PROBLEMAS DE

LAS OLIMPIADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

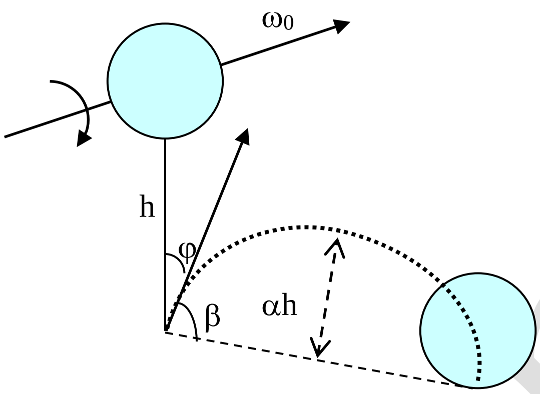
José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

XXII OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. CUBA. 1991

1.- La figura inferior muestra a una esfera homogénea de radio R. Antes de caer al suelo su centro de masas se encuentra en reposo, pero la esfera está girando con velocidad angular constante ω_o alrededor de un eje horizontal que pasa por su centro. El punto más bajo de la esfera se encuentra a una altura h sobre el suelo.



Cuando la esfera cae por acción de la gravedad, rebota hasta una altura αh describiendo una parábola que forma un ángulo φ con la dirección vertical. La deformación de la esfera en su impacto con el suelo es despreciable. Se admite que no existe rozamiento con el aire y que el tiempo de contacto de la esfera con el suelo es pequeño pero finito.

El coeficiente de rozamiento entre la esfera y el suelo es μ y el momento de inercia de la esfera respecto de un diámetro vale : $I = \frac{2}{5} mR^2$.

Deben considerarse dos casos: I) La esfera desliza durante todo el tiempo que dura el impacto y II) el deslizamiento acaba antes de la duración del impacto.

Caso I.- a) Calcular la tangente de φ, b) La distancia recorrida por el centro de masas de la bola entre el primero y segundo impacto, c) El valor mínimo de ω_o para este caso.

Caso II.- a) Calcular tag φ, b) La distancia recorrida por el centro de masas de la bola entre el primero y segundo impacto

Establecer para ambos casos la variación de tag φ con ω_o

La esfera, justamente antes del impacto con el suelo posee una velocidad angular ω_o alrededor del eje que pasa por su centro y una velocidad lineal del centro de masas de dirección vertical y perpendicular al suelo cuyo módulo es:

$$v_{CM} = \sqrt{2gh}$$

Al chocar contra el suelo aparece una fuerza de percusión que designamos con N. Dada su naturaleza, esta fuerza es mucho mayor que el peso de la esfera. También aparece una fuerza horizontal de rozamiento fr.

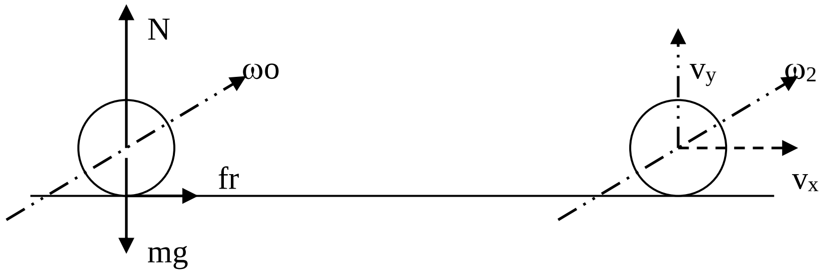


Fig. 1

En el tiempo que dura el impacto, esto es, mientras la esfera está en contacto con el suelo, la fuerza de rozamiento ha acelerado linealmente al centro de masas por lo que éste adquiere una velocidad v_x. Al mismo tiempo la fuerza de rozamiento crea un momento con respecto al centro de masas que determina una disminución de la velocidad angular. La fuerza de percusión N es la causante de que sobre el centro de masas aparezca una velocidad v_y. Teniendo en cuenta que el impulso de las fuerzas es igual a la variación de la cantidad de movimiento escribimos:

$$\int_{t_1}^{t_2} f_r dt = mv_x - 0 \qquad (1)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} N dt = mv_y - \left(-m\sqrt{2gh}\right) = mv_y + m\sqrt{2gh} \qquad (2)$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} \left(Rf_r\right) dt = -R\int_{t_1}^{t_2} fr \; dt = -Rmv_x = I\left(\omega_2 - \omega_o\right) \qquad (3)$$

La duración del impacto es t_2-t_1 = Δt . En la ecuación (3) figura un signo menos ya que el segundo miembro de la ecuación es negativo puesto que ω_2 es menor que ω_o.

