Un experimento con integración numérica

Se dispone de una varilla uniforme de madera dotada de unos agujeros situados simétricamente. Estos agujeros pueden ser centros de suspensión, lo cual permite variar el momento de inercia de la varilla dependiendo del agujero elegido como centro de suspensión.
La masa de la varilla es m = 51,56 g y su longitud L = 91,9 cm. La distancia entre dos agujeros consecutivos es 10 cm.

En la fotografía 1 la varilla se encuentra en reposo y se ha señalado el centro de masas y tres centros de suspensión O_1; O_2 y O_3.

Fotografía 1.- La varilla es de madera y su centro de masas se encuentra en su centro geométrico. El centro de suspensión O_1 está en el agujero superior y la distancia real entre el centro de masas y este centro de suspensión es 0,4488 m

En la fotografía 2 la varilla se ha colocado en posición horizontal y se ha dejado en libertad sin velocidad inicial. Se ha hecho una fotografía estroboscópica de la caída de la varilla y sobre esa foto se han señalado las distintas posiciones del centro de masas

Fotografía 2.- Se han indicado nueve posiciones del centro de masas de la varilla. El intervalo temporal entre dos posiciones consecutivas de la varilla es t = 0,0325 segundos.

Fundamento teórico

En la figura 1, que aparece a continuación, la varilla en el instante inicial está en posición horizontal sobre el eje X sin velocidad inicial. Se deja en libertad y se fotografía. Para la posición de la varilla señalada con raya discontinua le corresponde un tiempo t_1 y para la otra posición un tiempo t_2.

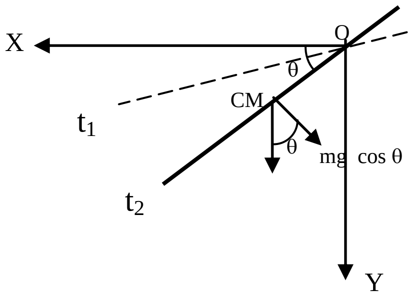


Fig.1

La distancia entre el centro de masas CM y el centro de suspensión O la designamos con d. La componente del peso de la varilla perpendicular a ella, vale mg cos θ. El momento mecánico del peso, respecto del centro de suspensión es: mg cosθ d.
De acuerdo con la ley de la Dinámica de la Rotación.

$$M = I\alpha = mg\cos\theta\ d = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\cdot\omega \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int mg\,d\ \cos\theta\ d\theta = \int I\,d\omega \quad \Rightarrow \quad m\,g\,d\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{I\omega^2}{2} + Cte$$

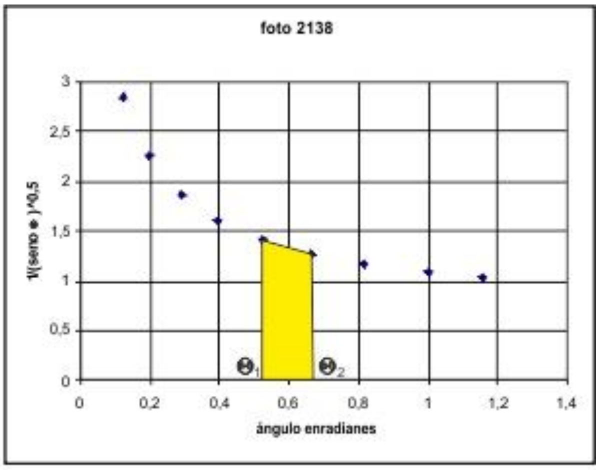
.
Cuando θ=0 (posición de la varilla sobre el eje X), la velocidad angular ω=0, Cte =0

$$\sqrt{\frac{2mgd\,\mathrm{sen}\theta}{I}} = \omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2mgd}{I}}\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{\sqrt{\mathrm{sen}\,\theta}} = \text{Área}$$

La integral del segundo miembro solamente se puede resolver numéricamente, midiendo el área comprendida entre la función $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{sen}\,\theta}}$ y el intervalo θ_1 a θ_2, que se corresponde con los tiempos t_1 y t_2.

$$\frac{2mgd}{I}(t_2 - t_1)^2 = \text{Área}^2 \Rightarrow \quad I = \frac{2mgd}{(\text{Área})^2}(t_2 - t_1)^2 \qquad (1)$$

