

**PROBLEMAS DE**

**LAS OLIMPIADAS**

**INTERNACIONALES**

**DE FÍSICA**

**José Luis Hernández Pérez**

**Agustín Lozano Pradillo**

Madrid 2008

## 20ª OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. POLONIA. 1989

1.-Dos líquidos A y B son inmiscibles. Las presiones de sus vapores están dadas por las ecuaciones

$$\ln \frac{p_A}{p_0} = \frac{a_A}{T} + b_A \quad ; \quad \ln \frac{p_B}{p_0} = \frac{a_B}{T} + b_B$$

en las que  $p_0$  representa la presión atmosférica normal,  $T$  la temperatura en kelvin de los vapores y  $a_A$ ,  $a_B$ ,  $b_A$  y  $b_B$  son constantes que dependen del líquido.

Para ambos líquidos se encuentran los siguientes valores:

$t/^{\circ}\text{C}$	$p_A/p_0$	$p_B/p_0$
40	0,284	0,07278
90	1,476	0,6918

los valores de la tabla anterior no tienen error.

a) Calcular la temperatura de ebullición de los líquidos a la presión  $p_0$ .

b) Los líquidos A y B se vertieron en un vaso tal como muestra la figura 1

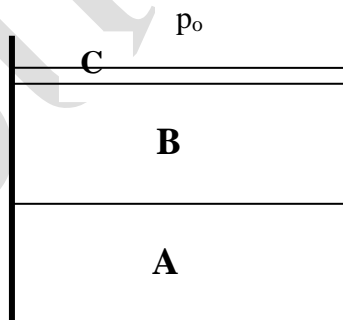


Fig.1

La superficie del líquido B está cubierta con una delgada capa de un líquido C no volátil insoluble en ambos líquidos. Actúa previniendo la libre evaporación del líquido B.

La razón de las masas moleculares de los vapores de los líquidos es:

$$\frac{M_A}{M_B} = 8$$

Las masas de líquidos A y B vertidos en el vaso son 100 g de cada uno. La altura de los líquidos en el vaso y las densidades son tales que puede considerarse que la presión en cualquier punto del vaso es  $p_0$ .

Los líquidos del vaso son calentados de forma lenta, constante y uniforme

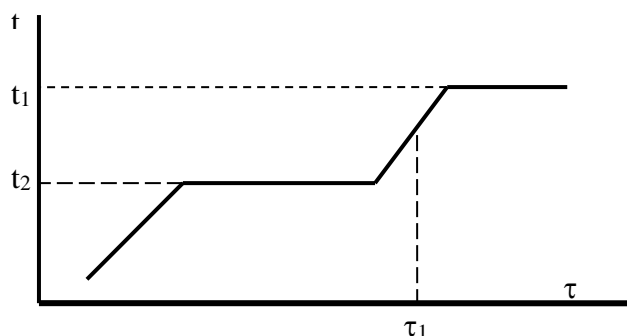


Fig.2

La temperatura de los líquidos cambia con el tiempo  $t$  tal como se muestra esquemáticamente en la figura 2.

Calcular los valores de las temperaturas  $t_1$  y  $t_2$  y las masas de los líquidos al tiempo  $\tau_1$ . Las temperaturas se estimarán hasta el grado y las masas hasta la décima de gramo. Se supone que los vapores se comportan como gases ideales y que obedecen a la ley de Dalton que establece que la presión de una mezcla de gases es la suma de las presiones parciales de cada uno de ellos.

A partir de los datos de la tabla se pueden determinar las constantes que aparecen en las ecuaciones de las presiones de vapor

$$\ln 0,284 = \frac{\alpha_A}{313,15} + b_A \quad ; \quad \ln 1,476 = \frac{\alpha_A}{363,15} + b_A \quad \Rightarrow$$

$$0,38934 - (-1,2588) = \alpha_A \left( \frac{1}{363,15} - \frac{1}{313,15} \right) \quad \Rightarrow \quad \alpha_A = -3748,5 \text{ K}^{-1}$$

$$\ln 0,284 = -\frac{3748,5}{313,15} + b_A \quad \Rightarrow \quad b_A = 10,71$$

$$\ln 0,07278 = \frac{\alpha_B}{313,15} + b_B \quad ; \quad \ln 0,6918 = \frac{\alpha_B}{363,15} + b_B \quad \Rightarrow$$

$$-0,36846 + 2,6203 = \alpha_B \left( \frac{1}{313,15} - \frac{1}{363,15} \right) \quad \Rightarrow \quad \alpha_B = -5121,6 \text{ K}^{-1}$$

$$\ln 0,6918 = -\frac{5121,6}{363,15} + b_B \quad \Rightarrow \quad b_B = 13,73$$

