\frac{7}{2}}}{7 \cdot 4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2kR^{\frac{7}{2}}}{7\varepsilon_o} \cdot \frac{1}{x^2} \quad ; \quad x \geq R$$

Para calcular el campo en puntos interiores a la esfera, consideramos una esfera gaussiana de radio $x \leq R$, la carga que existe en esa esfera vale, según la aplicación de la ecuación (1)

$$Q' = \frac{8\pi k x^{\frac{7}{2}}}{7}$$

Aplicamos el teorema de Gauss al flujo eléctrico que sale por la esfera gaussiana de radio x. El dibujo sería similar al anterior pero ahora la esfera gaussiana de radio $x \le R$ se encuentra situada dentro de la esfera cargada de radio R.

De nuevo debido a la simetría esférica del problema, el campo valdrá igual en módulo en todos los puntos de la esfera de radio x, resultando aplicable la forma finita del teorema de Gauss.

$$E \cdot 4\pi x^2 = \frac{Q'}{\varepsilon_o} = \frac{8\pi k x^{\frac{7}{2}}}{7\,\varepsilon_o} \;\Rightarrow\; E = \frac{8\pi k x^{\frac{7}{2}}}{7 \cdot 4\pi \varepsilon_o x^2} = \frac{2 k x^{\frac{3}{2}}}{7\,\varepsilon_o} \quad ; \; x \le R$$

Nótese que las dos soluciones para el campo fuera y dentro, dan igual valor al sustituir x por el valor en la superficie de la esfera, x = R.

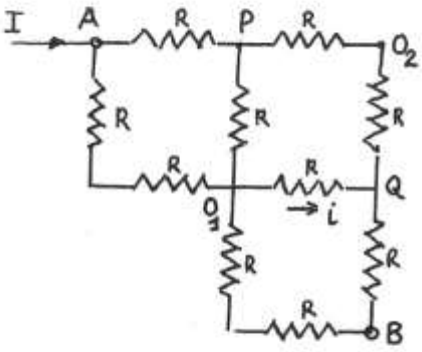
Para el campo fuera:

$$E = \frac{8\pi k R^{\frac{7}{2}}}{7 \cdot 4\pi \varepsilon_o} \cdot \frac{1}{x^2} \quad ; \quad \text{para} \quad x = R; \qquad E = \frac{2 k R^{\frac{7}{2}}}{7\varepsilon_o} \cdot \frac{1}{R^2} = \frac{2k}{7\varepsilon_o} \cdot R^{\frac{7}{2}} \cdot R^{-2} = \frac{2k}{7\varepsilon_o} R^{\frac{3}{2}}$$

Para el campo dentro:

$$E = \frac{8\pi k x^{\frac{7}{2}}}{7 \cdot 4\pi \varepsilon_o x^2}; \quad \text{para} \quad x = R; \qquad E = \frac{2 k R^{\frac{3}{2}}}{7\,\varepsilon_o} \quad ;$$

85.- Por el nudo A del dispositivo eléctrico de la figura inferior penetra una intensidad de corriente designada con I. Entre O_1 y Q circula una intensidad i. a) Determinar la resistencia equivalente del circuito, b) la relación entre I e i y c) la potencia consumida en el circuito.



a) Si trazamos una línea imaginaria entre O_1 y O_2 el dispositivo de resistencias es simétrico respecto de dicha línea y en consecuencia O_1 y O_2 se encuentran al mismo potencial. Ahora nos situamos en A y vamos por el circuito hacia O_1 y O_2 que son comunes, por lo que el circuito queda dibujado según la figura 1.

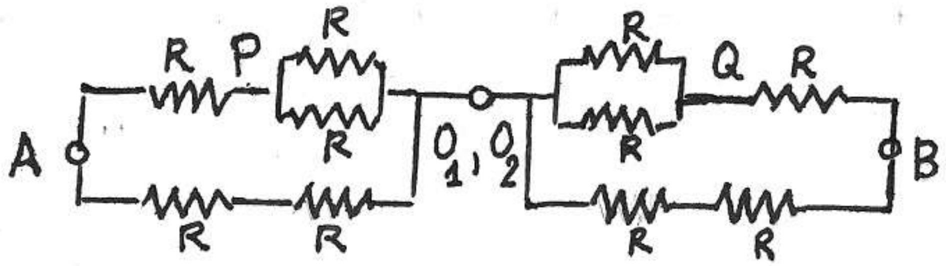


Fig.1

Del circuitote la figura 1 es inmediato pasar al de la figura 2.

