

Cicloide acelerada

Introducción

La cicloide es la curva engendrada por un punto de la periferia de una rueda (ó de un cilindro), rodando sin deslizamiento por un suelo horizontal con velocidad constante.

Llamamos “cicloide acelerada” a la curva engendrada por un punto de la periferia de una cilindro o rueda cuando se desplaza por un plano inclinado rodando, sin deslizar, con movimiento uniformemente acelerado.

En este experimento deduciremos primero la ecuación de la “cicloide acelerada”, luego, mediante fotografía estroboscópica obtendremos el movimiento real, y así podremos comparar la ecuación teórica con los datos experimentales.

Finalmente a partir de la ecuación teórica de las posiciones x e y obtenemos las velocidades.

Deducción de la ecuación de la “cicloide acelerada”

En la figura 1 se ha representado el cilindro de radio R , en el tiempo $t=0$ y $t = t$. El centro de masas O corresponde al tiempo $t=0$ y O' al tiempo $t=t$, la distancia entre ambos centros de masas es L .

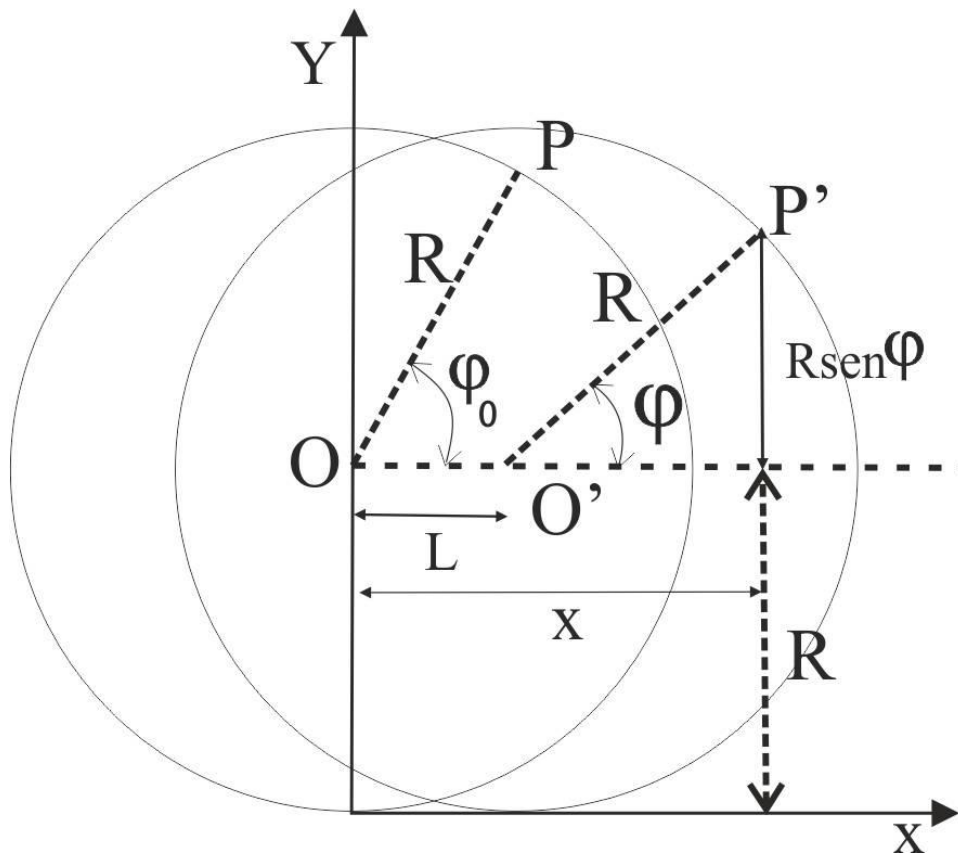


Fig.1

El punto de la periferia P tiene de coordenadas en el instante $t=0$

$$(x_0 ; y_0+R)$$

En el instante $t=t$ ese mismo punto, P', tiene de coordenadas

$$x=R \cos \varphi+L \quad ; \quad y=R \operatorname{sen} \varphi+R$$

Si la velocidad inicial del centro de masas de la rueda es v_0 , la longitud L recorrida vale

$$L = v_0 t + \frac{1}{2} a_{CM} t^2$$

El ángulo girado por el punto de la periferia es $\varphi_0 - \varphi$

Cuando el centro de masas de la rueda se desplace $2\pi R$, el ángulo girado por el punto de la periferia es 2π rad, y se puede establecer la siguiente proporción:

$$\frac{2\pi R}{2\pi} = \frac{L}{\varphi_0 - \varphi} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi_0 - \frac{L}{R}$$