Un líquido hierve cuando la presión exterior y la presión de vapor se igualan

$$\ln \frac{p_A}{p_0} = \ln 1 = 0 = \frac{-3748,5}{T_A} + 10,71 \quad \Rightarrow \quad T_A = 350\text{K} \quad \Rightarrow \quad t_A = 77 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\ln \frac{p_B}{p_0} = \ln 1 = 0 = \frac{-5121,6}{T_B} + 13,73 \Rightarrow T_B = 373\text{K} \Rightarrow t_B = 100\text{ }^\circ\text{C}$$

b) En los libros de Química-Física se trata la cuestión de las mezclas inmiscibles. Para ellas la presión de vapor es la suma de las presiones de vapor de los componentes puros. La presión de vapor es independiente de las cantidades de cada componente.

Por tanto cuando se calienta una mezcla inmiscible, ésta hervirá cuando su presión de vapor sea igual a la presión exterior, esto es, cuando

$$p_0 = p_A + p_B = p_0 e^{\frac{-3748,5}{T} + 10,71} + p_0 e^{\frac{-5121,6}{T} + 13,73} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = e^{\frac{-3748,5}{T} + 10,71} + e^{\frac{-5121,6}{T} + 13,73}$$

La ecuación anterior la podemos resolver por tanteo dando valores a T hasta encontrar el que sustituido en el segundo miembro valga 1. Dado que la presión de vapor de la mezcla es la suma de los componentes, la temperatura T es inferior a la del componente de menor presión de vapor, lo que indica que el tanteo lo debemos hacer a partir de valores inferiores a 350 K.

T = 320 K	1 > 0,4691
T = 330 K	1 > 0,6894
T = 340 K	1 > 0,9935
T = 341 K	1 < 1,0291

La temperatura T está comprendida entre 340 K y 341 K, como 0,9935 difiere de 1 en  $6,7 \cdot 10^{-3}$  que es menor que la diferencia entre 1 y 1,0291 que vale  $29,1 \cdot 10^{-3}$ , tomamos como valor más próximo al verdadero 340 K = 67°C.

El número de moléculas de cada componente en la fase vapor es directamente proporcional a su presión de vapor

$$\frac{n_A}{n_B} = \frac{p_A}{p_B} \Rightarrow \frac{n_A \cdot M_A}{n_B \cdot M_B} = \frac{m_A}{m_B} = \frac{p_A \cdot M_A}{p_B \cdot M_B} \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{\left( e^{\frac{-3748,5}{T} + 10,71} \right) \cdot 8}{e^{\frac{-5121,6}{T} + 13,73}}$$

Si en la expresión anterior se sustituye T por 340 K resulta:

$$\frac{m_A}{m_B} = 22,2$$

Cuando los 100 g del componente A se encuentren en la fase de vapor, la cantidad del componente B en esa fase es:

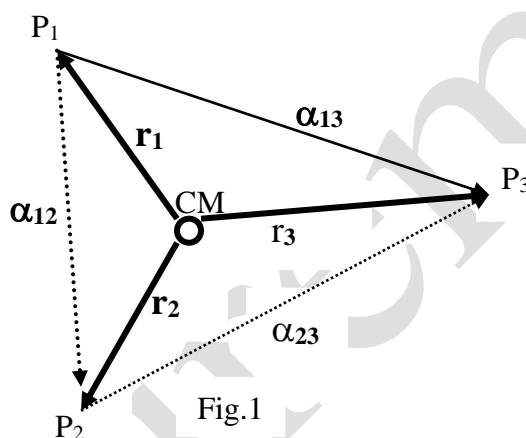
$$m_B = \frac{100}{22,2} = 4,5\text{ g}$$

Por tanto en la fase líquida quedan del componente:  $100 - 4,5 = 95,5\text{ g}$ . Al seguir calentando, el componente B de la fase líquida pasará a la fase vapor y a una temperatura que será la que iguale la presión de vapor de B a la presión exterior. Ese valor ya lo hemos calculado en el apartado a) y es 100°C.

2.-En tres puntos no alineados,  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  están situadas tres masas puntuales,  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$ . Las tres masas interactúan entre sí a través de sus atracciones gravitatorias. Las masas están aisladas y no sufren interacción con otros cuerpos. Sea  $E$  un eje de rotación que pasa por el centro de masas del sistema y es perpendicular al plano  $P_1P_2P_3$ . Determinar qué condición debe tener la velocidad angular  $\omega$  del sistema respecto del eje  $E$  para que la forma y tamaño del triángulo  $P_1P_2P_3$  no cambie, esto es, bajo qué condiciones el sistema rota alrededor del eje  $E$  como si fuese un sólido rígido.