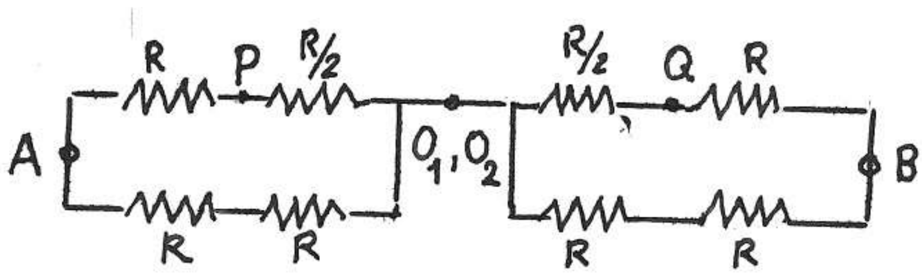


Fig.2

Entre A y O_1 la resistencia por el ramal superior es: $R+\frac{R}{2}=\frac{3R}{2}$ y por el inferior 2 R, como ambas resistencias están en paralelo la equivalente es:

$$\frac{1}{R_E}=\frac{2}{3R}+\frac{1}{2R}=\frac{7}{6R}\quad\Rightarrow\quad R_E=\frac{6R}{7}$$

La resistencia de O_2 a B es la misma y ambas se encuentran en serie por lo que la resistencia equivalente a todo el circuito es:

$$R_T=\frac{6R}{7}+\frac{6R}{7}=\frac{12R}{7}$$

b) Observando la figura 2 es inmediato que la corriente I al llegar al nudo A se bifurca en i_1 (por la rama superior) e i_2 (por la rama inferior) y se cumple:

$$I=i_1+i_2$$

La corriente i_1 al llegar a P se bifurca en $i_1/2$ por cada rama.

El conjunto O_2B es simétrico respecto del AO_1 y por ello en cada resistencia comprendida entre O_2 y Q, circula una intensidad $i_1/2$. Entre Q y B circula i_1 y entre O_2 y B circula. i_2.
Volviendo a la figura del enunciado entre O_1 y Q la intensidad se denomina i, por lo que.

$$i=\frac{i_1}{2}$$

La caída de tensión entre A y O_1 por la rama superior es igual a la inferior

$$i_2\,2R=i_1R+i_1\frac{R}{2}=i_1\frac{3R}{2}\quad\Rightarrow\qquad i_2=\frac{3}{4}i_1=\frac{3}{4}\cdot 2i=\frac{3}{2}i\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad I=i_1+i_2=2i+\frac{3}{2}i=\frac{7i}{2}$$

c) La potencia vale

$$P=I^2R_T=\left(\frac{7i}{2}\right)^2\cdot\frac{12R}{7}=21\,i^2R$$

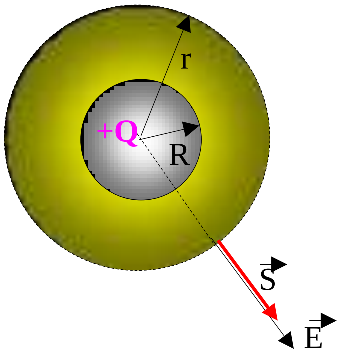
La podemos calcular también, sumando las potencias consumidas en cada resistencia.

$$P=2\left[(i_1)^2R+\left(\frac{i_1}{2}\right)^2\cdot R+\left(\frac{i_1}{2}\right)^2\cdot R+(i_2)^2R+(i_2)^2R\right]=2\left[4i^2R+i^2R+i^2R+\frac{9}{4}i^2R+\frac{9}{4}i^2R\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\qquad P=2\left[6i^2R+\frac{9}{2}i^2R\right]=21\,i^2R$$

86.-(346) Una esfera de radio R tiene una densidad de carga uniforme. Determinar la relación entre los potenciales electrostáticos en su superficie y en su centro.

Designamos con Q a la carga total de la esfera. Como la densidad cúbica de carga es uniforme, ésta valdrá $\rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi r^3}$



Por tratarse de una distribución esférica uniforme el problema tiene simetría esférica y entonces en todos los puntos del espacio situados a la misma distancia del centro, el campo eléctrico tiene el mismo valor en módulo, siendo su dirección radial en cada punto y su sentido saliente por tratarse de una distribución de carga positiva.
En casos con mucha simetría, el teorema de Gauss además de permitir calcular el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada ideal, (superficie gaussiana) y también el módulo del vector campo eléctrico.
Aplicamos el teorema de Gauss a esa superficie, en forma finita: $\vec{E}\cdot\vec{S} = \dfrac{q_{\text{int erior}}}{\varepsilon_o}$
Consideramos que el medio que rodea las cargas es el vacío.