Caso I.- La esfera desliza durante todo el tiempo que dura el impacto

En este caso durante el tiempo que dura el impacto la velocidad angular no se reduce lo suficiente por lo que al final del impacto se cumple: $\omega_2 R > v_x$

Durante todo el tiempo del impacto se cumple la relación: $f_r = \mu N$

Teniendo en cuenta esta última ecuación junto con la (1) y (2) que valoran el incremento del momento lineal $\Delta\vec{P}$ en sus dos componentes:

En el eje X , $\Delta P_x = mv_x$ o sea $\int_{t_1}^{t_2} \mu N dt = mv_x$

y sobre el eje Y $\Delta P_y = mv_y + m\sqrt{2gh}$ que es: $\int_{t_1}^{t_2} N dt = mv_y + m\sqrt{2gh}$

Si la componente Y la multiplicamos por el factor μ, igualando los segundos miembros nos lleva a :

$$\mu\left(mv_y + m\sqrt{2gh}\right) = mv_x$$

La velocidad vertical hacia arriba en el rebote hace que la bola suba hasta una altura αh.

Las ecuaciones del movimiento son : $v = v_y - gt$; $y = v_y t - \frac{1}{2}gt^2$, cuando v=0 , y $=\alpha h$. Operando en las dos ecuaciones resulta t = $\frac{v_y}{g}$ y $v_y = \sqrt{2g\ \alpha h}$

Sustituimos $v_y = \sqrt{2g\ \alpha h}$ en la ecuación, $\mu\left(mv_y + m\sqrt{2gh}\right) = mv_x$

$$\mu\sqrt{2g\ \alpha h} + \mu\sqrt{2gh} = v_x \quad \Rightarrow \quad v_x = \mu\sqrt{2gh}\left(1+\sqrt{\alpha}\right) \quad (4)$$

Recordando, que según la ecuación (3) $-Rmv_x = I(\omega_2 - \omega_o)$

$$-Rm\mu\sqrt{2gh}\left(1+\sqrt{\alpha}\right) = \frac{2}{5}mR^2(\omega_2 - \omega_o) \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \omega_o - \frac{5\mu\sqrt{2gh}\left(1+\sqrt{\alpha}\right)}{2R} \quad (5)$$

Caso I.-a) Calcular la tangente de φ

$$\text{tag}\varphi = \frac{v_x}{v_y} = \frac{\mu\sqrt{2gh}\left(1+\sqrt{\alpha}\right)}{\sqrt{2gh}\sqrt{\alpha}} = \frac{\mu\left(1+\sqrt{\alpha}\right)}{\sqrt{\alpha}} \quad (6)$$

que es independiente de ω_o.

Caso I.-b) La distancia recorrida por el centro de masas de la bola entre el primero y segundo impacto

El alcance entre el primer y segundo rebote vale: $x_{max} = v_x t_x = \mu\sqrt{2gh}\left(1+\sqrt{\alpha}\right)\ t_x$, siendo t_x: $t_x = 2t = \frac{2v_y}{g} = \frac{2\sqrt{2g\ \alpha h}}{g} = 2\sqrt{\alpha}\,\frac{\sqrt{2gh}}{g}$

$$x_{max} = \mu\sqrt{2gh}\left(1+\sqrt{\alpha}\right) * 2\sqrt{\alpha}\,\frac{\sqrt{2gh}}{g} = \frac{2\mu * 2gh * \left(\sqrt{\alpha}+\alpha\right)}{g} = 4\mu\ h\left(\sqrt{\alpha}+\alpha\right)$$

Que es también independiente de ω_o

Caso I.-c) El valor mínimo de ω_o para este caso

Para que ocurra este caso I, la velocidad inicial ω_o tiene que cumplir la condición $\omega_2 R > v_x$ y de (5)

$$\omega_2 R > v_x \quad \Rightarrow \quad \left[\omega_o - \frac{5\mu\sqrt{2gh}\left(1+\sqrt{\alpha}\right)}{2R}\right] * R > \mu\sqrt{2gh}\left(1+\sqrt{\alpha}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\omega_o R > \frac{5\mu\sqrt{2gh}\left(1+\sqrt{\alpha}\right)}{2} + \mu\sqrt{2gh}\left(1+\sqrt{\alpha}\right) \quad \Rightarrow \quad \omega_o > \frac{7\mu\sqrt{2gh}\left(1+\sqrt{\alpha}\right)}{2R}$$

