

Cuatro resistencias y un óhmetro

Solución

1) En un **primer experimento** los valores reales de las resistencias medidas con el óhmetro son:

$$R_1 = 102 \Omega ; R_2 = 562 \Omega ; R_3 = 275 \Omega ; R_4 = 995 \Omega$$

Estos valores se dan como informativos para el solucionarlo, pero son desconocidos por el alumno.

Las cuatro resistencias en serie medidas con el óhmetro

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 1929 \Omega$$

Este valor se le da al alumno

Las lecturas del óhmetro en los terminales AB, BC, CD y DA son

$$R_{AB} = 95 \Omega ; R_{BC} = 397 \Omega ; R_{CD} = 235 \Omega ; R_{DA} = 482 \Omega$$

Cuando el óhmetro se coloca entre las terminales AB, R_1 está en paralelo con la suma de $R_2 + R_3 + R_4 = 1929 - R_1$

$$\frac{1}{95} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{1929 - R_1} = \frac{1929}{1929R_1 + R_1^2}$$

$$R_1^2 - 1929R_1 + 1929 \cdot 95 = 0 \Rightarrow R_1 = \frac{1929 \pm \sqrt{1929^2 - 4 \cdot 1929 \cdot 95}}{2} \text{ soluciones}$$

$$R_1 = \frac{1929 + 1729}{2} = 1829 \Omega ; R_1 = \frac{1929 - 1729}{2} = 100 \Omega$$

Cuando el óhmetro se coloca entre las terminales BC, R_2 está en paralelo con la suma de $R_1 + R_3 + R_4 = 1929 - R_2$

$$R_2^2 - 1929R_2 + 1929 \cdot 397 = 0 \Rightarrow R_2 = \frac{1929 + 811}{2} = 1370 \Omega ; R_2 = \frac{1929 - 811}{2} = 559 \Omega$$

Comparando con los valores anteriores

$$1829 + 1370 > 1929 ; 1829 + 559 > 1929$$

Al ser la suma de las dos resistencias mayor que las cuatro en serie no es correcta la solución 1829Ω

La solución correcta $R_1 = 100 \Omega$

$$1370 + 100 < 1929 , 559 + 100 < 1929$$

Por ahora no podemos decidir cuál de las dos soluciones de R_2 es la correcta, puede ser 1370Ω o 559Ω , ya que la suma de ambas es menor que la resistencia de las cuatro en serie..

Cuando el óhmetro se coloca entre las terminales CD, R_3 está en paralelo con la suma de $R_1 + R_2 + R_4 = 1929 - R_3$

$$R_3^2 - 1929R_3 + 1929 \cdot 235 = 0 ; R_3 = \frac{1929+1381}{2} = 1655\Omega \quad ; \quad R_3 = \frac{1929-1381}{2} = 274 \Omega$$

Comparando con los valores anteriores

$$1655+1370 > 1929 \quad ; \quad 1655+599 > 1863 .$$

La solución 1655 no es correcta ; **es correcta $R_3=274 \Omega$**

Ahora comprobamos el valor correcto de R_2 a partir de $R_1=100 \Omega$ y $R_3=274 \Omega$

$$1370+100+274 < 1929 \quad ; \quad 559+100+274 < 1929$$

Por el momento no podemos deducir cuál es la solución de R_2 , ya que las dos soluciones de R_2 suman menos que 1929Ω .

Cuando el óhmetro se coloca entre las terminales DA, R_4 está en paralelo con la suma de $R_1+R_2+R_3=1929-R_4$

$$R_4^2 - 1929R_4 + 1929 \cdot 482 = 0 ; R_4 = \frac{1929 \pm \sqrt{1929^2 - 4 \cdot 1929 \cdot 482}}{2} = \frac{1929 \pm 44}{2}$$

Las dos soluciones son 987Ω y 943Ω .

