# PROBLEMAS DE LAS OLIMPIADAS INTERNACIONALES DE FÍSICA



**José Luis Hernández Pérez**

**Agustín Lozano Pradillo**

Madrid 2008

## XXVI OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. AUSTRALIA. 1995

### 1.-DESPLAZAMIENTO GRAVITACIONAL AL ROJO Y MEDIDA DE MASAS ESTELARES.

***a) Un fotón de frecuencia f posee una masa inercial efectiva m determinada por su energía. Suponer que posee una masa gravitacional igual a su masa inercial. De acuerdo con esto, un fotón emitido en la superficie de una estrella perderá energía cuando escapa del campo gravitacional de la estrella. Mostrar que el desplazamiento de la frecuencia $\Delta f$ del fotón cuando escapa desde la superficie de la estrella hasta el infinito está dado por:***

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{GM}{Rc^2}$$

***para $\Delta f \ll f$.***
***G= constante gravitacional; R=radio de la estrella; c= velocidad de la luz***
***M= masa de la estrella***
***Así si se conoce el desplazamiento hacia el rojo de una línea espectral medida muy lejos de la estrella se puede utilizar este dato para saber la razón M/R. El conocimiento de R permite calcular la masa M de la estrella.***

***b) Una nave espacial no tripulada se utiliza en un experimento para medir la masa M y el radio R de una estrella de nuestra galaxia. El ión $He^+$ emite fotones en a superficie de la estrella. Estos fotones pueden ser controlados mediante absorción resonante con iones $He^+$ contenidos en una cámara de pruebas situad en la nave. La absorción resonante ocurre solamente si la velocidad de los iones hacia la estrella permiten exactamente el desplazamiento hacia el rojo.***
***A medida que la nave espacial se aproxima radialmente a la estrella, la velocidad relativa $v=\beta c$ de los iones $He^+$ en absorción resonante se mide en función de la distancia d (muy próxima) a la superficie de la estrella..Los datos experimentales están recogidos en la tabla. Utilizar todos los datos de la tabla para determinar gráficamente la masa M y el radio R de la estrella.***
***Datos para la condición de resonancia***

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Parámetro de velocidad* | $\beta = v/c (\times 10^{-5}$ | *3,352* | *3,279* | *3,195* | *3,077* | *2,955* |
| *Distancia desde la superficie de la estrella* | $d (\times 10^{8}$ m) | *38,90* | *19,98* | *13,32* | *8,99* | *6,67* |

***c) Cuando se determina R y M en un experimento, es normal considerar la corrección de frecuencias debido al retroceso del átomo emisor***
***c1.-Suponer que el átomo emisor está en reposo, produce un fotón y retrocede. Obtener la expresión relativista para la energía hf en función de $\Delta E$ (diferencia de energías entre los dos niveles del átomo) y de la masa en reposo $m_o$ del átomo.***
***C2.- Estimar el valor numérico del desplazamiento relativista $\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_{retroceso}$ para los iones $He^+$. La respuesta debe ser un valor mucho más pequeño que el desplazamiento gravitacional obtenido en b.***

***Datos***
***Velocidad dela luz,c = $3{,}0.10^8$ m/s***

***Energía en reposo del helio = $m_o c^2$=4*938 MeV***
***Energía de Bohr = $-\frac{13{,}6\,Z^2}{n^2}eV$***
***Constante de gravitación G=$6{,}7.10^{-11}$ N $m^2\,kg^{-2}$***

a) Igualamos las expresiones

$$mc^2 = hf \Rightarrow m = \frac{hf}{c^2}$$

En la superficie de la estrella la energía es la suma de la del fotón más su energía potencial y en el infinito la energía potencial es cero.

$$hf_i - G\frac{Mm}{R} = hf_f - 0 \Rightarrow hf_f - hf_i = -G\frac{M\frac{hf_i}{c^2}}{R} \Rightarrow \frac{f_f - f_i}{f_i} = \frac{\Delta f}{f_i} = -\frac{GM}{Rc^2}$$

b) Aplicamos el principio de conservación de la energía para el fotón en la superficie de la estrella y en la nave cuando ésta dista d de la superficie de la estrella.

$$hf_i - G\frac{Mm}{R} = hf_f - G\frac{Mm}{R+d} \Rightarrow hf_i - G\frac{M\frac{hf_i}{c^2}}{R} = hf_f - G\frac{M\frac{hf_f}{c^2}}{R+d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_i\left(1-\frac{GM}{Rc^2}\right) = f_f\left(1-\frac{GM}{(R+d)c^2}\right) \Rightarrow \frac{f_f}{f_i} = \frac{\left(1-\frac{GM}{Rc^2}\right)}{\left(1-\frac{GM}{(R+d)c^2}\right)}$$

La frecuencia $f_f>f_i$ , esto es como si ocurriese un efecto Doppler

$$f_f = f_i\left(1-\frac{v}{c}\right) = f_i(1-\beta) \Rightarrow \frac{f_f}{f_i} = 1-\beta = \frac{1-\dfrac{GM}{Rc^2}}{1-\dfrac{GM}{(R+d)c^2}} = \frac{\dfrac{Rc^2-GM}{Rc^2}}{\dfrac{(R+d)c^2-GM}{(R+d)c^2}} \Rightarrow$$