II) El deslizamiento acaba antes de la duración del impacto

Al cesar el deslizamiento el movimiento es una rodadura pura. La velocidad del punto de contacto es nula. Teniendo en cuenta que dicho punto, tiene hacia la derecha la velocidad del centro de masas v_x y hacia la izquierda el producto ω R

$$v_x = \omega_2 R$$

llevando esta última relación a la ecuación (3) $-Rmv_x = I(\omega_2 - \omega_o)$

$$-Rmv_x = I\left(\frac{v_x}{R} - \omega_o\right) = \frac{2}{5}mR^2\left(\frac{v_x}{R} - \omega_o\right) \quad \Rightarrow \quad -Rmv_x = \frac{2}{5}mv_x R - \frac{2}{5}mR^2\omega_o \Rightarrow$$

$$= -\frac{7}{5}mv_x R = -\frac{2}{5}mR^2\omega_o \quad \Rightarrow \quad 7v_x = 2R\omega_o \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{2}{7}\omega_o R$$

$$\omega_2 = \frac{v_x}{R} = \frac{2}{7}\omega_o$$

La componente v_y vale: $v_y = \sqrt{2g\ \alpha h}$

Caso II.-a) Calcular tag φ

Para calcular la tangente del ángulo φ, usamos la relación entre las componentes de la velocidad inicial en el rebote

$$\text{tag}\ \varphi = \frac{v_x}{v_y} = \frac{\frac{2}{7}\omega_o R}{\sqrt{2g\ \alpha h}} = \frac{2\omega_o R}{7\sqrt{2gh}\sqrt{\alpha}} \qquad (7)$$

La tangente de φ depende de la velocidad angular inicial ω_o

Caso II.-b) La distancia recorrida por el centro de masas de la bola entre el primero y segundo impacto

Para calcular el alcance entre el primero y segundo rebote, recordemos las expresiones que dan el alcance máximo y la altura máxima en un tiro parabólico (beta es el ángulo que forma el vector velocidad con el eje de abscisas)

$$x_{max} = \frac{v^2\ 2\ \text{sen}\beta\ \cos\beta}{g}\ ;\ h_{max} = \frac{v^2 \text{sen}^2\beta}{2g} \quad \Rightarrow x_{max} = \frac{4h_{max}}{\text{tag}\ \beta} = 4h_{max}\,\text{tag}\ \varphi$$

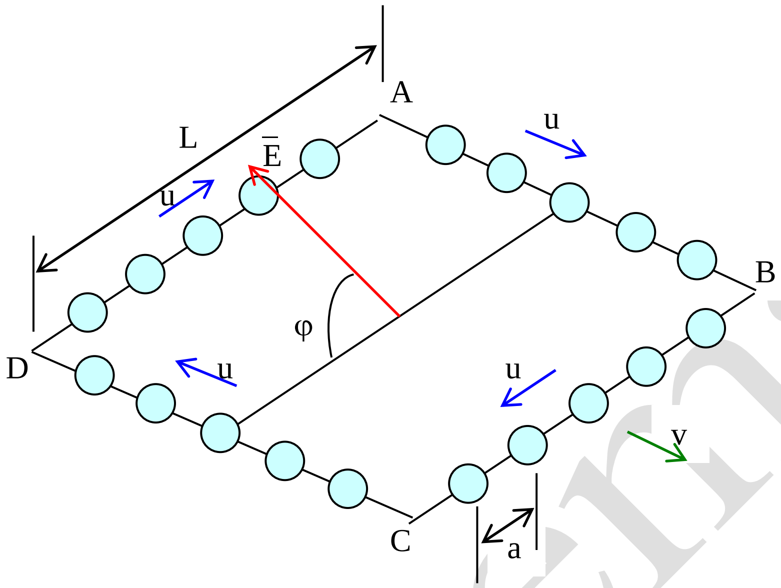
$$x_{max} = 4\ \alpha h \frac{2\omega_o R}{7\sqrt{2gh}\sqrt{\alpha}} = \frac{8}{7}\omega_o R\sqrt{\frac{\alpha h}{2g}} \quad (8)$$

En el caso I, **en que hay deslizamiento mientras dura el impacto**, según la ecuación (6), la tangente de φ es independiente de la velocidad de rotación inicial ω_o, mientras que en el caso II, ecuación (7) ,es directamente proporcional a ω_o.