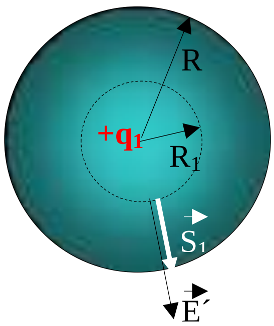
$$E\cdot 4\pi r^2\cdot\cos 0 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr} = \frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_o} \Rightarrow \int -dV = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\int\frac{dr}{r^2} \Rightarrow \quad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r} + Cte$$

Cuando $r = \infty$, el potencial se considera nulo, de aquí se deduce que Cte=0 y por consiguiente:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r}$$

Cuando r = R obtenemos el potencial en la superficie:

$$V_S = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R} \qquad (1)$$



Consideremos ahora una nueva superficie esférica de radio R_1, concéntrica con la esfera cargada siendo $R_1<R$ (en la figura se ha aumentado el tamaño de la esfera cargada). La carga encerrada q_1 en el interior de esta superficie gaussiana es:

$$q_1 = \rho\cdot\text{Volumen}_1 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi R_1^3 = Q\left(\frac{R_1}{R}\right)^3$$

Aplicamos el teorema de Gauss para esta superficie: $E'\cdot S_1\cdot\cos 0 = q_1/\varepsilon_o$

$$E' = \frac{Q\left(\frac{R_1}{R}\right)^3}{4\pi\varepsilon_o R_1^2} = \frac{Q R_1}{4\pi\varepsilon_o R^3} = -\frac{dV'}{dR_1} \Rightarrow \; -V' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^3}\int R_1\, dR_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{R_1^2}{2} + Cte'$$

Para determinar Cte´ tenemos en cuenta que cuando $R_1=R$ estamos en la superficie de la esfera cargada y el potencial lo hemos hallado en (1)

$$-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot\frac{R^2}{2} + Cte' \quad \Rightarrow \quad Cte' = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}\left(1+\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -V' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^3}\frac{R_1^2}{2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}\frac{3}{2} \qquad (2)$$

Aplicamos la ecuación (2) al centro de la esfera, en donde $R_1=0$

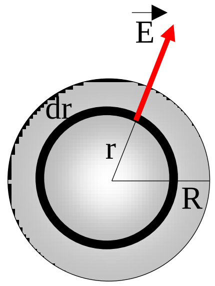
$$V_C = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o R}\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_S}{V_C} = \frac{\frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o R}}{\frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o R}\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

87.-**(351)* **La densidad eléctrica de carga de una esfera de radio R está dada por la ecuación

$$\rho = \rho_o \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n\right] \quad r \le R$$

r es la distancia del centro de la esfera a cualquier punto interior de la misma (incluido R).
a) Determinar el módulo del campo eléctrico para $r \le R$. Hallar el modulo del campo en la superficie de la esfera, si n=1 y n=2. b) Calcular la distancia r para la cual el módulo del campo es máximo. Hallar la posición de ese máximo para n=1 y n=2. c) Determinar el campo y el potencial para puntos en los cuales $r \ge R$

a) Consideramos una capa esférica de espesor dr. concéntrica con la de radio R, siendo su radio $r \le R$
El volumen de la mencionada capa es: $dV = 4\pi r^2\,dr$
y su carga $dq = \rho \cdot dV = 4\pi r^2 \rho_o \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n\right] dr$. La carga comprendida en una esfera concéntrica a R y cuyo radio sea r, la obtenemos por integración de la ecuación anterior desde el centro hasta la distancia r del mismo.



$$q = 4\pi\rho_o \int_0^r \left(r^2 - \frac{r^{n+2}}{R^n}\right) dr = 4\pi\rho_o \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^{n+3}}{(n+3)R^n}\right] \quad (1)$$

El vector campo tiene la dirección radial y sentido hacia fuera en todos y cada uno de los puntos de la esfera de radio r, por razones de simetría y estar cargada positivamente. Aplicamos el teorema de Gauss, a una esfera gaussiana de radio r que contiene la carga q en su interior. El vector superficie es por definición perpendicular a la superficie y con sentido hacia afuera, de modo que en este caso tendrá la misma dirección y sentido del vector campo eléctrico E.