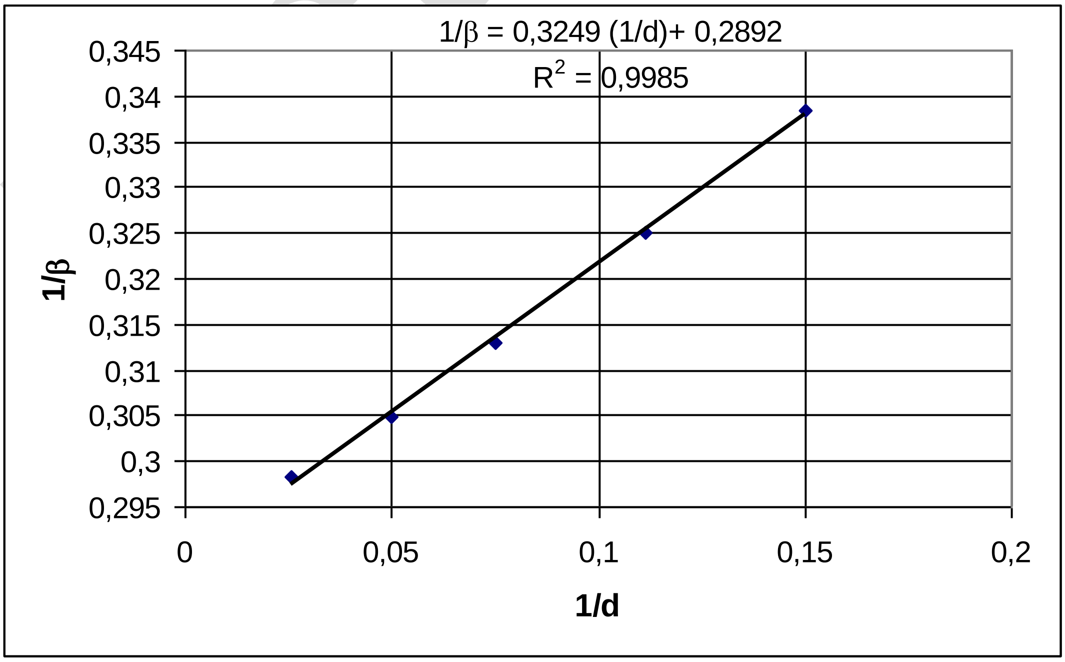
$$\Rightarrow \quad \beta = 1-\frac{\dfrac{Rc^2-GM}{R}}{\dfrac{(R+d)c^2-GM}{(R+d)}} = 1-\frac{(R+d)(Rc^2-GM)}{R((R+d)c^2-GM)} =$$

$$\beta = \frac{R((R+d)c^2-GM)-(R+d)(Rc^2-GM)}{R((R+d)c^2-GM)} = \frac{-RGM+RGM+dGM}{R((R+d)c^2-GM)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta} = \frac{R((R+d)c^2-GM)}{dGM} = \frac{R(R+d)c^2}{dGM} - \frac{1}{d} = \frac{1}{d}\left[\frac{R(R+d)c^2}{GM}-1\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{d}\left(\frac{R^2c^2+Rdc^2-GM}{GM}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\beta} = \frac{R^2c^2-GM}{GM}\cdot\frac{1}{d}+\frac{Rc^2}{GM} \qquad (1)$$

La ecuación (1) nos dice que al representar $1/\beta$ en el eje de ordenadas frente a $1/d$ en el de abscisas se obtiene una línea recta de pendiente $\dfrac{R^2c^2}{GM}-1$ y ordenada en el origen $\dfrac{Rc^2}{GM}$.



La pendiente es $0{,}3248.\frac{10^5}{10^{-8}} = 3{,}248.10^{12}$ y la ordenada en el origen $0{,}2892.10^5$, por tanto:

$$\frac{R^2c^2}{GM} - 1 = 3{,}248.10^{12} \quad ; \quad \frac{Rc^2}{GM} = 0{,}2892.10^5 \Rightarrow R \cdot 0{,}2893.10^5 = 3{,}248.10^{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = 1{,}12.10^8\ \mathrm{m} \Rightarrow M = \frac{R\,c^2}{G \cdot 0{,}2892.10^5} = \frac{1{,}12.10^8 \cdot \left(3{,}0.10^8\right)^2}{6{,}7.10^{-11} \cdot 0{,}2892.10^5} = 5{,}2.10^{30}\ \mathrm{kg}$$

c1) Designamos con M a la masa del átomo después de emitir el fotón. En el proceso se debe conservar la energía y la cantidad de movimiento. Utilizamos la relación relativista $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$

$$m_o c^2 = \sqrt{M^2c^4 + p^2c^2} + hf \quad ; \quad p = \frac{hf}{c} \Rightarrow$$

$$\left(m_o c^2 - h\,f\right)^2 = M^2c^4 + h^2f^2 \Rightarrow m_o^2\,c^4 + h^2f - 2m_o h\,f\,c^2 = M^2c^4 + h^2f^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h\,f = \frac{m_o^2c^2 - M^2c^2}{2\,m_o} \quad (2)$$

La variación de energía en el proceso es:

$\Delta E = \left(m_o - M\right)c^2 \quad \Rightarrow \quad M = m_o - \frac{\Delta E}{c^2}$. Llevando este resultado a la ecuación (2).

$$hf = \frac{m_o^2c^2 - \left(m_o - \frac{\Delta E}{c^2}\right)c^2}{2m_o} = \frac{m_o^2c^2 - m_o^2c^2 - \frac{\Delta E^2}{c^2} + 2m_o\Delta E}{2m_o} = \Delta E - \frac{\Delta E^2}{2m_o c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow hf = \Delta E\left(1 - \frac{\Delta E}{2\,m_o c^2}\right) \ (3)$$

c2) La aparición del fotón se debe a que en el átomo un electrón que está en el nivel n=2 salta al nivel n=1 emitiendo la diferencia de energía en un fotón. Utilizando el dato del problema

$$\Delta E = --13{,}6 \cdot 2^2\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right) = 40{,}8\,\mathrm{eV}$$

De la ecuación (3)

$$f = \frac{\Delta E}{h}\left(1 - \frac{\Delta E}{2 m_o c^2}\right)$$

Siendo la f frecuencia considerando el retroceso del átomo. Si no consideramos el retroceso del átomo entonces $\Delta E = hf_o$

$$f = f_o\left(1 - \frac{\Delta E}{2 m_o c^2}\right) \Rightarrow \frac{f}{f_o} - 1 = -\frac{\Delta E}{2 m_o c^2} \Rightarrow \frac{f_o - f}{f_o} = \frac{\Delta f}{f_o} = \frac{\Delta E}{2 m_o c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta f}{f_o} = \frac{40{,}8\,\text{eV}}{2 \cdot 4 \cdot 938\,\text{MeV}} = \frac{40{,}8}{7{,}50.10^{9}} = 5{,}4.10^{-9}$$

El desplazamiento gravitacional es:

$$\frac{GM}{R c^2} = \frac{6{,}7.10^{-11} \cdot 5{,}2.10^{30}}{1{,}12.10^{8} \cdot \left(3{,}0.10^{8}\right)^2} = 3{,}5.10^{-5}$$

El desplazamiento gravitacional es $1{,}5.10^{4}$ veces superior.