Observe que si la lectura del óhmetro hubiese sido 483Ω , una diferencia de solamente un 0,2% entonces nos hubiese salido un número imaginario. La diferencia es mucho menor que el error del óhmetro

$$R_4^2 - 1929R_4 + 1929 \cdot 483 = 0 ; R_4 = \frac{1929 \pm \sqrt{1929^2 - 4 \cdot 1929 \cdot 483}}{2} = \frac{1929 \pm \sqrt{-5987}}{2}$$

. Tanto si salen soluciones reales como imaginarias debemos comprobar con las otras medidas.

Veamos con las otras medidas, sabemos que $R_1 = 100 \Omega$, $R_3=274 \Omega$, R_2 es 1370Ω o 559Ω y no sabemos el valor de R_4

La resistencia $R_{BD} = 474 \Omega$. Si nos fijamos en el circuito $R_1 = 100 \Omega$ y R_4 están serie y también están en serie R_2 y $R_3 = 274\Omega$ y ambos conjuntos en paralelo

$$\frac{1}{474} = \frac{1}{100+R_4} + \frac{1}{274+R_2} \quad (1)$$

La resistencia $R_{CA} = 434 \Omega$. Si nos fijamos en el circuito $R_1 = 100 \Omega$ y R_2 están serie y también están en serie $R_3 = 274 \Omega$ y R_4 y ambos conjuntos en paralelo

$$\frac{1}{434} = \frac{1}{100+R_2} + \frac{1}{274+R_4} \quad (2)$$

En lugar de intentar resolver el sistema de ecuaciones formado por (1) y (2) vamos a sustituir en (1) los dos posibles valores de R_2 , que son 1370Ω y 559Ω .

$$\begin{aligned} \frac{1}{474} &= \frac{1}{100+R_4} + \frac{1}{274+1370} \Rightarrow \frac{1}{100+R_4} = \frac{1}{474} - \frac{1}{1644} = \frac{1170}{1644 \cdot 474} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 100+R_4 = 666 \Rightarrow R_4 = 566 \Omega \end{aligned}$$

$$\frac{1}{474} = \frac{1}{100 + R_4} + \frac{1}{274 + 559} \Rightarrow \frac{1}{100 + R_4} = \frac{1}{474} - \frac{1}{833} = \frac{359}{833 \cdot 474} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 + R_4 = 1100 \quad R_4 = 1000 \Omega$$

La primera hipótesis da como valores $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 1370 \Omega$, $R_3 = 274 \Omega$ y $R_4 = 566 \Omega$

$$100 + 1370 + 274 + 566 > 1929$$

Esta solución no es válida

La segunda hipótesis da como valores $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 559 \Omega$, $R_3 = 274 \Omega$ y $R_4 = 1000 \Omega$

$$100 + 559 + 274 + 1000 = 1933 > 1929$$

Aunque la suma es ligeramente mayor entra dentro de los errores del aparato

Los valores son $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 559 \Omega$, $R_3 = 274 \Omega$ y $R_4 = 1000 \Omega$

Podemos hacer una comprobación en la ecuación (2) sustituyendo $R_4 = 1000 \Omega$ y calculando R_2 .

$$\frac{1}{434} = \frac{1}{100 + R_2} + \frac{1}{274 + 1000} \Rightarrow \frac{1}{100 + R_2} = \frac{1}{434} - \frac{1}{1274} = \frac{840}{1274 \cdot 434} \Rightarrow$$

$$100 + R_2 = 658 \Rightarrow R_2 = 558 \Omega$$

Veamos ahora los errores comparándolos con las medidas directas

Para R_1 $\frac{102 - 100}{102} \cdot 100 = 2\%$ Para R_2 $\frac{562 - 559}{562} \cdot 100 = 0,5\%$

Para R_3 $\frac{273 - 274}{273} \cdot 100 = 0,4\%$ Para R_4 $\frac{995 - 1000}{995} \cdot 100 = 0,5\%$

2) En un **segundo experimento** los valores nominales de las resistencias son

$$R_1 = 1,0 \Omega ; R_2 = 10 \Omega ; R_3 = 5 \Omega ; R_4 = 2 \Omega$$

Los valores reales de las resistencias anteriores medidas con el óhmetro

$$R_1 = 1,0 \Omega ; R_2 = 10,6 \Omega ; R_3 = 5,2 \Omega ; R_4 = 1,5 \Omega$$

Estos valores se dan a título informativo pero deben ser desconocidos por el alumno cuando realice el experimento.