2.- Un lazo de forma cuadrada tiene de lado una longitud L. A lo largo del lazo, una serie de bolas cargadas eléctricamente, cada una con una

carga q, se desplazan con una velocidad u, manteniendo cada bola con su vecina una distancia constante a, referido a un sistema de referencia

que está en reposo respecto del lazo. La disposición de las bolas en el lazo se indica en la figura inferior



El hilo que forma el lazo es de material no conductor y posee una carga eléctrica uniformemente distribuida sobre él, en total la carga del hilo es igual y opuesta a la de todas las bolas.

Considerar una situación en la que el hilo se desplaza con velocidad constante v, paralela al lado AB, en el interior de un campo eléctrico uniforme E que es perpendicular al vector v y forma con el plano del lazo un ángulo φ.

Teniendo en cuenta los efectos relativistas han de calcularse las siguientes magnitudes que son medidas por un observador situado sobre un sistema de referencia para el que el lazo se desplaza respecto de él con la velocidad v.

1) El espaciado que existe entre las bolas de cada uno de los lados del lazo

2) Los valores de la carga neta (bolas más lazo) en cada uno de los lados

3) El módulo del momento de origen eléctrico que tiene a rotar al sistema formado por el lazo y las bolas
4) La energía debida a la interacción del sistema, hilo más bolas, con el campo eléctrico,

Notas.- La carga eléctrica de un objeto aislado es independiente del sistema de referencia desde el que se mida. Considerar que no existe ningún tipo de radiación electromagnética

1)
La longitud, por ejemplo de una barra, medida por un observador en un sistema de referencia para el que dicha barra se encuentra en reposo es la llamada longitud propia.

Si esa barra se desplaza con velocidad v respecto de un observador y éste mide su longitud encuentra una distancia, llamada longitud impropia, ambas están relacionadas mediante la ecuación:

$$L_{impropia} = L_{propia}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (1)$$

Lado AB

En el problema que nos ocupa la distancia a es una longitud impropia ya que está medida respecto de un sistema ligado al lazo y no a las bolas. Designamos con S al sistema para el que el lazo se desplaza con una velocidad v, S_1 al sistema para el que el lazo se encuentra en reposo y las bolas del lado AB se desplazan con velocidad u y finalmente llamamos S_2 al sistema para el que las bolas del lado AB se encuentran en reposo. Para este último sistema la distancia entre dos bolas consecutivas es a_2 y es la longitud propia ya que se mide desde el sistema en que las bolas están en reposo.
Teniendo en cuenta la expresión (1), la relación entre a y a_2 es:

$$a_2 = \frac{a}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Para el observador que está en el sistema S y que quiere aplicar la relación (1) tiene que calcular primero la velocidad que tienen las bolas respecto de su sistema y para ello recurre a la suma de velocidades relativista:

$$v_S = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$$

Si aplica la ecuación (1) encuentra, siendo a_S, la longitud medida desde el sistema S

$$a_S = a_2\sqrt{1-\frac{v_S^2}{c^2}} = a\frac{\sqrt{1-\frac{v_S^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = a\frac{\sqrt{c^2-v_S^2}}{\sqrt{c^2-u^2}} = a\frac{\sqrt{c^2-\frac{(u+v)^2}{\left(1+\frac{uv}{c^2}\right)^2}}}{\sqrt{c^2-u^2}} =$$

$$a\frac{\sqrt{\frac{c^2\left(1+\frac{uv}{c^2}\right)^2-(u+v)^2}{c^2-u^2}}}{1+\frac{uv}{c^2}} =$$

$$= a\frac{\sqrt{\frac{\left(c^2+uv\right)^2-c^2(u+v)^2}{c^2\left(c^2-u^2\right)}}}{1+\frac{uv}{c^2}} = a\frac{\sqrt{\frac{c^4+u^2v^2+2c^2uv-c^2u^2-c^2v^2-2c^2uv}{c^2\left(c^2-u^2\right)}}}{1+\frac{uv}{c^2}} =$$

$$= a\frac{\sqrt{\frac{c^2\left(c^2-u^2\right)-v^2\left(c^2-u^2\right)}{c^2\left(c^2-u^2\right)}}}{1+\frac{uv}{c^2}} \quad\Rightarrow\quad a_S(AB) = a\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{uv}{c^2}}$$

Lado CD

Ahora las bolas se mueven con una velocidad –v y para calcular la velocidad para el observador en S basta cambiar v por –v :

$$v_S = \frac{v-u}{1-\frac{uv}{c^2}}$$

Si se opera como en el caso anterior se llega a:

$$a_S(CD) = a\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{uv}{c^2}}$$

Lados BC y DA

La posición del lazo es perpendicular y por tanto <u>no se observa cambio</u> en las longitudes, los valores de distancia entre bolas es a.