## **2.** PROPAGACIÓN DEL SONIDO

***La velocidad de propagación del sonido en el océano depende de la profundidad, temperatura y salinidad. La figura 1(a) indica cómo varía la velocidad del sonido con la profundidad z , para un caso en el que la mínima velocidad se sitúa a mitad de la distancia entre la superficie del océano y el lecho marino. En la gráfica se ha convenido que z=0 en el lugar de mínima velocidad, $z=z_s$ en la superficie del océano y z=-zb en el fondo. La velocidad por encima de z=0 vale $c=c_o+bz$ y por debajo de z=0, $c=c_o-bz$ , b es el gradiente de la velocidad del sonido con la profundidad y es constante.***

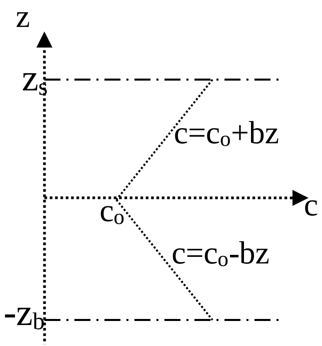


Fig.1(a)

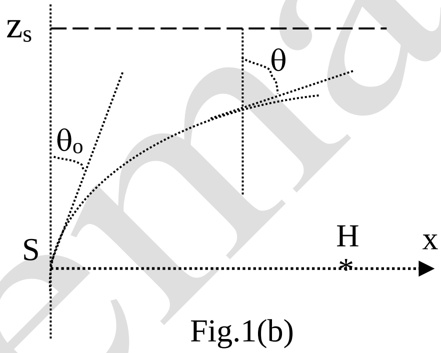


Fig.1(b)

***La figura 1(b) muestra una sección del plano zx del océano, siendo x una dirección horizontal, En la posición z=0 y x=0 se coloca una fuente sonora S. Un rayo sonoro emitido por la fuente forma un ángulo $\theta_o$ como indica la figura, dicho rayo se refracta debido a que la velocidad del sonido depende de la profundidad***

***a) Mostrar que el rayo emitido por la fuente y obligado a desplazarse por el plano z-x forma un arco de círculo de radio***

$$R = \frac{c_o}{b\,sen\theta_o} \quad para\ \ 0 \le \theta_o \le \frac{\pi}{2}$$

***b) Obtenga una expresión en la que figuren $z_s$, , $c_o$ y b que nos dé el valor más pequeño del ángulo $\theta_o$ , para que los rayos dirigidos hacia arriba puedan transmitirse sin que la onda sonora sufra reflexión en la superficie.***

***c) En la figura 1(b), H es un receptor del sonido que ocupa la posición z=0 , x=X. Obtenga una expresión en la que intervengan b, X y $c_o$ , la cual nos indique los ángulos $\theta_o$ para los que la onda sonora partiendo de S puedan alcanzar al receptor H. Se supone que $Z_s$ y $Z_b$ son lo***

***suficientemente grandes para que no pueda haber reflexión ni en la superficie ni en el fondo del océano.***

***d) Calcular los cuatro valores más pequeños de $\theta_o$ que por refracción salgan de S y alcancen al receptor, cuando X= 10000 m ; $c_o$ = 1500 m/s y b= 0,02000 $s^{-1}$***

***e) Obtenga una expresión que nos dé el tiempo que emplea el sonido desde S a H siguiendo la trayectoria que se corresponde al valor más pequeño de $\theta_o$ que se determinó en el apartado c). Calcule el valor numérico de ese tiempo con los datos aportados en el apartado d).***
***Calcule el tiempo que emplea la onda sonora en viajar de S a H en línea recta .¿Cuál de los dos rayos llega a H primero?***
***Ayuda*** $\int \frac{dx}{sen\, x} = ln\left[tag\left(\frac{x}{2}\right)\right]$.

La figura 2 se corresponde a la figura 1(b) del enunciado a la que se ha añadido el radio R del arco de circunferencia. Las coordenadas del centro de la circunferencia se designan con (m,n).

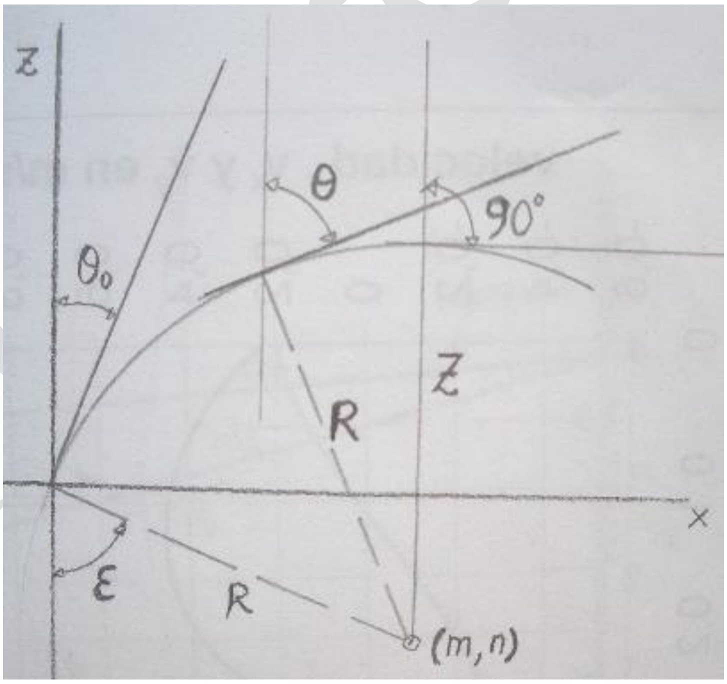
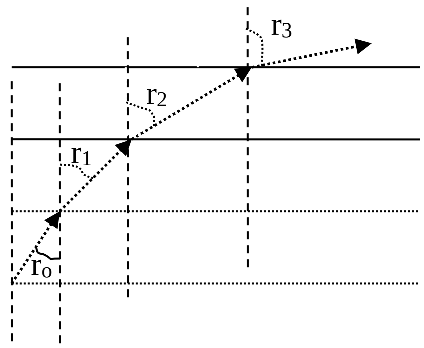