Sustituyendo valores en las coordenadas resulta

$$x = L + R \cos\left(\varphi_0 - \frac{L}{R}\right) = v_0 t + \frac{1}{2} a_{CM} t^2 + R \cos\left(\varphi_0 - \frac{v_0 t + \frac{1}{2} a_{CM} t^2}{R}\right)$$

$$y = R \left[1 + \operatorname{sen}\left(\varphi_0 - \frac{L}{R}\right) \right] = R \left[1 + \operatorname{sen}\left(\varphi_0 - \frac{v_0 t + \frac{1}{2} a_{CM} t^2}{R}\right) \right]$$

Fotografía y gráficas

Por medio de la fotografía estroboscópica se obtiene la imagen de un cilindro rodando por un plano inclinado (fotografía 1)



Fotografía 1

La fotografía 1 es una vista panorámica del cilindro rodando por el plano inclinado. Sobre él se ha marcado un radio que aparece en la fotografía como una raya blanca. Sobre la fotografía se han dibujado unos ejes coordenados rectangulares. La distancia entre las señales A y B es 0,50 metros y éstas sirven para determinar el factor de escala.

A partir del centro de masas inicial correspondiente al tiempo $t=0$ se han señalado cada dos intervalos, mediante puntos blancos, las posiciones sucesivas del centro de masas. El intervalo entre dos puntos consecutivos del centro de masa es 32,5 milisegundos

a) Haga una fotocopia de la fotografía 1 y obtenga los datos pedidos en la tabla I.