La suma de las cuatro resistencias en serie medidas con el óhmetro

$$R + R_2 + R_3 + R_4 = 18,3 \Omega$$

Este dato debe suministrarse al alumno.

Óhmetro colocado entre los terminales A y B $R_{AB} = 1,0 \Omega$

Óhmetro colocado entre los terminales B y C $R_{BC} = 4,4 \Omega$

Óhmetro colocado entre los terminales C y D $R_{CD} = 3,9 \Omega$

Óhmetro colocado entre los terminales D y A $R_{DA} = 1,4 \Omega$

Planteamiento de las ecuaciones

$$\text{Terminales A y B} \quad \frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{R_1(R_2 + R_3 + R_4)} \Rightarrow R_{AB} = \frac{R_1(R_2 + R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

Según el dato suministrado $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 18,3$; $R_2 + R_3 + R_4 = 18,3 - R_1$

$$R_{AB} = \frac{R_1(18,3 - R_1)}{18,3} = 1 \Rightarrow R_1^2 - 18,3R_1 + 18,3 = 0 \Rightarrow R_1 = \frac{18,3 \pm \sqrt{18,3^2 - 4 \cdot 18,3}}{2}$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{18,3 + 16,2}{2} = 17,3 \Omega \quad ; \quad R_1 = \frac{18,3 - 16,2}{2} = 1,05 \Omega$$

Terminales B y C

$$\text{Por analogía con el resultado anterior} \quad R_{BC} = \frac{R_2(R_1 + R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{R_2(18,3 - R_2)}{18,3} = 4,4$$

$$R_2^2 - 18,3R_2 + 18,3 \cdot 4,4 = 0 \Rightarrow R_2 = \frac{18,3 \pm \sqrt{18,3^2 - 4 \cdot 4,4 \cdot 18,3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{18,3 + 3,58}{2} = 10,9 \Omega \quad ; \quad R_2 = \frac{18,3 - 3,58}{2} = 7,4 \Omega$$

Comparamos estos resultados con los anteriores

$$17,3 + 10,9 > 18,3 \quad ; \quad 17,3 + 7,4 > 18,3 \quad \text{la solución } R_1 = 17,3 \text{ no es correcta, luego}$$

La correcta es $R_1 = 1,05 \Omega$

$$1,05 + 10,9 < 18,3 \quad ; \quad 1,05 + 7,4 < 18,3$$

Por ahora no podemos decidir cuál de las dos soluciones de R_2 es la correcta.

Terminales C y D

$$R_{CD} = \frac{R_3(R_1 + R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{R_3(18,3 - R_3)}{18,3} = 3,9 \Rightarrow R_3^2 - 18,3R_3 + 18,3 \cdot 3,9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_3 = \frac{18,3 \pm \sqrt{18,3^2 - 4 \cdot 3,9 \cdot 18,3}}{2} \Rightarrow R_3 = \frac{18,3 + 7,0}{2} = 12,7 \Omega; R_3 = \frac{18,3 - 7,0}{2} = 5,7 \Omega$$

Comparando con los valores anteriores

$$10,9 + 12,7 > 18,3 \quad 7,4 + 12,7 > 18,3 \quad \text{La solución } R_3 = 12,7 \text{ es incorrecta.}$$

La correcta es $R_3 = 5,7 \Omega$

$$1,05 + 10,9 + 5,7 < 18,3 \quad ; \quad 1,05 + 7,4 + 5,7 < 18,3$$

Todavía no podemos decidir qué solución es la correcta para R_2 .