Fig.2

a) Vamos a buscar cuál es la relación entre los ángulos θ y $\theta_o$. Supongamos que el medio material en lugar de que varíe la velocidad del sonido de forma continua lo hace por capas como indica la figura 3.




Las velocidades del sonido en cada capa son $v_o$, $v_1$,$v_2$,$v_3$ ….Aplicamos la ley de Snell entre las capas

$$\frac{\text{sen}\, r_o}{\text{sen}\, r_1}=\frac{v_o}{v_1}\ ;\ \frac{\text{sen}\, r_1}{\text{sen}\, r_2}=\frac{v_1}{v_2}\ ;\ \frac{\text{sen}\, r_2}{\text{sen}\, r_3}=\frac{v_2}{v_3}\qquad \Rightarrow \frac{\text{sen}\, r_o\,\frac{v_1}{v_o}}{\text{sen}\, r_2}=\frac{v_1}{v_2}\Rightarrow \frac{\text{sen}\, r_o}{\text{sen}\, r_2}=\frac{v_o}{v_2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}\, r_o\,\frac{v_2}{v_o}}{\text{sen}\, r_3}=\frac{v_2}{v_3}\Rightarrow \frac{\text{sen}\, r_o}{\text{sen}\, r_3}=\frac{v_o}{v_3}$$

Si lo aplicamos al medio continuo indicado en la figura 2, resulta:

$$\frac{\text{sen}\ \theta_o}{\text{sen}\,\theta}=\frac{c_o}{c}\ \Rightarrow\ \text{sen}\,\theta=\text{sen}\ \theta_o\frac{c}{c_o}=\text{sen}\ \theta_o\frac{c_o+bz}{c_o}$$

Aplicamos la ecuación anterior cuando θ=90º (ver figura 2).

$$\text{sen}\,90^o=\text{sen}\,\theta_o\frac{c_o+bZ}{c_o}\ \Rightarrow\ \frac{c_o}{\text{sen}\,\theta_o}=c_o+bZ\ \Rightarrow\qquad Z=\frac{c_0\left(\frac{1}{\text{sen}\,\theta_o}-1\right)}{b}$$

De la figura 2 se deduce:

$$Z+n=R\ ;\ \ \cos\varepsilon=\text{sen}\theta_o=\frac{n}{R}\quad\Rightarrow\quad Z+R\,\text{sen}\,\theta_o=R\ \Rightarrow$$

$$\frac{c_o\left(\frac{1-\text{sen}\,\theta_o}{\text{sen}\,\theta_o}\right)}{b}+R\,\text{sen}\,\theta_o=R\qquad\Rightarrow\frac{c_0(1-\text{sen}\,\theta_o)}{b\ \text{sen}\,\theta_o}=R(1-\text{sen}\,\theta_o)\qquad\Rightarrow$$

$$R=\frac{c_o}{b\ \text{sen}\,\theta_o}$$

La anterior deducción se ha hecho entre los valores $0\le\theta_o\le\frac{\pi}{2}$.

b) El límite te viene dado por $Z=Z_S$, de la ecuación (1)

$$Z_S = \frac{c_o\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta_o} - 1\right)}{b} \Rightarrow Z_S\, b = c_o\left(\frac{1-\operatorname{sen}\theta_o}{\operatorname{sen}\theta_o}\right) \Rightarrow \frac{Z_S\, b}{c_o}\operatorname{sen}\theta_o + \operatorname{sen}\theta_o = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta_o = \frac{1}{1+\frac{Z_S\, b}{c_o}} = \frac{c_o}{c_o + Z_S\, b} \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = \text{arco seno}\,\frac{c_o}{c_o + Z_S\, b}$$

c) La onda sonora puede llegar al receptor H de la forma que indica la figura 3.