Las distancias entre los puntos son:

$$P_1P_2 = \alpha_{12} \quad ; \quad P_1P_3 = \alpha_{13} \quad ; \quad P_2P_3 = \alpha_{23}$$



El sistema está aislado y entre las masas no actúan más que fuerzas internas, por consiguiente, la energía cinética de las partículas más la potencial debe mantenerse constante con el tiempo. Como se impone la condición de que el sistema gire como un sólido rígido, las distancias entre las partículas son constantes y cómo la interacción gravitatoria depende sólo de constantes, ( $G$ , las masas y las distancias), se deduce que la energía potencial es constante, y como la suma de esa energía potencial con la cinética es constante, también lo será la energía cinética del sistema.

La energía cinética del sistema depende de su momento de inercia y de su velocidad angular. El momento de inercia es constante ya que las masas y sus distancias al centro de masas no varían, se deduce, que la velocidad angular es constante.

En la figura 1 se han representado los tres puntos y el centro de masas del sistema. Los vectores  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  y  $\mathbf{r}_3$  localizan las masas desde el centro de masas y a las distancias entre las masas se les ha adjudicado un sentido vectorial.

$$\alpha_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad ; \quad \alpha_{13} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 \quad ; \quad \alpha_{23} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$$

Si las tres masas giran alrededor del eje que pasa por el centro de masas la fuerza centrípeta que necesita la masa  $m_1$  es la fuerza de interacción gravitatoria que ejercen la masa  $m_2$  y la masa  $m_3$ . Este mismo razonamiento vale para la masa  $m_2$  y la masa  $m_3$ .

La fuerza  $\mathbf{F}_{21}$  la ejerce la masa  $m_2$  sobre la masa  $m_1$  y vale

$$\vec{F}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{\alpha_{12}^2} \vec{\epsilon}_{12}$$

Siendo  $\vec{\epsilon}_{12}$  el vector unitario que está en la dirección y sentido  $P_1 P_2$ .

$$\vec{\epsilon}_{12} = \frac{\vec{\alpha}_{12}}{\alpha_{12}} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\alpha_{12}} \quad , \text{ por tanto, } \vec{F}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{\alpha_{12}^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

La fuerza que la masa 3 ejerce sobre la 1 vale:  $\vec{F}_{31} = G \frac{m_1 m_3}{\alpha_{13}^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)$

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} = \text{fuerza centrípeta de } m_1 = F_C = m_1 \omega^2 r_1 \vec{\epsilon}_{CMI}$$

$\vec{\epsilon}_{CMI}$ , es un vector unitario en la dirección y sentido desde el punto  $P_1$  al centro de masas del sistema

$$\vec{\epsilon}_{CMI} = -\frac{\vec{r}_1}{r_1} \quad ; \quad \vec{F}_C = -m_1 \omega^2 \vec{r}_1$$

$$G \frac{m_1 m_2}{\alpha_{12}^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + G \frac{m_1 m_3}{\alpha_{13}^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) + m_1 \omega^2 \vec{r}_1 = 0$$

En la ecuación anterior vamos a sustituir  $\vec{r}_2$ , haciendo uso de la posición del centro de masas del sistema.

$$0 = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{M} \Rightarrow m_2 \vec{r}_2 = -m_1 \vec{r}_1 - m_3 \vec{r}_3$$

$$\begin{aligned} G \frac{m_1 m_2}{\alpha_{12}^3} \vec{r}_2 + G \frac{m_1 m_3}{\alpha_{13}^3} \vec{r}_3 + m_1 \vec{r}_1 \left( \omega^2 - \frac{G m_2}{\alpha_{12}^3} - \frac{G m_3}{\alpha_{13}^3} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{G m_1}{\alpha_{12}^3} (-m_1 \vec{r}_1 - m_3 \vec{r}_3) + G \frac{m_1 m_3}{\alpha_{13}^3} \vec{r}_3 + m_1 \vec{r}_1 \left( \omega^2 - \frac{G m_2}{\alpha_{12}^3} - \frac{G m_3}{\alpha_{13}^3} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{r}_3 \left( -\frac{G m_1 m_3}{\alpha_{12}^3} + \frac{G m_1 m_3}{\alpha_{13}^3} \right) + m_1 \vec{r}_1 \left( \omega^2 - \frac{G m_2}{\alpha_{12}^3} - \frac{G m_3}{\alpha_{13}^3} - \frac{G m_1}{\alpha_{12}^3} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Si nos fijamos en la última igualdad resulta que el primer sumando es un vector que tiene la dirección de  $\vec{r}_3$  y el segundo sumando es otro vector que tiene la dirección de  $\vec{r}_1$ . Ambos vectores al tener diferentes direcciones no pueden sumar cero, salvo que los coeficientes de los vectores sean nulos

$$-\frac{G m_1 m_3}{\alpha_{12}^3} + \frac{G m_1 m_3}{\alpha_{13}^3} = 0 \Rightarrow \alpha_{12} = \alpha_{13}$$

$$\omega^2 = G \left( \frac{m_1 + m_2}{\alpha_{12}^3} + \frac{m_3}{\alpha_{13}^3} \right) = G \left( \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\alpha_{12}^3} \right) = \frac{GM}{\alpha_{12}^3} \Rightarrow \alpha_{12} = \alpha_{13} = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}$$