De acuerdo con el concepto de integral, ésta puede representar un área y en este caso no debe interpretarse como un área geométrica, porque vamos a llevar en el eje de ordenadas los valores de $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{sen}\,\theta}}$ y en el de abscisas los de θ, pero en el plano definido por estos dos ejes, si limitamos bajo la curva un intervalo entre y dos barras verticales. El producto de estas dos magnitudes, es interpretable como un área.



$$\frac{2mgd}{I}\left(t_2-t_1\right)^2=\text{Área}^2 \Rightarrow \quad I=\frac{2mgd}{\left(\text{Área}\right)^2}\left(t_2-t_1\right)^2 \qquad (1)$$

En el experimento determinaremos el momento de inercia I, para tres posiciones diferentes del punto de suspensión de la varilla, y compararemos el valor obtenido con (1) frente al proporcionado por cálculo directo de I mediante la formula de Steiner.

Toma de datos

1) En la fotografía 2 (o en una fotocopia de ella) determine el factor de escala

$$f=\frac{91{,}9\ \text{cm reales}}{\text{..........cm en la fotocopia}}$$

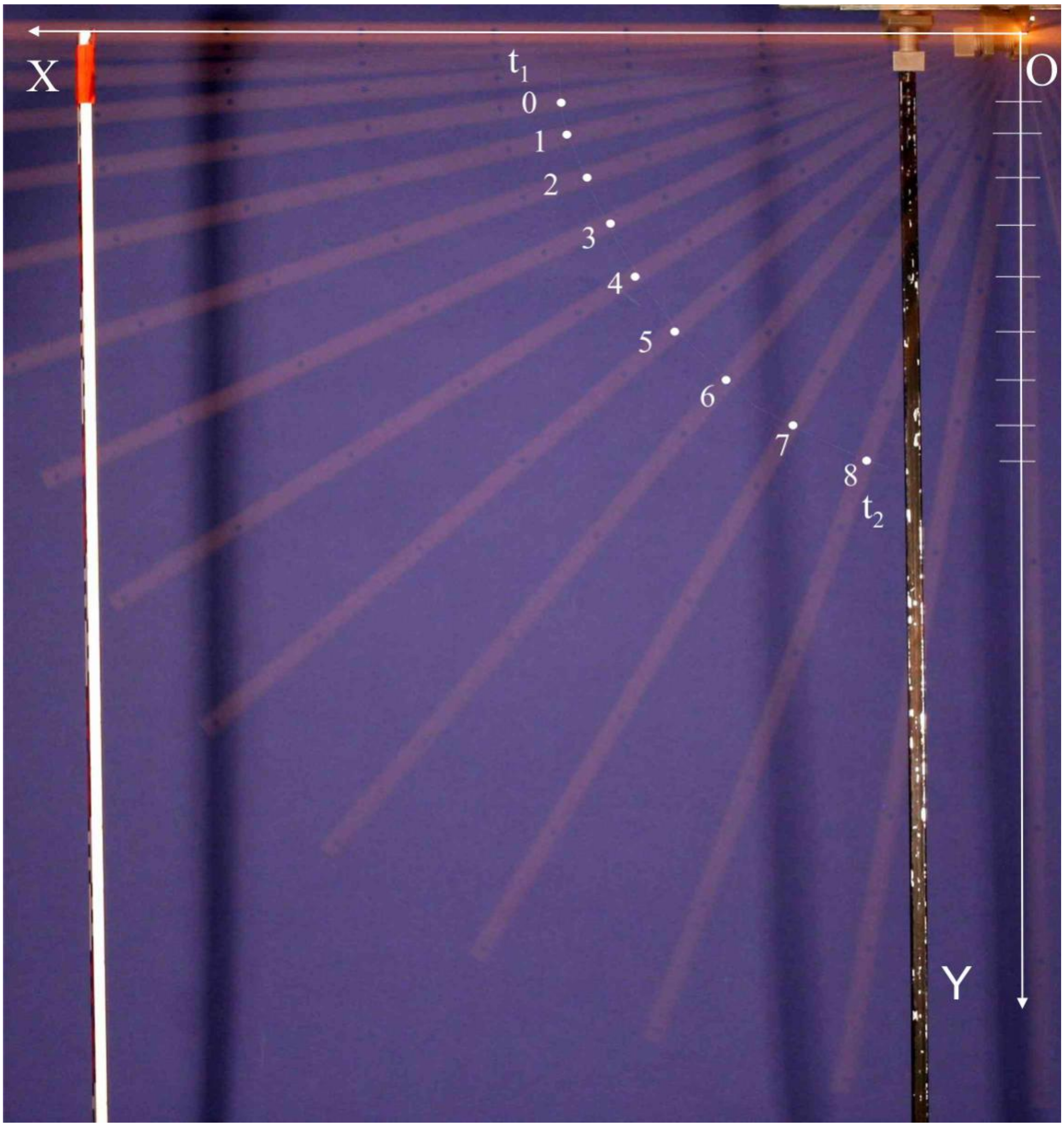
La distancia d del centro de masas al centro O_1 de suspensión vale 0,4488 m. Vaya a la fotografía 1 y compruebe este valor (puede encontrar un valor algo diferente debido a los inevitables errores al medir con la regla en la fotocopia) Mida en la fotografía 2 (o en la fotocopia) las ordenadas del centro de masas y coloque los valores en la tabla I.