2) Los valores de la carga neta (bolas más lazo) en cada uno de los lados

Para el observador del sistema S_1, las bolas y el hilo están distribuidos simétricamente. Sea q la carga de cada bola y N el número de bolas que hay en cada lado. La distancia entre las bolas es para este observador a, en consecuencia el número de bolas en cada uno de los lados es:

$$Na = L \qquad \Rightarrow \qquad N = \frac{L}{a}$$

La carga del hilo es igual a las de las bolas que haya en ese hilo y de signo contrario.

$$\text{Carga de la bolas en el lado AB} = qN = q\frac{L}{a}$$

$$\text{Carga del hilo del lado AB} = -q\frac{L}{a}$$

$$\text{Carga neta en cada lado} = 0$$

Para el observador que se encuentra en el sistema S, la longitud del hilo AB vale

$$L_{AB} = L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

La distancia entre dos bolas es. $$a_S(AB) = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{uv}{c^2}} * a$$

Para este observador el número de bolas y la carga de todas ellas es:

$$N_S = \frac{L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{a_S(AB)} = \frac{L}{a}\left(1+\frac{uv}{c^2}\right) \quad \Rightarrow \quad Q_{AB} = \frac{L}{a}\left(1+\frac{uv}{c^2}\right)*q$$

Se hace uso del hecho de que la carga no depende del sistema de referencia.

Para este observador la carga del hilo es la misma que la que mide el observador S_1 ya que como dice la nota del enunciado la carga eléctrica de un objeto es independiente del sistema de referencia desde el que se mida. A primera vista puede parecer extraño ya que la longitud del hilo se acorta, pero en la misma proporción crece la densidad lineal para que en total la carga del objeto no varíe.

La carga total para el observador en S del lado AB es

$$Q_{total(AB)} = \frac{L}{a}\left(1+\frac{uv}{c^2}\right)*q - \frac{Lq}{a} = \frac{Lq}{a}\frac{uv}{c^2}$$

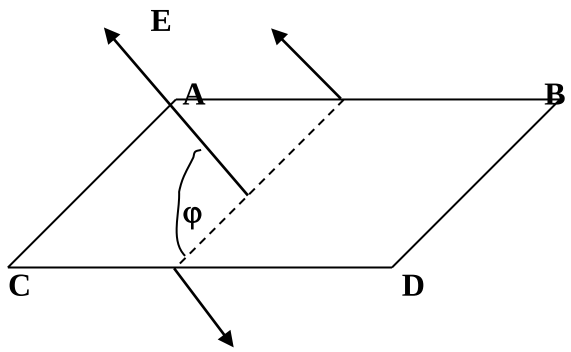
Para el lado CD el razonamiento es el mismo, pero hay que cambiar $a_S(CD)$,que tiene la misma expresión que $a_S(AB)$, pero con signo menos, por lo que resulta

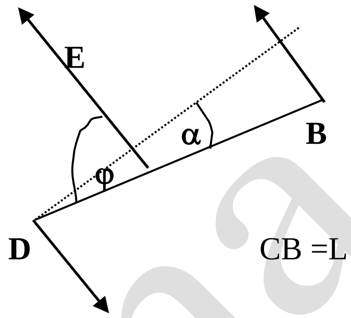
$$Q_{total(CD)} = \frac{L}{a}\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)*q - \frac{Lq}{a} = -\frac{Lq}{a}\frac{uv}{c^2}$$

Para los lados BC y DA la situación es la misma que para el observador en S_1, esto es la carga neta es nula en cada lado

3) El módulo del momento de origen eléctrico que tiende a rotar el sistema formado por el lazo y las bolas

Toda carga situada en el seno de un campo eléctrico sufre una fuerza que es el producto de la carga por el módulo del campo. Si la carga es positiva la fuerza tiene la dirección y sentido del campo y si es negativa la dirección es la misma pero el sentido es contrario. Para nuestro caso ambas fuerzas determinan un momento