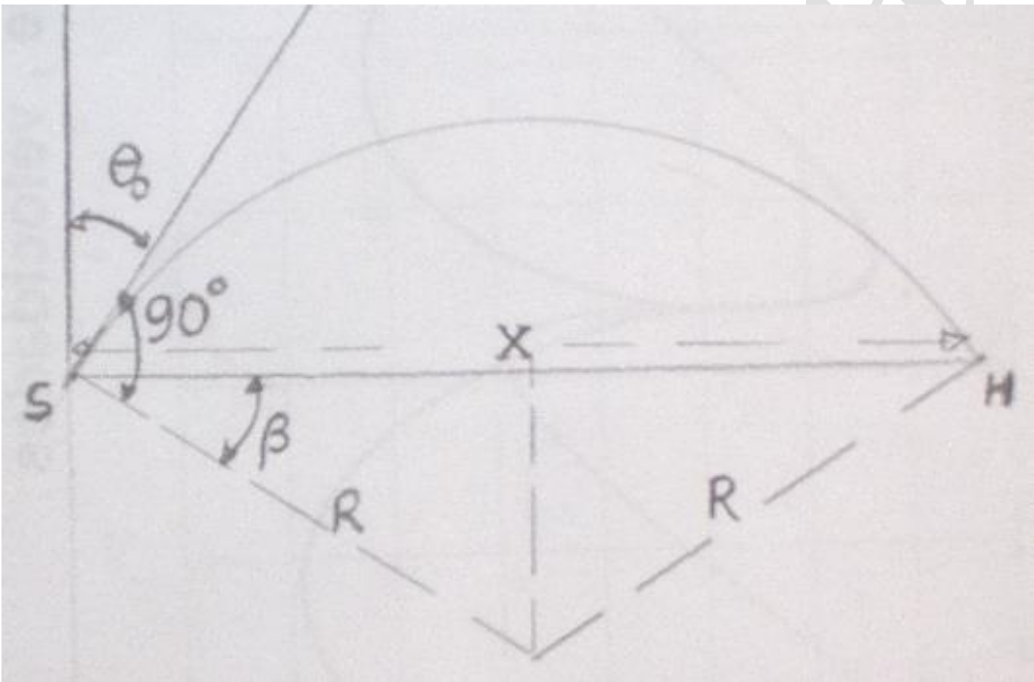



Fig.3

Si fijamos la distancia X entre el emisor S y el receptor H, hemos de buscar para qué ángulo $\theta_o$ la onda sonora puede llegar al citado receptor.
De la figura 3 se deduce que el ángulo $\beta$ es igual a $\theta_o$ ya que sus lados son perpendiculares entre sí.

$$\frac{X}{2} = R\cos\beta = R\cos\theta_o \Rightarrow \frac{X}{2} = \frac{c_o}{b\operatorname{sen}\theta_o}\cdot\cos\theta_o \Rightarrow \quad \operatorname{tag}\theta_o = \frac{2c_o}{bX}$$

La onda sonora también puede llegar al receptor siguiendo el camino indicado en la figura 4.

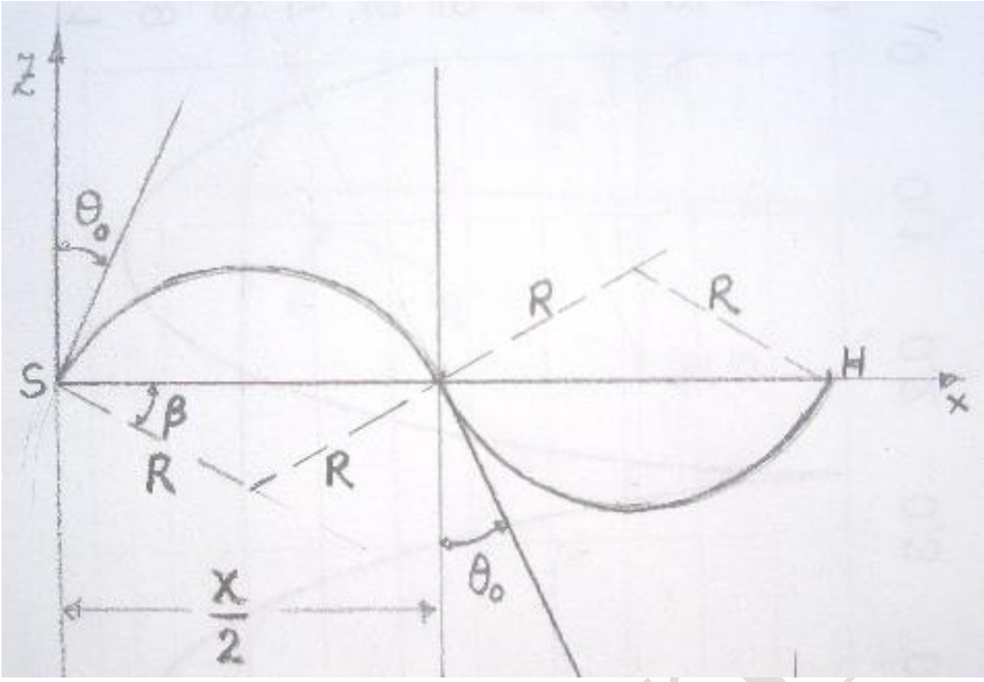



Fig.4

Los radios de las trayectorias son iguales por encima de SH que por debajo, pues tal como se dedujo en el apartado a), el radio es independiente de la velocidad.

$$\frac{X}{4} = R\cos\beta = R\cos\theta_o \Rightarrow X = 4R\cos\theta_o = 4\cdot\frac{c_o}{b\,\mathrm{sen}\,\theta_o}\cos\theta_o \Rightarrow \quad \mathrm{tag}\,\theta_o = \frac{4c_0}{bX}$$

Las siguientes posibilidades es que hubiesen tres, cuatro …. arcos , en lugar de dos , y el valor general de de tag $\theta_o$ sería

$$\mathrm{tag}\,\theta_o = \frac{2nc_o}{bX}; n = 1,2,3...$$

F
inalmente queda el camino directo por el eje x entre S y H.

d)

$$\mathrm{tag}\,\theta_o = \frac{2nc_o}{bX} \Rightarrow \mathrm{tag}\,\theta_0 = \frac{2c_o}{bX} = \frac{2\cdot 1500}{0{,}02000\cdot 10000} = 15 \Rightarrow \theta_0 = 86{,}19^o$$

$$\mathrm{tag}\,\theta_0 = \frac{2c_o}{bX} = \frac{4\cdot 1500}{0{,}02000\cdot 10000} = 30 \Rightarrow \theta_0 = 88{,}09^o$$