Tabla I

Ordenada y en cm en fotocopia									
Ordenada y_{real} en metros									
Seno θ= = y_{real}/d									
$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}$									
θ en rad									

Represente θ en el eje de abscisas frente a $\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}$ en el de ordenadas. Calcule el área comprendida entre la curva y el eje de abscisas. Utilice un método aproximado, asimile cada dos puntos consecutivos a un trapecio y calcule el área. Sume todas las áreas parciales y tendrá el valor aproximado de Área de la formula (1).

Calcule el momento de inercia mediante la fórmula (1).
Determine el momento de inercia directamente con ayuda del teorema de Steiner.
Sugerimos que haga los trapecios más pequeños y determine el área con mayor precisión, Ahora es imprescindible utilizar una hoja de cálculo.



Fotografía 3
Esta foto es de la misma varilla que la fotografía 2, se ha variado el punto de suspensión desplazándolo al agujero O_2 señalado en la fotografía 1, esto es, la distancia d es ahora diferente del caso anterior.

2) Vaya a la fotografía 1 y determine la distancia entre el centro de masas y el nuevo centro de suspensión

d=

En la fotografía 3 (o en una fotocopia de ella) determine el factor de escala

$$f = \frac{\text{.......... cm reales}}{\text{..........cm en la fotocopia}}$$

Mida en la fotografía 3 (o en la fotocopia) las ordenadas del centro de masas y coloque los valores en la tabla II.