La mínima distancia entre las fuerzas el L cos α = L sen φ.
El módulo de la fuerza sobre cada lado ,AB,o CD , vale:

$$F=Q_{AB}*E \qquad \text{con} \qquad Q_{\text{total(AB)}} = \frac{Lq}{a}\frac{uv}{c^2}$$

El módulo del momento de las fuerzas es:

$$M = \frac{Lquv}{ac^2} L\ \text{sen}\varphi * E = \frac{L^2quv}{ac^2} * E\ \ \text{sen}\varphi$$

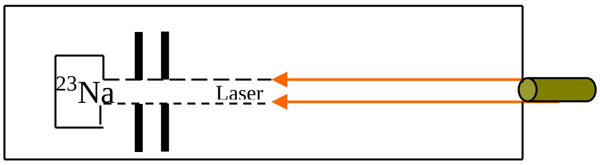
4) La energía debida a la interacción del sistema hilo más bolas con el campo eléctrico

Imaginemos que el sistema pudiese girar libremente por efecto del par de fuerzas alrededor de un eje imaginario que es paralelo a los lados AB y CD y equidistante de ambos. De forma espontánea el lazo tendería a colocarse de modo que DB quedase en la dirección de **E** y el momento de las fuerzas se anulase. Esto supondría un giro de 180-φ grados y un trabajo dado por

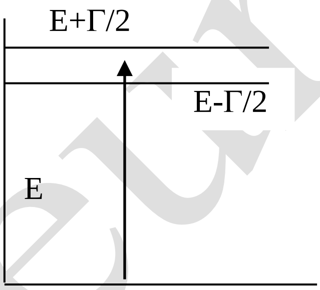
$$W = \int_0^{90-\varphi} M\ d\varphi = \frac{L^2quvE}{ac^2}\int_0^{180} \text{sen}\varphi\ d\varphi = \frac{L^2quvE}{ac^2}\left(-\cos 180 + \cos\varphi\right) = \frac{L^2quvE}{ac^2}\left(1+\cos\varphi\right)$$

Esta es la energía que tiene almacenada el sistema en la posición inicial.

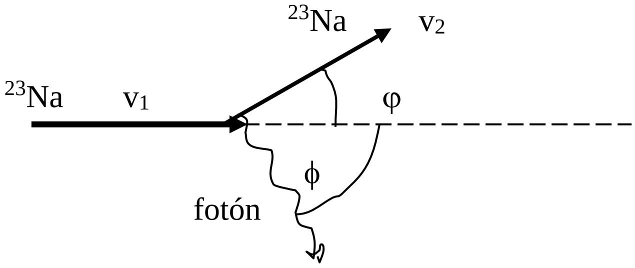
3.- Si se desean estudiar con precisión las propiedades de los átomos aislados, se necesita que permanezcan prácticamente en reposo durante un tiempo largo. Un método para lograrlo es el enfriamiento mediante láser .
En una cámara de vacío se generan átomos de ^{23}Na a una temperatura de 10^3 K. El haz de átomos se colima y de frente a ellos se les bombardea con un haz de láser intenso.



La frecuencia del láser, llamada de absorción resonante, se elige de manera que los átomos de sodio que tengan una velocidad v_o absorben un fotón y pasan desde el estado fundamental a un primer estado excitado de energía promedio E e incertidumbre Γ



Según este proceso los átomos disminuyen su velocidad en $\Delta v_1 = v_1 - v_o$. Posteriormente el átomo retorna al estado fundamental y la velocidad cambia a $\Delta v_2 = v_2 - v_1$, al mismo tiempo que su dirección cambia en un ángulo φ



La secuencia de emisión y absorción se repite muchas veces hasta que la velocidad de los átomos decrece hasta un punto en que ya no absorbe luz del láser y entonces se precisa cambiar la frecuencia de éste.

1.- Calcular la frecuencia de absorción resonante del láser y la disminución de velocidad después de la primera absorción

2.- Calcular el rango de velocidades Δv_o de los átomos que pueden absorber la luz del láser de la cuestión 1).