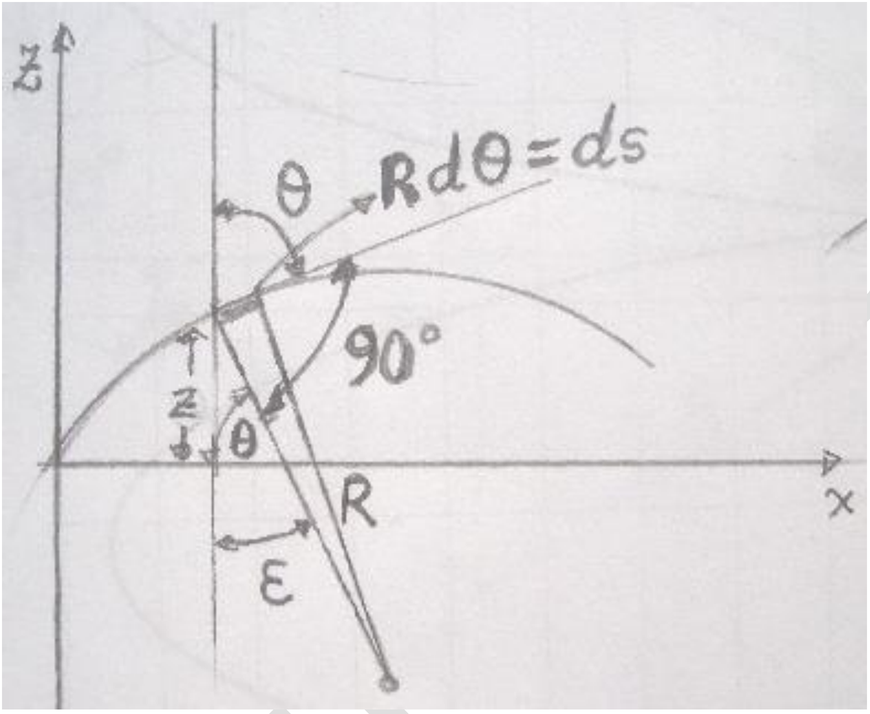
$$\mathrm{tag}\,\theta_0 = \frac{2c_o}{bX} = \frac{6\cdot 1500}{0{,}02000\cdot 10000} = 45 \Rightarrow \theta_0 = 88{,}73^o$$

$$\mathrm{tag}\,\theta_0 = \frac{2c_o}{bX} = \frac{8\cdot 1500}{0{,}02000\cdot 10000} = 60 \Rightarrow \theta_0 = 89{,}05^o$$

e) El tiempo para desplazarse un elemento de camino ds vale

$$dt = \frac{ds}{c}$$

Siendo ds un elemento del arco de circunferencia al cual le corresponde una velocidad $c=c_o+bz$.




Fig,5

En la figura 5 se ha escogido, dentro del arco de radio R, un elemento de arco ds=Rdθ. .El tiempo que emplea la onda desde $\theta_o$ a $\frac{\pi}{2}$ es:

$$\int dt = \tau = \int_{\theta_o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R\,d\theta}{c}$$

Anteriormente hemos visto que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_o}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{c_o}{c} \text{ y } R = \frac{c_0}{b\operatorname{sen}\theta_o} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{c_0}{b\dfrac{c_o\operatorname{sen}\theta}{c}} = \frac{c}{b\operatorname{sen}\theta}$$

Llevando el valor de R a la integral

$$\int dt = \tau = \int_{\theta_o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{c}{b\,\text{sen}\,\theta}\,d\theta}{c} = \int_{\theta_o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{b\,\text{sen}\theta} = \frac{1}{b}\ln\left[\text{tag}\,\frac{\theta}{2}\right]_{\theta_o}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{b}\ln\left(\text{tag}\,\frac{\pi}{4} - \text{tag}\,\frac{\theta_o}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\tau = -\frac{1}{b}\ln\left(\text{tag}\,\frac{\theta_o}{2}\right)$$

El tiempo total desde S a H es:

$$t_{total} = 2\,\tau = -\frac{2}{b}\ln\left(\text{tag}\,\frac{\theta_o}{2}\right)$$

Aplicando la ecuación anterior para $\theta_o = 86{,}19^o$

$$t_{total} = 2\,\tau = -\frac{2}{0{,}02000}\ln\left(\text{tag}\,\frac{86{,}19^o}{2}\right) = 6{,}655\,\text{s}$$

La onda que se desplaza de S a H por el eje x viaja a una velocidad $c_o$, yel tiempo empleado en el viaje es:

$$t = \frac{SH}{c_o} = \frac{10\,000}{1500} = 6{,}667\,\text{s}$$

Llega primero la onda que describe un arco de circunferencia.

## **3.**BOYA CILÍNDRICA

***Una boya consiste en un cilindro de radio a y longitud l, confeccionado con un material de densidad ligera d, el cual lleva adosado una quilla por la parte inferior media del cilindro a lo largo de su longitud. La quilla vista de frente parece una barra tal como se ve en la figura 1. La masa de la quilla es igual a la masa del cilindro, la altura de la quilla es igual al diámetro del cilindro y su densidad es mayor que la del agua de mar. La boya flota en el agua de mar cuya densidad es $\rho$.***

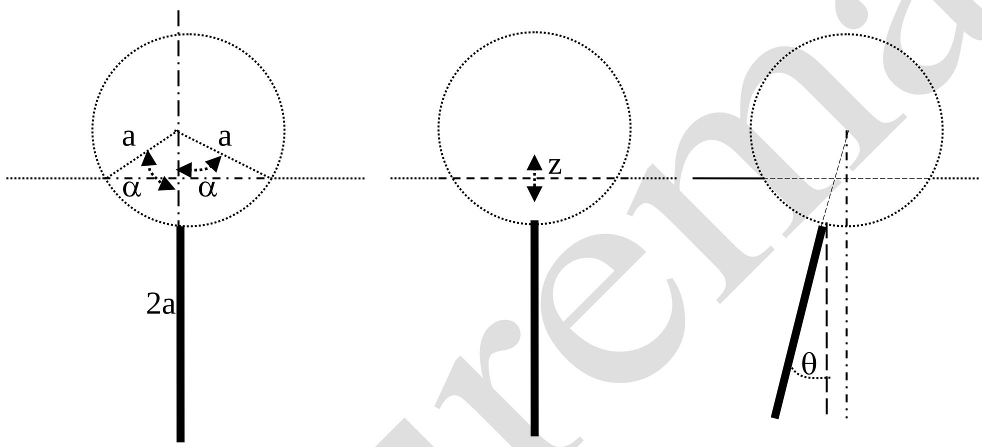



Fig. 1a Fig,1b Fig.1c

***a) Para la posición de equilibrio obtenga una expresión relacionando el ángulo $\alpha$ de flotación con el cociente d/$\rho$ Desprecie el volumen de la quilla. Ver la figura 1a.***