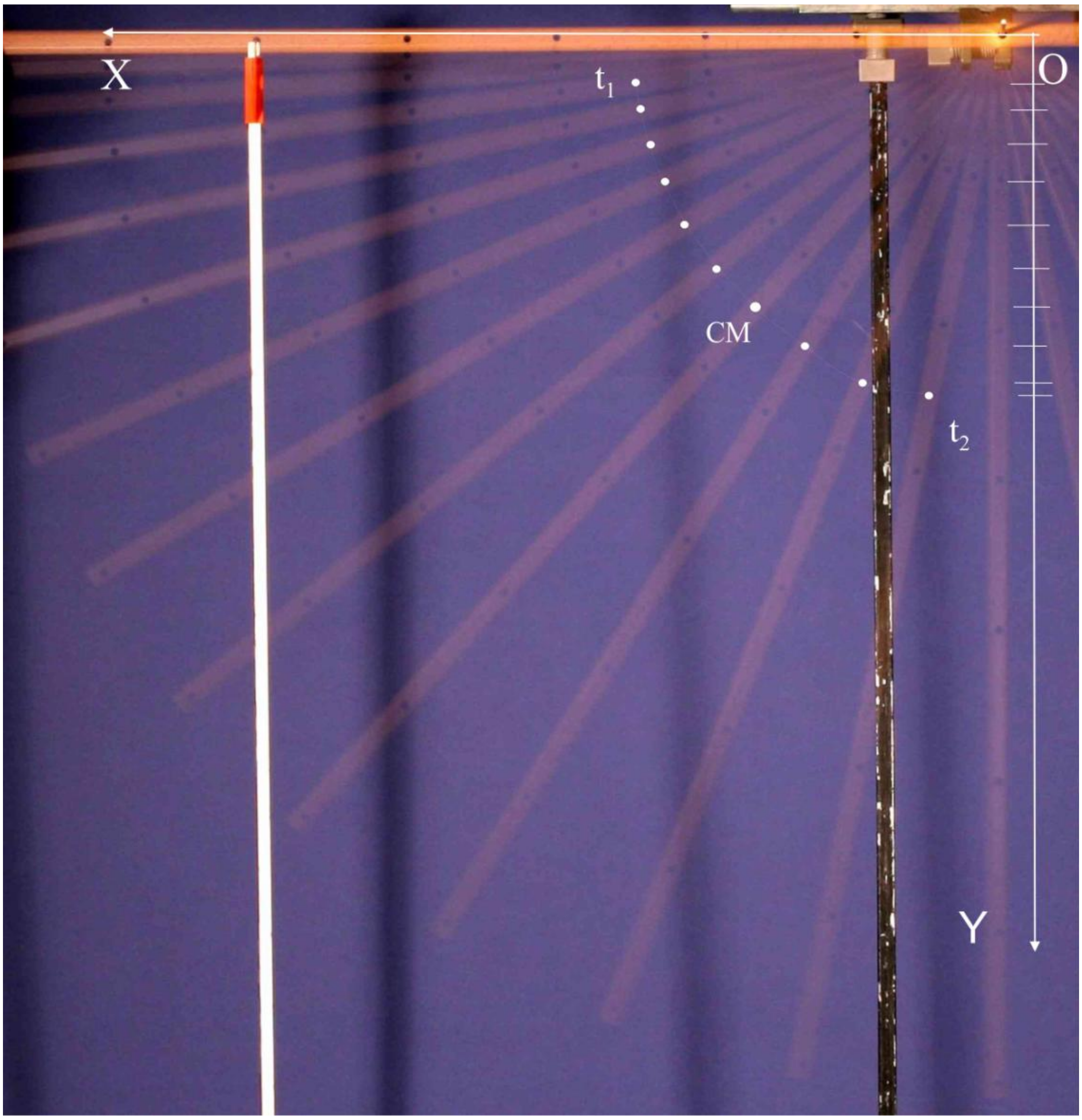
Tabla II

Ordenada y en cm en fotocopia									
Ordenada y_{real} en metros									
Seno θ= = y_{real}/d									
$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}$									
θ en rad									

Represente θ en el eje de abscisas frente a $\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}$ en el de ordenadas. Calcule el área comprendida entre la curva y el eje de abscisas. Utilice un método aproximado, asimile cada dos puntos consecutivos a un trapecio y calcule el área. Sume todas las áreas parciales y tendrá el valor aproximado de Área de la formula (1).

Calcule el momento de inercia mediante la fórmula (1).

Determine el momento de inercia directamente con ayuda del teorema de Steiner.



Fotografía 4

La varilla es la misma que en los casos anteriores, salvo que el punto de suspensión es O_3 de la fotografías 1

2) Vaya a la fotografía 1 y determine la distancia entre el centro de masas y el nuevo centro de suspensión;

d=

En la fotografía 4 (o en una fotocopia de ella) determine el factor de escala

$$f = \frac{\text{.......... cm reales}}{\text{..........cm en la fotocopia}}$$

Mida en la fotografía 4 (o en la fotocopia) las ordenadas del centro de masas y coloque los valores en la tabla III.

Tabla III

Ordenada y en cm en fotocopia									
Ordenada y_{real} en metros									
Seno θ= = y_{real}/d									
$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}$									
θ en rad									

Represente θ en el eje de abscisas frente a $\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}$ en el de ordenadas. Calcule el área comprendida entre la curva y el eje de abscisas. Utilice un método aproximado, asimile cada dos puntos consecutivos a un trapecio y calcule el área. Sume todas las áreas parciales y tendrá el valor aproximado de Área de la formula (1).
Calcule el momento de inercia mediante la fórmula (1).
Determine el momento de inercia directamente con ayuda del teorema de Steiner.