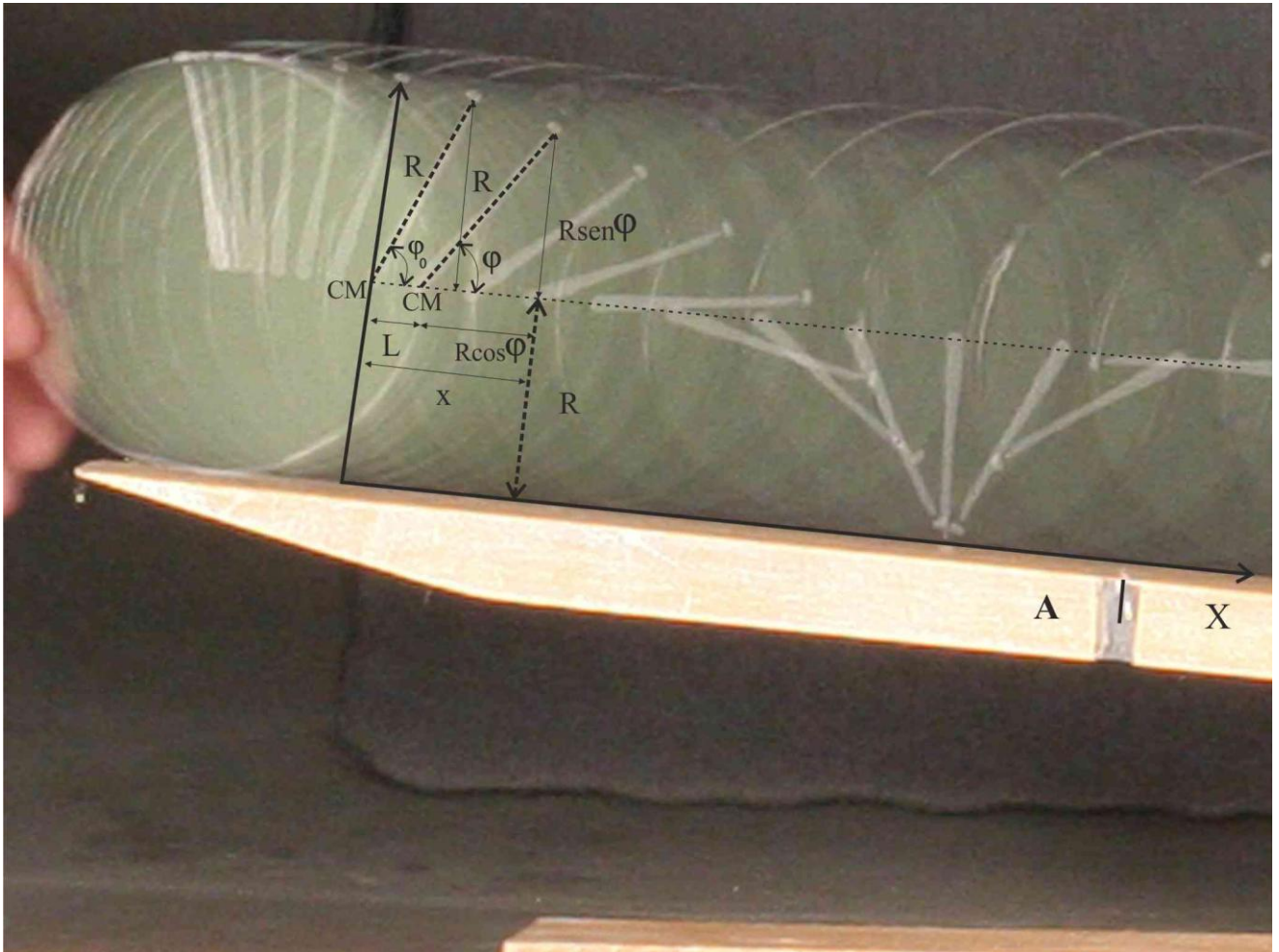
Tabla I

$$\text{Factor de escala } f = \frac{0,50 \text{ m}}{\text{distancia medida en la fotocopia}}, \quad \text{Periodo } 65 \text{ ms}$$

x(CM) en fotocopia										
X (CM) real en metros										
Tiempo en segundos										

Con los datos recogidos en la tabla I, construya la gráfica posición $x(\text{CM})$ del centro de masas frente al tiempo y a partir de ella determine la aceleración y la velocidad inicial.

$$\frac{1}{2} a = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} ; v_0 = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Fotografía 2

Esta fotografía es una ampliación de la parte inicial del movimiento del cilindro. Se mide el ángulo φ_0 .

b) En la fotocopia de la fotografía 2 mida el ángulo inicial φ_0 .

El valor del ángulo inicial $\varphi_0 = \text{°} = \text{rad}$;

c) Con los datos obtenidos escriba las ecuaciones paramétricas x e y de la cicloide acelerada. El radio del cilindro medido directamente sobre él es $R = 0,047 \text{ m}$.



Fotografía 3

La fotografía 3 es la misma que la fotografía 1, pero aquí se han señalado mediante puntos blancos las distintas posiciones del extremo del radio y se han trazado perpendiculares sobre el eje de abscisas.

d) Haga una fotocopia de la fotografía 3 y mida las abscisas y ordenadas de los puntos señalados. Complete la tabla II

Tabla II

Factor de escala $f = \frac{0,50 \text{ m}}{\text{distancia medida en la fotocopia}}$

x/cm , cicloide acelerada en fotocopia .

x/m , valores reales cicloide acelerada

y/cm cicloide acelerada en fotocopia

y/ m, valores reales cicloide acelerada

tiempo /s

Con las ecuaciones paramétricas que ha escrito en el apartado c) complete la tabla III.

Utilice una hoja de cálculo

Tabla III

x/m deducidos de la ecuación teórica

y/m deducidos de la ecuación teórica

- e) En una sola gráfica represente las abscisas reales y teóricas frente al tiempo.
- f) En una sola gráfica, represente las ordenadas reales y teóricas frente al tiempo.
- g) En una sola gráfica, con los datos de las tablas II y III represente las abscisas experimentales frente a las ordenadas experimentales. Haga lo mismo con las teóricas de la tabla III.
- h) Con la ecuación teórica de las abscisas determine las ecuaciones de las velocidades (v_x e v_y), sobre el eje de abscisas..
- i) Represente en una gráfica las velocidades v_x e v_y frente a x
- j) Represente v_x frente v_y .
- k) Represente la velocidad $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ frente al tiempo