***b ) Sobre la boya, debido a una perturbación, se hunde verticalmente una distancia pequeña z,, con lo que aparece una fuerza neta que produce un movimiento de oscilación vertical de la boya. Determinar la frecuencia de esta oscilación vertical en función de $\alpha$, g y a. Admitir que la influencia del movimiento del agua en la dinámica del movimiento de la boya incrementa en un tercio su masa .Ver figura 1b.***

***c) En la aproximación de que el cilindro se balancea alrededor el eje central, determinar la frecuencia de este balanceo lateral en función de g y a. Despreciar la dinámica y viscosidad del agua en estew caso- El ángulo del balanceo se supone que es pequeño. Ver figura 1c.***

***d) La boya contiene acelerómetros muy sensibles que pueden medir tanto la oscilación vertical como el balanceo lateral. Con aguas en una calma***



!

***relativa el periodo de la oscilación vertical es de aproximadamente 1 segundo y el periodo del balanceo lateral de unos 1,5 segundos.***
***A partir de esta información confirmar que el ángulo de flotación $\alpha$ es aproximadamente 90º, y además estimar el radio y masa de la boya para la cual l=a.***

a) Designamos con M a la masa del cilindro de la boya y como la quilla tiene la misma masa, resulta que la masa total de la boya es 2M.

$$2M = \text{masa del cilindro} + \text{masa de la quilla} = \pi a^2 ld + \pi a^2 ld = 2\pi a^2 l d$$
$$\text{Peso de la boya} = 2\pi a^2 ldg$$

Si la boya está en equilibrio el empuje del agua debe ser igual al peso.

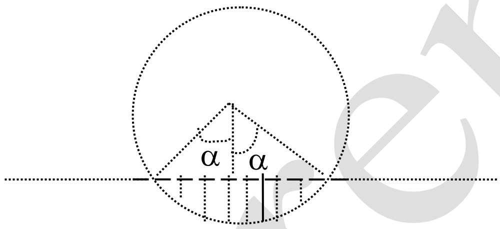


Fig.2

El empuje es igual al peso de agua desalojada por la boya. En la figura 2 se observa que el volumen de agua desalojada es igual *área rayada* l* . El área rayada es el área del sector circular menos el área de los dos triángulos.

$$\text{Área sector} \Rightarrow \frac{\pi a^2}{2\pi} = \frac{As}{2\alpha} \Rightarrow As = a^2\alpha : \ \text{área rayada} = a^2\alpha - 2\cdot\frac{a\,\text{sen}\,\alpha\cdot a\cos\alpha}{2}$$
$$\text{área rayada} = a^2\alpha - a^2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$$

El empuje es igual $E = \left(a^2\alpha - a^2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\right)l\,g\,\rho$

Igualando el peso y el empuje

$$2\pi a^2 l\,d\,g = a^2\left(\alpha - \text{sen}\alpha\cos\alpha\right)l\,\rho\,g \ \Rightarrow \ \frac{2\pi d}{\rho} = \alpha - \text{sen}\alpha\cos\alpha$$

El peso de la boya actúa en su centro de masas y el empuje actúa en el centro de masas del agua desplazada.

El centro de masas de la boya se calcula teniendo en cuenta que el centro de masas del cilindro esta en el centro del eje del mismo y el centro de masas de la quilla en mitad de ésta, Tomamos como origen el centro del cilindro y el sentido positivo hacia abajo

$$\mathrm{CM\,boya} = \frac{M \cdot 0 + M_{quilla} \cdot 2a}{2M} = a$$

El centro de masas del agua desplazada estará en un punto del segmento circular y en posición simétrica como indica la figura 3.

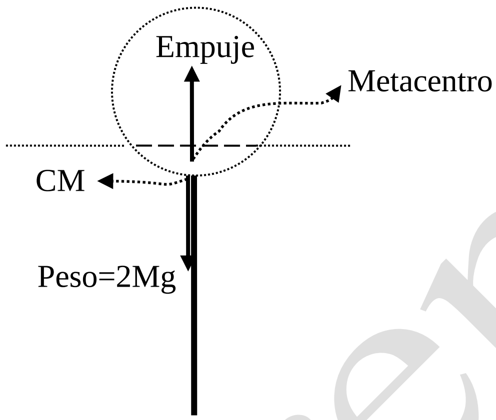



Fig.3

El peso actúa en el centro de masa de la boya y el empuje en el metacentro que es el centro de masa del agua desplazada. En el equilibrio ambos se encuentran en la misma vertical.

b)Si se hunde la boya una distancia pequeña existe un desplazamiento extra del agua que crea un empuje ,el cual vale ,si z es pequeño, ver figura 4, $2a \operatorname{sen}\alpha\, z\, l\, g\, \rho = k\, z$

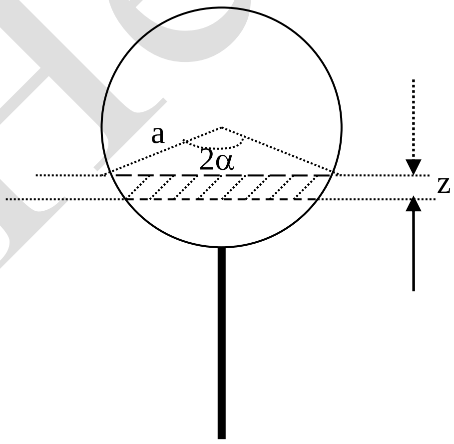



Fig.4

Esa fuerza peso actúa verticalmente hacia arriba y tiende a llevar a la boya a su posición de equilibrio. Observamos que esa fuerza es proporcional al desplazamiento z ,luego el movimiento de la boya en una movimiento armónico sobre una masa total que es la masa de la boya más 1/3 de esa masa debida a la influencia sobre la dinámica , según indica en enunciado

$$\text{Masa} = M + \frac{1}{3}M = \frac{4}{3}M = \frac{4}{3}\cdot 2\pi^2 a^2\, l\, d = \frac{8}{3}\pi^2 a^2\, l\, d \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{\text{Masa}} = \frac{2\,a\,\text{sen}\,\alpha\, l\, g\,\rho}{\frac{8}{3}\pi^2 a^2\, l\, d} = \frac{3\,\text{sen}\,\alpha\,\rho\, g}{4\,\pi\, a\, d}$$