3.- Calcular el ángulo φ

4.- Encontrar la disminución máxima posible de la velocidad

5.- Calcular el número aproximado de absorciones-emisiones necesarios para reducir la velocidad de un átomo desde v_o hasta casi cero. Suponer que el átomo se desplaza en línea recta

6) Calcular el tiempo que transcurre para que el proceso descrito en 5 ocurra. Calcular la distancia que un átomo se desplaza en ese tiempo

Datos:

$E = 3{,}36.10^{-19}$ J

$\Gamma = 7{,}0\ .10^{-27}$ J; $c = 3.10^{8}$ m/s , velocidad de la luz

masa del protón , $m_p = 1{,}67.10^{-27}$ kg,; $h = 6{,}62.10^{-34}$ J, constante de Planck

$k = 1{,}38.10^{-23}$ JK^{-1}, constante de Boltzmann

1.- Calcular la frecuencia de absorción resonante del láser y la disminución de velocidad después de la primera absorción

Aplicamos el principio de conservación de la energía y el de la conservación de la cantidad de movimiento

$$\frac{1}{2}mv_o^2 + h\nu = E + \frac{1}{2}mv_1^2 \quad \Rightarrow \quad m(v_o + v_1)\ (v_o - v_1) = 2(E - h\nu)$$

$$mv_0 - \frac{h\nu}{c} = mv_1 \quad \Rightarrow \quad m(v_o - v_1) = \frac{h\nu}{c}$$

Dividiendo miembro a miembro las dos expresiones resulta:

$$v_o + v_1 = \frac{2c(E - h\nu)}{h\nu}$$

Sustituimos la ecuación anterior en la expresión de la conservación de la energía y resulta:

$$v_o - v_1 = \frac{h\nu}{mc} \quad (1)$$

Sumando las dos últimas ecuaciones

$$v_o = \frac{c(E - h\nu)}{h\nu} + \frac{h\nu}{2mc} = \frac{cE}{h\nu} - c + \frac{h\nu}{2mc} \quad (2)$$

Calculamos con los datos conocidos y obtenemos:

$$\frac{cE}{h} = \frac{3.10^{8}\ \frac{m}{s} * 3{,}36.10^{-19}\,J}{6{,}62.10^{-34}\,J.s} = 1{,}52.10^{23}\ \frac{m}{s^2}$$

$$;\frac{h}{2mc} = \frac{6{,}62.10^{-34}\,Js}{2 * 23 * 1{,}67.10^{-27}\,kg * 3.10^{8}\ \frac{m}{s}} = 2{,}87.10^{-17}\ \frac{Js^2}{kg\ m}$$

Comparando los valores numéricos se deduce que el segundo es despreciable frente al primero por lo que la ecuación (1) queda así

$$v_o = \frac{cE}{h\nu} - c \quad \Rightarrow \quad h\nu(v_o + c) = cE \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{cE}{h(v_o + c)}$$

Sustituyendo valores en la última ecuación resulta:

$$\nu = \frac{3.10^{8}\ \frac{m}{s} * 3{,}36.10^{-19}\,J}{6{,}62.10^{-34}\,Js * 3.10^{8}\ \frac{m}{s}} \approx 5.10^{14}\ \ Hz$$

Se ha hecho la aproximación de despreciar la velocidad molecular del sodio frente a la velocidad de la luz, puesto que

$$\frac{1}{2} m v_o^2 = \frac{3}{2} kT \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3 * 1{,}38.10^{-23}\,JK^{-1} * 10^{3}\,K}{23 * 1{,}67.10^{-27}\,kg}} = 1{,}04.10^{3}\ \frac{m}{s}$$

De la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento (1), podemos calcular la disminución de la velocidad de un átomo después de la primera absorción

$$\Delta v_1 = v_1 - v_o = -\frac{h\nu}{mc} = -\frac{6{,}62.10^{-34}\,Js * 5.10^{14}\,s^{-1}}{23 * 1{,}67.10^{-27}\,kg * 3.10^{8}\,ms^{-1}} = -3.10^{-2}\ \ \frac{m}{s}$$

2) .-Calcular el rango de velocidades Δv_o de los átomos que pueden absorber la luz del láser de la cuestión 1).

La ecuación que relaciona la velocidad con las distintas magnitudes es:

$$v_o = \frac{cE}{h\nu} - c$$

Teniendo en cuenta que E tiene una incertidumbre Γ, podemos suponer un valor máximo de v_o y un valor mínimo cuyas expresiones son

$$v_o^S = \frac{c\left(E + \frac{\Gamma}{2}\right)}{h\nu} - c \quad ; v_o^I = \frac{c\left(E - \frac{\Gamma}{2}\right)}{h\nu} - c \quad \Rightarrow \quad = v_o^S - v_o^I = \frac{c\Gamma}{h\nu}$$

$$\Delta v_0 = \frac{3.10^8 * 7.10^{-27}}{6,62.10^{-34} * 5.10^{14}} \approx 6 \ \frac{m}{s}$$

