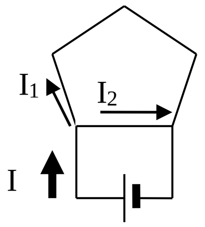
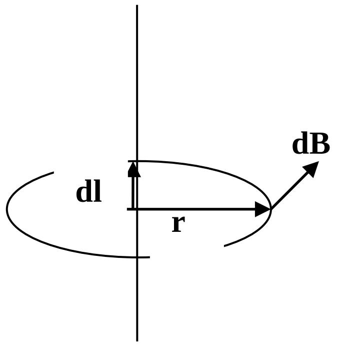
1.- Se construye un pentágono regular con hilo uniforme de igual grosor. Dos vértices contiguos del pentágono se unen por medio de hilos conductores a una batería. Calcular la intensidad del campo magnético en el centro geométrico del pentágono.

El esquema eléctrico del circuito es la figura inferior.



La corriente I procedente de la batería se bifurca en I_1 e I_2. La intensidad I_1 es cuatro veces inferior a I_2, puesto que el ramal superior del pentágono tiene cuatro lados y el inferior uno.
Para decidir la dirección del campo magnético creado por cada uno de los lados debemos recordar la ley de Biot-Savart.

Si consideramos un elemento de conductor dl recorrido por una corriente I , la intensidad del campo magnético está dado por la expresión



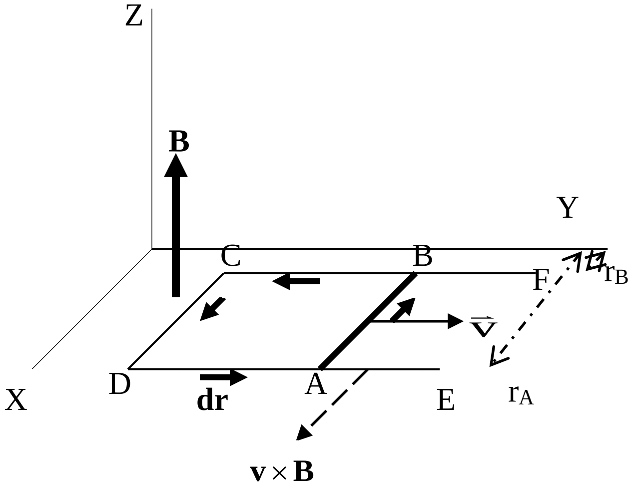
$$\vec{d}B = K\frac{I\ \vec{d}l \times \vec{r}}{r^3}$$

El producto vectorial $\vec{d}l \times \vec{r}$, nos indica la dirección de $\vec{d}B$. Si $\vec{d}l$ y $\vec{r}$ se encuentran en el plano del papel el campo magnético es perpendicular al plano del papel y dirigido hacia adentro

Si aplicamos lo dicho anteriormente al caso del polígono, deducimos que los cuatro lados por los que circula I_1 crean un campo magnético perpendicular al plano que contiene el pentágono y dirigido hacia dentro. El campo de esos cuatro lados es la suma de cada uno de ellos.

En cambio el lado por el que circula $I_2 = 4I_1$ es perpendicular al plano del pentágono pero dirigido hacia fuera. Dado que el campo depende de I y de la distancia y en los dos casos la distancia es la misma , se deduce que el campo magnético de los cuatro lados es igual al del único lado por circular por este último una intensidad cuatro veces mayor. En consecuencia el campo total es nulo.

2.- En el dispositivo de la figura inferior AB es una varilla conductora que se apoya sobre un conductor fijo FCDE. La varilla conductora puede deslizarse sin rozamiento sobre el conductor fijo. Un campo magnético uniforme B=2.10⁻² T tiene la dirección positiva del eje y se extiende sobre el plano XY. Si la varilla AB se desliza con velocidad $\vec{v} = v\vec{j}$, siendo v= 3 m/s. Calcular la fuerza electromotriz inducida. La resistencia eléctrica del circuito es 3 Ω. Determinar la potencia que se debe aplicar para mantener el sistema en movimiento.



r_A-r_B= AB= L

La ecuación $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ nos permite decir dónde se acumulan los electrones. En la figura está representado el vector $\vec{v} \times \vec{B}$ que al multiplicar por la carga negativa del electrón indica una fuerza sobre los mismos dirigida desde A a B, en otras palabras el extremos A es el positivo y el B el negativo. Esto nos indica que la corriente en el circuito es en el sentido ADCBA. Para calcular la fuerza electromotriz inducida, calculamos la circulación a lo largo de la línea cerrada ABCD.

$$\oint \vec{E}_m \cdot d\vec{r} = \oint \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{r} = \oint \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{r} = \oint \left|\vec{v} \times \vec{B}\right| \; dr\cos\alpha$$

En la integral anterior la circulación por BC, CD y DA es nula por ser el producto $\vec{v} \times \vec{B}$, ya que v=0, además α es 180º , por lo que la integral anterior queda reducida a

$$\int_A^B -vB \; dr = -vB\int_{rA}^{rB} dr = -vB\left(r_A - r_B\right) = -vB \; A\overline{B} = \text{-}vBL$$