Si tenemos en cuenta que $\frac{2\,\pi\, d}{\rho} = \alpha - \text{sen}\alpha\cos\alpha$ , resulta:

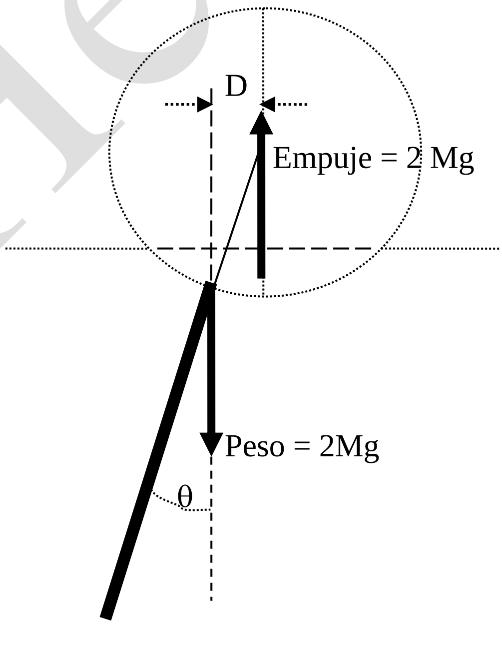
$$\omega^2 = \frac{3\,g\,\text{sen}\,\alpha}{2a\cdot\frac{2\,\pi\, d}{\rho}\cdot} = \frac{3\,g\,\text{sen}\,\alpha}{2\,a\left(\alpha - \text{sen}\,\alpha\cos\alpha\right)}$$

c) En la figura 5 se indica el desplazamiento de la boya cuando gira alrededor del eje que pasa por el centro del cilindro.

Se observa que el volumen de agua desplazada no varía respecto de la posición de equilibrio por lo que el empuje actúa en el metacentro que se ha dibujado en la figura 3, pero ahora el peso total de la boya ya no está en la vertical inicial, sino desplazado de modo que se ha formado un par de fuerzas que tiende a llevar a la boya a su posición de equilibrio

El momento creado por el par de fuerzas es

$$\tau = 2\,M\,g\,D = 2M\,g\,a\,\text{sen}\,\theta \approx 2M\,g\,a\,\theta$$




De acuerdo con la ecuación fundamental de la Dinámica de rotación

$$\tau = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = 2\,M\,g\,a\,\theta = K\,\theta$$

El movimiento es armónico de rotación  siendo

$$\omega_R^2 = \frac{K}{I} = \frac{2\,M\,g\,a}{I}$$

El momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro del cilindro es la suma del momento de inercia del cilindro y de la barra.

El momento de inercia del cilindro es $\frac{M\,a^2}{2}$

El momento de inercia de la quilla respecto de su centro de masas vale $\frac{M(2a)^2}{12} = \frac{M\,a^2}{3}$. Su momento de inercia respecto del centro del cilindro lo obtenemos a partir del teorema de Steiner

$$\frac{M\,a^2}{3} + M(2\,a)^2 = \frac{13\,M\,a^2}{3}$$

$$I = \frac{M\,a^2}{2} + \frac{13\,M\,a^2}{3} = \frac{29\,M\,a^2}{6} \quad \Rightarrow \quad \omega_R^2 = \frac{2\,M\,g\,a}{\frac{29\,M\,a^2}{6}} = \frac{12\,g}{29\,a}$$

d)

$$\frac{\omega}{\omega_R} = \frac{\frac{4\pi^2}{T^2}}{\frac{4\pi^2}{T_R^2}} = \frac{T_R^2}{T^2} = \frac{1{,}5^2}{1^2} = 2{,}25 = \frac{\frac{3\,g\,\mathrm{sen}\,\alpha}{2\,a\,(\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha)}}{\frac{12\,g}{29\,a}} = \frac{87\,\mathrm{sen}\,\alpha}{24(\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad 87\,\mathrm{sen}\,\alpha = 54(\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha)$$

Resolvemos la ecuación anterior por tanteo

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha$ =1,5 rad | 86,78 | > 77,19 |
| $\alpha$ =1,6 rad | 86,96 | < 88,0 |
| $\alpha$ =1,55 rad | 86,98 | > 84,82 |
| $\alpha$ =1,59 rad | 86,98 | < 86,89 |

La solución es 1,59  un valor próximo a $\pi/2$ =1,57

A partir de la ecuación

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{3g\,\mathrm{sen}\,\alpha}{2a\left(\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha\right)} = a = \frac{3\cdot 9{,}8\cdot \mathrm{sen}\,1{,}59}{8\pi^2\left(1{,}59 - \mathrm{sen}\,1{,}59\cdot\cos 1{,}59\right)} = 0{,}23\,\mathrm{m}$$

A partir de

$$2M = \text{Masa de la boya} = 2\pi a^2\, l\, d = 2\pi a^3 d$$

A partir de la ecuación $\dfrac{2\pi d}{\rho} = \alpha - \mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \;\Rightarrow\; d = \dfrac{\rho\left(\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha\right)}{2\pi}$

$$\text{Masa de la boya} = 2\pi a^2\, l\, d = 2\pi a^3 d = 2\pi a^3\,\frac{\rho\left(\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha\right)}{2\pi}$$

$$\text{Masa de la boya} = 0{,}23^3\cdot 1000\left(1{,}59 - \mathrm{sen}\,1{,}59\cos 1{,}59\right) = 19{,}6\,\mathrm{kg}$$