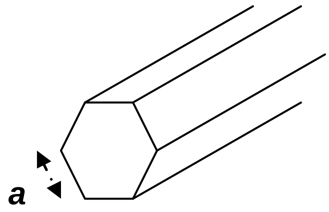
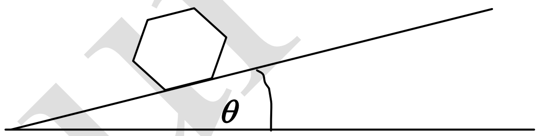
XXIX OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA.ISLANDIA. 1998

1.- Un prisma hexagonal, largo y rígido (parecido a un lapicero) tiene una masa M que está uniformemente distribuida. El lado del hexágono es a.



El momento de inercia del prisma hexagonal respecto del eje que pasa por el centro de las bases es $I = \frac{5}{12} Ma^2$. ***El momento de inercia respecto de un eje paralelo al anterior que pasa por la arista del prisma es*** $I = \frac{17}{12} Ma^2$

a) El prisma se encuentra inicialmente en reposo sobre un plano inclinado que forma un ángulo θ ***pequeño con la horizontal***



Se supone que las caras laterales del prisma son ligeramente cóncavas de modo que el prisma solamente hace contacto con el plano por sus aristas. Esta concavidad no afecta al momento de inercia. El prisma se desplaza y comienza a rodar abajo del plano de forma desigual. Se admite que el rozamiento evita el posible deslizamiento y que el prisma no pierde el contacto con el plano. La velocidad angular justamente antes de que una arista golpee al plano es ω_i ***y*** ω_f ***justamente después del impacto.***
Es posible escribir que

$$\omega_f = s\ \omega_i$$

siendo s un coeficiente numérico. Encontrar el valor de s.

b) La energía cinética del prisma justamente antes del impacto de la arista es K_i ***e inmediatamente después*** K_f, ***y entre ellas podemos escribir que***

$$K_f = r\ K_i$$

Determinar el valor del coeficiente r.

c) Cuando ocurra el próximo impacto K_i debe tener un valor mínimo que cumpla la condición

$$(K_i)_{min} = \delta Mga$$

siendo g = 9,81 $\frac{m}{s^2}$

Calcular el coeficiente δ en función del ángulo θ y el coeficiente r.

d) Si se cumple la condición hallada en c), la energía cinética Ki tenderá a un valor fijo (K_i)θ

$$(K_i)\,\theta = \kappa\ Mga$$

Determinar el valor de κ en función de θ y r.

e) Calcular el valor mínimo del ángulo θ (con un margen de 0,1º) para el cual una vez iniciada la desigual rodadura por el plano, ésta continúe de forma indefinida.

2.- Una cubierta de hielo es una capa gruesa de hielo (de algunos kilómetros de espesor) apoyada sobre el suelo y extendiéndose horizontalmente sobre decenas o incluso cientos de kilómetros. En este problema se considera la fusión del hielo y el comportamiento del agua bajo la cubierta del hielo. Se admite que en tales condiciones el hielo

causa variaciones de presión como un fluido viscoso, pero que se deforma de manera frágil?, principalmente por movimientos verticales.

Se facilita la siguiente información

Densidad del agua	$\rho_A = 1{,}000.10^3$ kg/m^3
Densidad del hielo	$\rho_H = 0{,}917.10^3$ kg/m^3
Calor específico del hielo	$c_H = 2{,}1.10^3$ J/(kgºC)
Calor latente de fusión del hielo	$L_H = 3{,}4.10^5$ J/kg
Densidad de la roca y magma	$\rho_M = 2{,}9.10^3$ kg/m^3
Calor específico de la roca y magma	$c_M = 700$ J/(kg ºC)
Calor latente de fusión de la roca y magma	$L_M = 4{,}2.10^5$ J/kg
Flujo calorífico desde el interior de la tierra	
Hacia el exterior	$J_Q = 0{,}06$ W/m2
Punto de fusión del hielo	$T_H = 0^o$ C

a) Considere una cubierta de hielo que recibe el flujo calorífico del interior de la tierra, utilizando los datos anteriores determine el espesor d de la capa de hielo fundido cada año.