Si siguiendo este procedimiento con otras dos masas, obtendríamos:

$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}$$

3.-Este problema se refiere a una investigación para transformar un microscopio electrónico en el que los electrones son acelerados con una diferencia de potencial  $U = 511 \text{ kV}$ , en un microscopio de protones que se aceleran con un potencial  $-U$ .

a) Un electrón, después de abandonar el dispositivo que le acelera mediante una diferencia de potencial  $U$ , penetra en una región con un campo magnético no homogéneo  $\vec{B}$ , generado por un sistema de bobinas estacionarias  $L_1, L_2 \dots L_n$ , siendo las corrientes que circulan por ellas,  $i_1, i_2 \dots i_n$ , respectivamente.

¿Cuáles deberían ser las corrientes  $I_1, I_2 \dots I_n$ , en las bobinas con la finalidad de que un protón( acelerado con una diferencia de potencial  $-U$ ) siguiese la misma trayectoria y dirección que el electrón?

b) ¿Cuántas veces aumentaría o disminuiría el poder de resolución del microscopio de protones respecto del de electrones.

Se supone que el poder de resolución depende únicamente de las propiedades ondulatorias de las partículas

La ecuación fundamental de la mecánica relativista es:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

En el problema la fuerza magnética que ejerce el campo sobre el electrón es perpendicular a su velocidad, lo cual implica que la velocidad se mantiene constante, con lo que la ecuación anterior se convierte en

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{m_0 \vec{a}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

La fuerza y la aceleración tienen la misma dirección y sentido, se trata, de un movimiento circular, siendo  $\vec{a}$  la aceleración centrípeta.

$$evB = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v^2}{R} \Rightarrow eB = \frac{p}{R} \Rightarrow R = \frac{p}{eB}$$

Como el protón y el electrón han de seguir la misma trayectoria

$$\frac{p_p}{eB_p} = \frac{p_e}{eB_e} \Rightarrow B_p = B_e \frac{p_p}{p_e}$$

El campo magnético  $B_p$  debe tener la misma dirección que  $B_e$ , pero sentido contrario. Para hallar la relación entre los momentos hacemos uso del invariante relativista

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

$E$  es la energía de la partícula suma de la energía cinética y energía en reposo

$$(E_C + E_o)^2 = p^2 c^2 + m_o^2 c^4 \Rightarrow p^2 = \frac{(E_C + E_o)^2 - m_o^2 c^4}{c^2}$$

$$B_p = B_e \frac{p_p}{p_e} = B_e \frac{\sqrt{(E_{cp} + m_{op} c^2)^2 - m_{op}^2 c^4}}{\sqrt{(E_{ce} + m_{oe} c^2)^2 - m_{oe}^2 c^4}} = B_e \sqrt{\frac{E_{cp}^2 + 2E_{cp} m_{op} c^2}{E_{ce}^2 + 2E_{ce} m_{oe} c^2}}$$

Las energías cinéticas del protón y del electrón son iguales

$$B_p = B_e \sqrt{\frac{E_{cp} + 2m_{op} c^2}{E_{ce} + 2m_{oe} c^2}} = B_e \sqrt{\frac{511 \cdot 10^3 + 2 \cdot 938 \cdot 10^6}{511 \cdot 10^3 + 2 \cdot 511 \cdot 10^3}} = 35 B_e$$

b) La longitud de onda asociada a una partícula está dada por la ecuación de De Broglie

$$\lambda_e = \frac{h}{p_e} ; \lambda_p = \frac{h}{p_p} \Rightarrow \frac{\lambda_p}{\lambda_e} = \frac{p_e}{p_p} = \frac{1}{35} \Rightarrow \lambda_p = \frac{1}{35} \lambda_e$$

El poder de resolución es proporcional a la longitud de onda

$$z_p = k\lambda_p ; z_e = k\lambda_e \Rightarrow z_p = \frac{z_e}{35}$$

Con el microscopio de protones se distinguiría un objeto 35 veces más pequeño que el que se distinguiría con el microscopio electrónico.