$$E \cdot 4\pi r^2 \cdot \cos 0 = \frac{q_{int\,erior}}{\varepsilon_o} = \frac{4\pi\rho_o \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^{n+3}}{(n+3)R^n}\right]}{\varepsilon_o} \Rightarrow \quad E = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o}\left[\frac{r}{3} - \frac{r^{n+1}}{(n+3)R^n}\right]$$

$$E_{n=1}(S) = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o}\left[\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R}\right] \Rightarrow \text{en } r = R \Rightarrow \quad E_S = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o}\left(\frac{R}{3} - \frac{R}{4}\right) = \frac{\rho_o R}{12\varepsilon_o}$$

$$E_{n=2}(S) = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o}\left[\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5R^2}\right] \Rightarrow \text{en } r = R \Rightarrow \quad E_S = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o}\left(\frac{R}{3} - \frac{R^3}{5R^2}\right) = \frac{2\rho_o R}{15\varepsilon_o}$$

b) Para hallar el máximo derivamos la función E(r) respecto de r e igualamos a cero.

$$\frac{dE}{dr}=\frac{\rho_o}{\varepsilon_o}\left[\frac{1}{3}-\frac{(n+1)r^n}{(n+3)R^n}\right]=0\Rightarrow\ (n+3)R^n=3(n+1)r^n\Rightarrow\quad r^n=\frac{n+3}{3(n+1)}R^n$$

$$r(n=1)=\frac{4R}{6}=\frac{2R}{3}\quad;\quad r(n=2)=\sqrt{\frac{5}{9}R^2}=\frac{\sqrt{5}\ R}{3}$$

c) Calculamos la carga total de a esfera a partir de la ecuación (1), cambiando el límite superior de la integral, desde 0 hasta R.

$$Q=4\pi\rho_o\left[\frac{R^3}{3}-\frac{R^{n+3}}{(n+3)R^n}\right]=4\pi\rho_o R^3\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{(n+3)}\right]=4\pi\rho_o R^3\frac{n}{3(n+3)}$$

Consideramos una esfera gaussiana de radio r>R concéntrica con la de radio R y aplicamos el teorema de Gauss. De nuevo los vectores campo y superficie son paralelos y del mismo sentido, por razones similares a las anteriores.

$$E_E\cdot 4\pi r^2=\frac{4\pi\rho_o R^3}{\varepsilon_o}\frac{n}{3(n+3)}\quad\Rightarrow\quad E_E=\frac{n}{3(n+3)}\frac{\rho_o R^3}{\varepsilon_o r^2}$$

La relación entre el campo y el potencial, puesto que el campo es el gradiente del potencial cambiado de signo y en este caso solo varían ambos en dirección radial es:

$$E=-\frac{dV}{dr}\quad\Rightarrow\quad V=-\int_\infty^r\frac{n}{3(n+3)}\frac{\rho_o R^3}{\varepsilon_o r^2}dr=\frac{3}{3(n+3)}\left[\frac{\rho_o R^3}{\varepsilon_o r}-\frac{\rho_o R^3}{\varepsilon_o\cdot\infty}\right]$$

$$V=\frac{n}{3(n+3)}\frac{\rho_o R^3}{\varepsilon_o r}$$

Otra opción:

$$E_E=-\frac{dV}{dr}\quad\Rightarrow\quad -V=\int\frac{n}{3(n+3)}\frac{\rho_o R^3}{\varepsilon_o r^2}dr=-\frac{n}{3(n+3)}\frac{\rho_o R^3}{\varepsilon_o r}+Cte$$

Cuando $r=\infty,\ V=0\Rightarrow Cte=0$, luego

$$V=\frac{n}{3(n+3)}\frac{\rho_o R^3}{\varepsilon_o r}$$

88.- *(356)* ***Calcular la energía potencial eléctrica de los protones de un núcleo Z, suponiendo que la carga se distribuye de forma esférica y uniforme.***

La energía potencial eléctrica del núcleo está determinada por el trabajo que supone traer los protones desde el infinito hasta formar ese núcleo cuya carga eléctrica positiva es Ze, siendo e el valor absoluto de la carga del electrón.

Para hacer el cálculo supongamos que ya tenemos formado una agrupación de protones de carga q que determinan una esfera de radio r. Ahora traemos desde el infinito, donde el potencial es cero, una carga dq la cual conduce a que el radio r aumente hasta r+dr. El trabajo realizado para el proceso anterior es: el producto de la carga transportada dq por la diferencia entre el potencial de partida $V_{infinito}$ =0 y el de llegada $V_{LL} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r}$.