b) Considere ahora la superficie superior de una cubierta de hielo. La tierra que está bajo la cubierta de hielo tiene una pendiente α. La superficie superior de la cubierta de tiene una pendiente β. (Véase la figura 1)

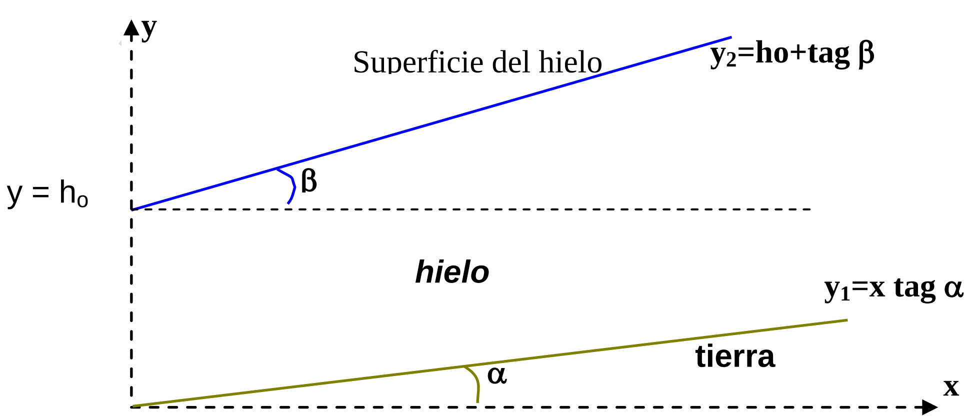


Fig.1

El espesor del hielo cuando x = 0 es h_o . La parte inferior y superior de la cubierta de hielo está descrita por las siguientes ecuaciones

$$y_1 = x\ tag\ \alpha \qquad ; \qquad y_2 = h_o + x\ tag\ \beta$$

Obtenga una expresión para la presión p en el fondo de la cubierta de hielo en función de la coordenada x.

Formule la condición matemática entre β y α de modo que una capa de agua situada entre la cubierta de hielo y el suelo no fluya en ninguna dirección. Muestre que tal condición es de la forma

$$tag\ \beta = s\ tag\ \alpha$$

y determine el coeficiente s.

La línea $y_1 = 0{,}8\ x$ en la siguiente figura 2 nos indica la superficie de la tierra bajo la cubierta de hielo.

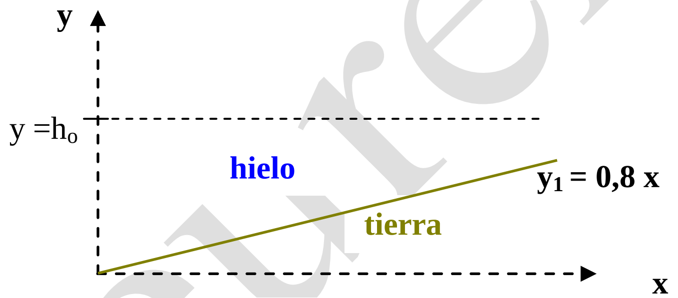


Fig. 2

El espesor vertical cuando x = 0 es h_o= 2 km. Suponga que el agua en el fondo se encuentra en equilibrio. Dibuje la línea y_1 y añada la línea y_2 que representa la superficie superior del hielo.

d) Una capa de hielo se asienta sobre un suelo horizontal y tiene originalmente un espesor D=2 km, en ella se ha formado de forma repentina un cono de agua procedente de la fusión del hielo (fig 3)

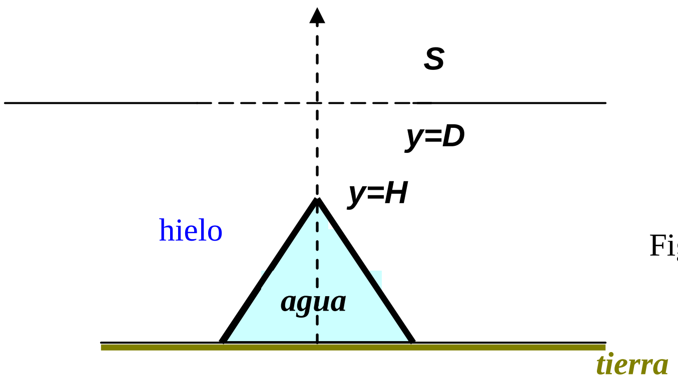


Fig.3

La altura del cono es H= 1 km y el radio r = 1 km. Mostrar analíticamente y en un gráfico la forma de la superficie de la capa de hielo después de que el cono de agua se ha formado y se ha alcanzado el equilibrio hidrostático.