Terminales D y A

$$R_{DA} = \frac{R_4(R_1 + R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{R_4(18,3 - R_4)}{18,3} = 1,4 \Rightarrow R_4^2 - 18,3R_4 + 18,3 \cdot 1,4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_4 = \frac{18,3 \pm \sqrt{18,3^2 - 4 \cdot 1,4 \cdot 18,3}}{2} \Rightarrow R_4 = \frac{18,3 + 15,2}{2} = 16,8 \Omega; R_4 = \frac{18,3 - 15,2}{2} = 1,6 \Omega$$

Comparando con los valores anteriores

$$1,05 + 10,9 + 5,7 + 16,8 = 34,5 > 18,3 \quad 1,05 + 10,9 + 5,7 + 1,6 = 19,3 > 18,3$$

$$1,05 + 7,4 + 5,7 + 16,8 = 30,9 > 18,3 \quad 1,05 + 7,4 + 5,7 + 1,6 = 15,8 < 18,3$$

Del resultado anterior se observa que si $R_2 = 10,9 \Omega$ la diferencia en % del valor dado es

$$\frac{19,3 - 18,3}{18,3} \cdot 100 = 5,5 \%$$

Si $R_2 = 7,4 \Omega$ la diferencia en % respecto del valor dado es:

$$\frac{15,8 - 18,3}{18,3} \cdot 100 = |13,7| \%$$

A la vista de estas diferencias parece más probable que el resultado sea

$$R_1 = 1,1 \Omega \quad R_2 = 10,9 \Omega \quad ; \quad R_3 = 5,7 \Omega \quad ; \quad R_4 = 1,6 \Omega$$

Utilizamos las otras medidas para ver qué resultado se confirma

Óhmetro colocado en las terminales B y D. $R_{BD} = 1,9 \Omega$

En este caso las resistencias R_2 y R_3 están en serie y también las resistencias R_1 y R_4 , a su vez estos conjuntos están en paralelo

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{10,9+5,7} + \frac{1}{1,1+1,6} \Rightarrow R' = \frac{16,6 \cdot 2,7}{16,6+2,7} = 2,3 \Omega$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{7,4+5,7} + \frac{1}{1,1+1,6} \Rightarrow R' = \frac{13,1 \cdot 2,7}{13,1+2,7} = 2,2 \Omega$$

Según este resultado no es posible confirmar el valor de R_2 .

Óhmetro colocado en las terminales C y A $R_{CA} = 4,4 \Omega$

En este caso las resistencias R_1 y R_2 están en serie y también las resistencias R_3 y R_4 ,

a su vez estos conjuntos están en paralelo

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{1,1+10,9} + \frac{1}{5,7+1,6} \Rightarrow R' = \frac{12 \cdot 7,3}{12+7,3} = 4,5 \Omega$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{1,1+7,4} + \frac{1}{5,7+1,6} \Rightarrow R' = \frac{8,5 \cdot 7,3}{8,5+7,3} = 3,9 \Omega$$

A la vista de este resultado y el anterior el resultado final es:

$$R_1 = 1,05 \Omega \quad R_2 = 10,9 \Omega ; \quad R_3 = 5,7 \Omega \quad ; \quad R_4 = 1,6 \Omega$$

Veamos ahora los errores comparándolos con las medidas directas

$$\text{Para } R_1 \quad \frac{1,0 - 1,05}{1,0} \cdot 100 = 5\% \quad \text{Para } R_2 \quad \frac{10,6 - 10,9}{10,6} \cdot 100 = 2,8\%$$

$$\text{Para } R_3 \quad \frac{5,3 - 5,7}{5,3} \cdot 100 = 7,5\% \quad \text{Para } R_4 \quad \frac{1,5 - 1,6}{1,5} \cdot 100 = 6,6\%$$

De cara a plantear el experimento a los alumnos parece mejor hacerlo con resistencias parecidas a las del experimento 1. También es aconsejable que todas las medidas se hagan en la misma escala del óhmetro.