Según el enunciado del problema podemos designar con ρ a la densidad de carga de la esfera, por tanto, la carga q es:

$$q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad \Rightarrow \quad dq = 4\pi r^2 \rho\, dr$$

El trabajo dW empleado en llevar la carga dq desde el infinito a la esfera de radio r es:

$$dW = dq\left(V_\infty - V_{llegada}\right) = 4\pi r^2 \rho\, dr\left(0 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r}\right) = -4\pi r^2 \rho\, dr \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dW = -\frac{4}{3\varepsilon_o}\pi r^4 \rho^2\, dr$$

Para calcular el trabajo debemos integrar la ecuación anterior desde cero hasta R.

$$W = -\frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_o}\int_0^R r^4 dr = -\frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\,\varepsilon_o} \quad (1)$$

Para la densidad uniforme cuando se ha formado la esfera de radio R, podemos escribir:

$$\rho = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Sustituyendo el valor de la densidad en (1)

$$W = -\frac{4\pi \frac{9 Z^2 e^2 R^5}{16\pi^2 R^6}}{15\varepsilon_o} = -\frac{3}{20}\frac{Z^2 e^2}{\pi\varepsilon_o R} = -\Delta E_P \quad \Rightarrow \quad E_P = \frac{3}{20}\frac{Z^2 e^2}{\pi\varepsilon_o R}$$

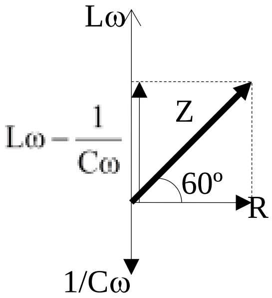
89.-(358).- Un circuito de corriente alterna en serie RLC, con una tensión máxima aplicada de 130 V, posee una impedancia de 1,3 kΩ cuando la frecuencia es 10 kHz estando la intensidad de la corriente retrasada 60º respecto del voltaje. La frecuencia de resonancia del circuito es 5 kHz.

a) Calcular los valores de R, L y C

b) Determinar la intensidad máxima de la corriente que recorre el circuito y los valores máximos de la tensión en cada elemento.

c) Calcular la potencia media consumida en el circuito

a) Como la intensidad está retrasada respecto al voltaje 60º, esto nos indica que Lω en valor absoluto es mayor que 1/Cω en valor absoluto. El diagrama vectorial es el siguiente:



Del diagrama vectorial se deduce:

$$Z^2 = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \quad ; \quad \text{tag}\,60º = \sqrt{3} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \quad (1) \quad \Rightarrow \quad L\omega - \frac{1}{C\omega} = \sqrt{3}\,R \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; Z^2 = R^2 + 3R^2 \quad \Rightarrow \; R = \frac{Z}{2} = \frac{1300}{2} = 650\Omega$$

De la condición de resonancia de deduce que:

$$L\omega_R = \frac{1}{C\omega_R} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{L\omega_R^2}$$

Sustituyendo en la ecuación (1)

$$650\sqrt{3} = L\omega - \frac{1}{\frac{1}{L\omega_R^2}\omega} = L\omega - \frac{L\omega_R^2}{\omega} \Rightarrow L = \frac{650\sqrt{3}}{\omega - \frac{\omega_R^2}{\omega}} = \frac{650\sqrt{3}}{2\pi 10.10^3 - \frac{2\pi 25.10^6}{10.10^3}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \frac{650\sqrt{3}}{2\pi 10^4 - 50\pi 10^2} = 2{,}39.10^{-2}\,\text{H} \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2{,}39.10^{-2}\cdot\left(2\pi\cdot 5.10^3\right)^2} = 4{,}24.10^{-8}\,\text{F}$$

b) $I_m = \dfrac{V_m}{Z} = \dfrac{130}{1{,}3.10^3} = 0{,}1A$

$$V_m(R) = I_m R = 0{,}1\cdot 650 = 65V;$$

$$V_m(L) = I_m Z_L = I_m L\, 2\pi f = 0{,}1\cdot 2{,}39.10^{-2}\cdot 2\cdot\pi\cdot 10.10^3 = 150V$$

$$V_m(C) = I_m Z_C = I_m \frac{1}{C\,2\pi f} = 0{,}1\cdot \frac{1}{4{,}24.10^{-8}\cdot 2\cdot\pi\cdot 10.10_4} = 37{,}5V$$

c) $< P >= \dfrac{1}{2} I_m V_m \cos 60º = \dfrac{1}{2}\cdot 0{,}1\cdot 130\cdot 0{,}5 = 3{,}25\ W$

Calculamos la potencia disipada en la resistencia

$$< P >= \frac{1}{2} I_m V_m(R) = \frac{1}{2}\cdot 0{,}1\cdot\cdot 65 = 3{,}25\ W$$

La potencia disipada en el circuito se verifica en la resistencia y el valor medio de la potencia en la bobina y el condensador es nulo.