e) Una expedición internacional anual de científicos explora la temperatura de la cubierta de hielo de la Antártida. La superficie es normalmente un amplio plano pero esta vez se encuentra un profundo cráter de forma de cono con una profundidad de 100 metros y un radio de 500 metros. El espesor del hielo en esta área es 2000 metros.

Después de una discusión los científicos concluyen que es muy probable que haya habido una pequeña erupción volcánica debajo de la capa de hielo. A consecuencia de ella una pequeña cantidad de magma (roca fundida) se ha introducido por la parte inferior del hielo, solidificándose y enfriándose, fundiendo un cierto volumen de hielo. Los científicos intentan estimar el volumen de la intrusión de magma y del agua fundida.
Admitir que el hielo solamente se mueve verticalmente. Suponer que el magma está fundido a una temperatura de 1200º. Suponer además que la intrusión tiene forma de cono estando su base exactamente por debajo de la depresión cónica de la superficie. El tiempo de entrada del magma es pequeño comparado con el tiempo de intercambio de calor en el proceso. <u>El flujo de calor se supone que ha sido vertical tal que el volumen fundido del hielo en cualquier momento está rodeado por una superficie cónica centrado por encima del centro de la intrusión del magma</u>
Dadas estas hipótesis la fusión del hielo tiene lugar en dos etapas. Al principio el agua no está a la presión de equilibrio en la superficie del magma y por ello fluye fuera. Se supone que esta agua fluye a una temperatura de cero grados. Después se alcanza la presión hidrostática y el agua se acumula por encima de la intrusión en lugar de fluir ahcia fuera.
Cuando el equilibrio térmico se alcanza determinar

1) La altura H del cono de agua respecto del fondo original de la capa de hielo 2) la altura h_1 de la intrusión 3) La masa total de agua producida y la masa m´ de agua que fluye hacia fuera.

3.-En este problema se analiza e interpretan medidas hechas en 1994 de una emisión de radio ondas procedentes de una fuente dentro de nuestra galaxia.

El receptor se sintonizó en una banda de frecuencias cuya longitud de onda es varios centímetros. La figura 3.1 indica zonas de emisión constantes de forma similar a las líneas de altitud en un mapa geográfico. En dicha figura se interpreta que los dos máximos son la proyección de dos objetos que se mueven alejándose entre sí a partir de un centro común que en la figura se indica mediante cruces. El centro, que se supone permanece fijo en el espacio, es también un fuerte emisor de radiación pero principalmente en otras longitudes de onda. Las medidas se hicieron en los días indicados a la misma hora.

La escala de la figura está dada por un segmento rectilíneo que corresponde a un segundo de arco (as) (1as = 1/3600 º).