3) Calcular el ángulo φ

Cuando el átomo de sodio cuya velocidad es v_1 vuelve a su estado fundamental emitiendo un fotón se cumple la conservación del momento y de la energía

$$mv_1 = mv_2 \cos\varphi + \frac{h\nu_1}{c}\cos\phi \quad (\text{ejeX}) \quad ; \quad 0 = mv_2 \operatorname{sen}\varphi - \frac{h\nu_1}{c}\operatorname{sen}\phi \quad (\text{ejeY})$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + E = \frac{1}{2}mv_2^2 + h\nu_1$$

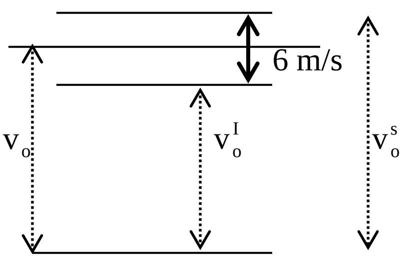
El fotón se puede emitir en cualquier dirección, si lo hace formando un ángulo de 90º con la dirección del sodio, las ecuaciones son

$$mv_1 = mv_2 \cos\varphi \quad ; \quad 0 = mv_2 \operatorname{sen}\varphi - \frac{h\nu_1}{c} \quad \Rightarrow \quad \text{tag } \varphi = \frac{h\nu_1}{mv_1 c} \approx \frac{h\nu_1}{mv_0 c}$$

$$\varphi = \text{arco} \quad \text{tag}\,\frac{h\nu_1}{mv_0 c} = \text{arco tag}\,\frac{6,62.10^{-34} * 5.10^{14}}{23 * 1,67.10^{-27} * 1,04.10^3 * 3.10^8} \Rightarrow \varphi \approx 2,8.10^{-5}\,\text{rad}$$

4) Encontrar la disminución máxima posible de la velocidad

En el apartado 3 se ha hecho el cálculo de los valores extremos de la velocidad, por consiguiente la disminución máxima posible es 3 m/s



5.- Calcular el número aproximado de absorciones-emisiones necesarios para reducir la velocidad de un átomo desde v_o hasta casi cero. Suponer que el átomo se desplaza en línea recta

Se ha calculado que en promedio la disminución de la velocidad es 3.10^{-2} m/s

$$\Delta v_1 = v_1 - v_o = -\frac{h\nu}{mc} = -3.10^{-2} \ \frac{m}{s}$$

y su velocidad promedio

$$v_0 = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = 1{,}04.10^3 \ \frac{m}{s},$$

Tenemos que una absorción supone una disminución de velocidad de 3.10^{-2} m/s, por tanto, para disminuir la velocidad a cero desde $1{,}04{,}10^3$ m/ s se necesitan N absorciones

$$\frac{1}{3.10^{-2}} = \frac{N}{1{,}04.10^3} \quad \Rightarrow \quad N = 3{,}5.10^4$$

6) Calcular el tiempo que transcurre para que el proceso descrito en 5 ocurra. Calcular la distancia que un átomo se desplaza en ese tiempo

En cuántica se estudia la anchura de los niveles excitados de los átomos y se encuentra una relación de incertidumbre de Heisenberg. El tiempo que el átomo se encuentra en el estado excitado es:

$$\Delta E * \Delta t = \frac{h}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{h}{2\pi \ \Gamma} = \frac{6{,}62.10^{-34}}{2 * 3{,}14 * 7.10^{-27}} = 1{,}5.10^{-8} \ s$$

El tiempo para disminuir la velocidad de todos los átomos del intervalo es:

$$\Delta T = N * \Delta t = 3{,}5.10^4 * 1{,}5.10^{-8} = 5{,}3.10^{-4} \text{ s}$$

El átomo al principio tiene una velocidad de $1{,}04.10^3$ m/s, pero a medida que absorbe fotones su velocidad disminuye de modo que al cabo de $5{,}3.10^{-4}$ s, su velocidad se ha hecho nula. Tomamos como promedio de la velocidad la media aritmética entre la velocidad inicial y la final La distancia recorrida por un átomo con velocidad promediada, en ese intervalo es:

$$\Delta s = v_{media} * \Delta T = \frac{1{,}04.10^3}{2} * 5{,}3.10^{-4} = 0{,}27 \ \ m$$