El movimiento de la varilla no es espontáneo, ya que al aparecer una corriente desde B hacia A , sobre la varilla aparece una fuerza dada por la ecuación

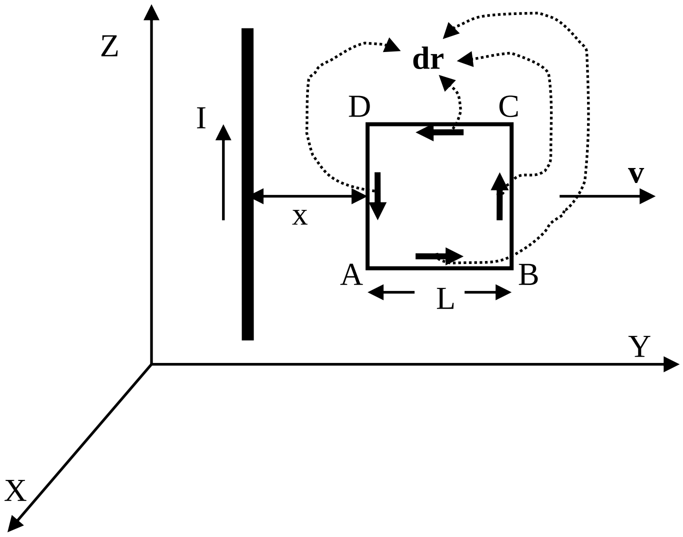
$$\vec{F}_{AB} = I \; A\vec{B} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \; F_{AB} = I \; LB$$

Siendo I la intensidad de la corriente inducida que atraviesa la varilla AB y cuyo valor es $I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{vB\ L}{R}$, siendo R la resistencia del circuito. $\vec{AB}$ es un vector dirigido desde A hacia B, el producto vectorial por $\vec{B}$ da lugar a que el vector $\vec{F}_{AB}$ tenga la dirección negativa del eje Y, esto es, contrario a la velocidad. En consecuencia si queremos que la varilla se desplace con velocidad v constante hacia la derecha hemos de aplicar un fuerza igual en modulo a F_{AB} y dirigida hacia el eje Y positivo. La potencia que hemos de aplicar es el trabajo efectuado en un tiempo dividido por ese tiempo. En el tiempo Δt la varilla se desplaza hacia la derecha una distancia $v\Delta t$ el trabajo es $F_{AB}\ v\Delta t$ y la potencia

$$P = \frac{F_{AB} v\ \Delta t}{\Delta t} = I\ L\ B\ v$$

En definitiva lo que ocurre es que hay que aplicar un trabajo para desplazar la varilla y ese trabajo aparece en forma de energía eléctrica, si no fuese así resultaría que tendríamos una corriente eléctrica sin consumir trabajo y eso es imposible.

3.- El hilo conductor, de longitud infinita, lleva una corriente de I amperios. El cuadro conductor, de lado L, se desplaza con una velocidad v



ambos se encuentran en el mismo plano YZ. Determinar la fuerza electromotriz inducida en el cuadro en función de la distancia x.

Para calcular la fuerza electromotriz inducida, calculamos la circulación a lo largo de la línea cerrada ABCD.

Antes veamos la dirección y sentido del vector $\vec{v}\times\vec{B}$, en cada uno de los lados y el ángulo que forma dicho vector con los $d\vec{r}$ de cada uno de los lados.

El campo magnético creado por el hilo conductor tiene de módulo $\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_o I}{2\pi\ r}$ y el vector $\vec{B}$ tiene la dirección del eje X negativo.

$\vec{v}\times\vec{B}$ sobre el lado BC forma un ángulo de cero grados con $d\vec{r}$

$\vec{v}\times\vec{B}$ sobre el lado DA forma un ángulo de ciento ochenta grados $d\vec{r}$

$\vec{v}\times\vec{B}$ sobre cualquier punto del lado AB forma un ángulo de 90grados con $d\vec{r}$

$\vec{v}\times\vec{B}$ sobre cualquier punto del lado CD forma un ángulo de 90 grados con $d\vec{r}$

Según lo anterior

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{r} = \oint \frac{\vec{F}}{q}\cdot d\vec{r} = \oint \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{r} = \int_B^C vB\ dr + \int_D^A - vB\ dr = vB_{BC}a - vB_{DA}a \Rightarrow$$

$$\varepsilon = v\frac{\mu_o I}{2\pi\ (x+a)}a - v\frac{\mu_o I}{2\pi\ x}a = \frac{v\mu_o Ia}{2\pi}\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x}\right) = \frac{\mu_o Iav}{2\pi}\left[\frac{-a}{x(x+a))}\right] = -\frac{\mu_o Ia^2 v}{2\pi}\frac{1}{x(x+a)}$$