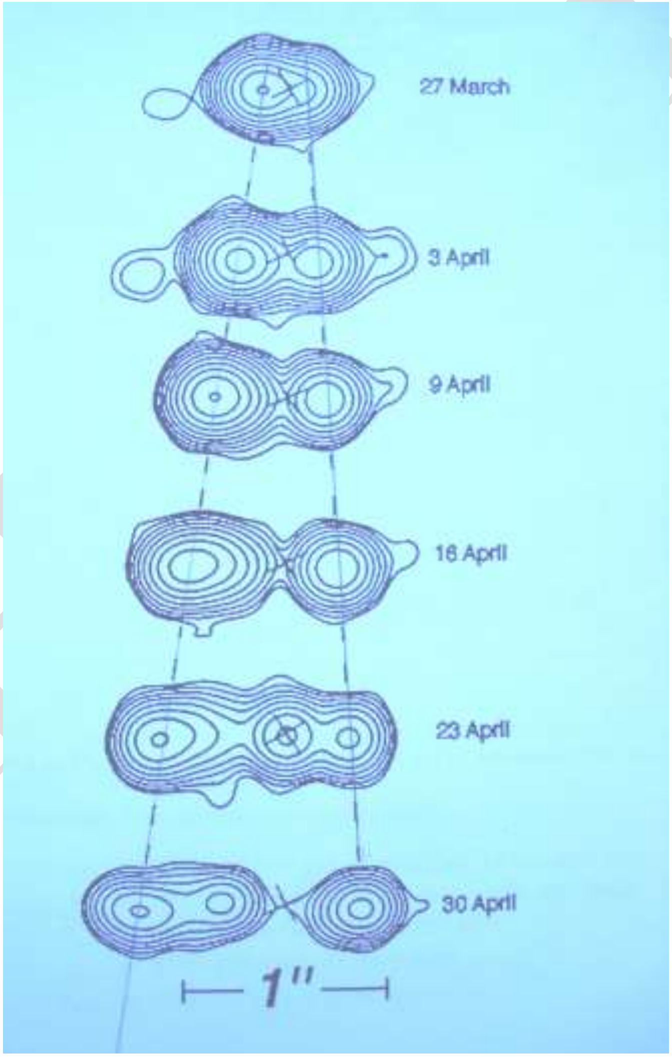


Fig.3.1

La distancia al cuerpo celestial señalado por las cruces en la figura se estima es $R = 12,5$ kpc. (1 kpc $=3,09.10^{19}$ m). La velocidad de la luz es $3,00.10^{8}$ m/s. No se piden errores en la solución.

a) Se indica la posición angular de los dos radio emisores, relativas al centro común, por $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$, siendo el subíndice 1 la emisión situada a mano izquierda y la 2 a la derecha en la citada figura, siendo t el tiempo de observación . Las velocidades angulares observadas desde la Tierra se indican por ω_1 y ω_2 respectivamente. Las velocidades lineales aparentes trasversales por v_1* y v_2*.

A partir de la figura 3.1 encontrar los valores de ω_1 y ω_2 en milisegundos de arco por día (msa/d) y de v_1* y v_2*. Algún resultado puede resultar sorprendente.

b) Con la finalidad de intentar aclarar el resultado sorprendente de la parte (a) consideremos una fuente de luz que se desplaza con velocidad v formando un ángulo $\Phi(0 \leq \Phi \leq \pi)$ con la dirección de un observador distante O, tal como se indica en la figura 3.2

Fig. 3.2

El observador está situado en O y la posición original de la fuente de luz está en A

La velocidad puede expresarse mediante $v = \beta c$, donde c es la velocidad de la luz. La distancia a la fuente, medida por el observador, es R. La velocidad angular de la fuente, desde el punto de vista del observador, es ω, y la velocidad lineal aparente perpendicular a la línea de visión es v*.

Expresar ω y v* en función de β, R y ϕ.

c) Suponemos que los dos objetos emisores descritos en la introducción y en la parte a) se mueven en direcciones opuestas con la misma velocidad $v = \beta c$. Con el resultado obtenido en la parte b) se pueden calcular β y ϕ a partir de las velocidades angulares ω_1 y ω_2 y de la distancia R. Ahora, ϕ

es el ángulo definido en la parte b) para el objeto situado a la izquierda, al que corresponde el subíndice 1 de la parte a)

d) Para el cuerpo 1 determinar la condición que hace que la velocidad aparente perpendicular sea mayor que c.

Escribir la condición en la forma $\beta > f(\Phi)$ e indicar la expresión de la función f,

Dibujar la región en el plano (β,ϕ) en la que v>c*

e) Para un cuerpo del apartado b) encontrar la velocidad (v) máxima para un determinado valor de β. Probar que la velocidad aumenta sin limite cuando $\beta \longrightarrow 1$*

f) La estimación de R que se dio en la introducción es poco real. Los científicos han especulado con un mejor método para determinar R. Se supone que se puede medir el efecto Doppler para las longitudes de onda λ_1 y λ_2 de los dos emisores correspondientes a la longitud de onda λ_o en el sistema en reposo.

A partir de la expresión del efecto Doppler relativista

$$\lambda = \frac{\lambda_o(1-\beta\ \cos\Phi)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

y suponiendo que ambos objetos tienen la misma velocidad, encontrar la expresión

$$\beta = \sqrt{1-\frac{\alpha\lambda_o^2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}}$$

y determinar el coeficiente numérico α.