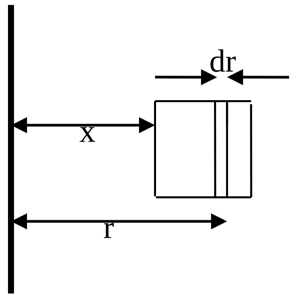
La interpretación del signo menos es la siguiente: De acuerdo con la ley de Lenz la fuerza electromotriz inducida se opone a la causa introducida en el circuito. Al moverse el circuito hacia la izquierda el flujo que lo atraviesa disminuye y la fuerza electromotriz inducida trata de mantenerlo ,, para ello , existen dos opciones posibles que la corriente vaya en el sentido ABCDA o en el sentido ADCBA. Si ocurriese el sentido ABCDA el flujo debido a esa corriente no se opone a la disminución de flujo que ocurre por moverse la espira hacia la izquierda, en cambio si ocurre en el sentido ADCBA entonces trata de que no disminuya el flujo debido al movimiento de la espira ya que el campo magnético inducido tiene el sentido del campo B creado por la corriente.
Ese sentido de giro es negativo ya que se dirige del eje Z al Y.

Este problema se puede también resolver a partir de la ecuación $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$

Llamamos x_o a la distancia desde el hilo al lado DA de la espira en el tiempo t=0 y designamos con x la distancia del hilo al lado DA en el tiempo t

$$x=x_o+vt$$

Consideremos una franja de espesor dr en la espira , como indica la figura



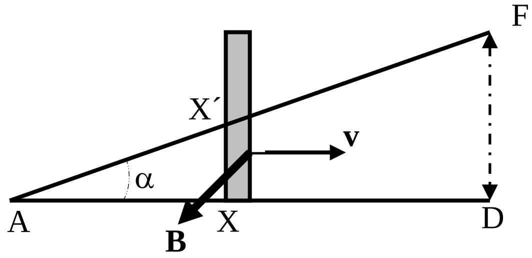
El flujo magnético que atraviesa la franja vale $d\Phi = \vec{B}\cdot d\vec{S} = \frac{\mu_o I}{2\pi\ r}\cdot adr\cdot\cos 180^o$.
El flujo a través de la espira

$$\Phi = \int_x^{x+a} -\frac{\mu_o Ia}{2\pi}\cdot\frac{dr}{r} = -\frac{\mu_o Ia}{2\pi}\ln\frac{x+a}{x} = -\frac{\mu_o Ia}{2\pi}\ln\frac{x_o+vt+a}{x_o+vt}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_o Ia}{2\pi} * \frac{x_o+vt}{x_o+vt+a} * \frac{(x_o+vt)v-(x_o+vt+a)v}{(x_o+vt)^2} = \frac{\mu_o Ia}{2\pi} * \frac{x}{x+a} * \frac{xv-xv-av}{x^2} \Rightarrow$$

$$\varepsilon = -\frac{\mu_o Ia^2 v}{2\pi} * \frac{1}{x(x+a)}$$

4.- Una barra cuya resistencia eléctrica por unidad de longitud es ρ, desliza, con velocidad constante v, sobre dos conductores sin resistencia. Estos conductores forman entre sí un ángulo α. Perpendicular al plano que forman la barra y los conductores se encuentra un campo magnético uniforme B(ver la figura inferior). La longitud del conductor AD es L y la de la barra es iguala la distancia DF. Se pide calcular el calor despendido cuando la barra se desplaza desde A hasta D.



Al desplazarse la barra hacia la derecha aumenta la superficie AXX´ y como consecuencia de ello se produce una fuerza electromotriz inducida cuyo modulo vale la derivada del flujo que atraviesa ese aumento de superficie con relación al tiempo. Esto se traduce en que aparece una corriente en el circuito AXX´ cuya intensidad se dirige desde X´a X en la barra, por lo que finalmente sobre la barra debe aparecer una fuerza de sentido contrario al vector velocidad. Esta fuerza supone un trabajo que se debe hacer desde el exterior para mantener la barra en movimiento.

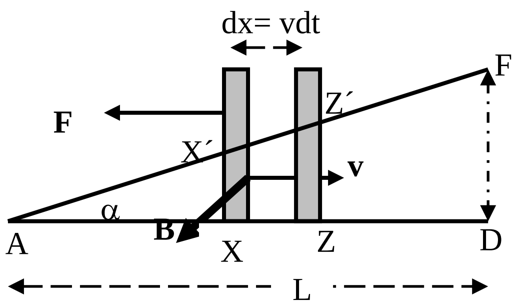


Fig.1

En la figura 1 la barra se ha desplazado hacia la derecha una longitud dx en un tiempo dt de modo que dx = vdt. En el instante inicial la superficie cerrada es AXX´ y luego es AZZ´.
Designamos con m a la longitud en la barra XX´ , con n a la longitud en la barra ZZ´. Y con x a la distancia AX. El aumento de superficie es:

$$dS = \frac{n(x + vdt)}{2} - \frac{mx}{2} \quad (1)$$

La relación ente m y n la hacemos por medio del ángulo α.

$$\mathrm{tag}\alpha = \frac{m}{x} = \frac{n}{x + v\ dt} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{m\left(x + v\ dt\right)}{x}$$

Sustituyendo en (1)

$$dS = \frac{m\left(x + vdt\right)^2}{2x} - \frac{mx}{2} = \frac{mx^2 + 2mxv\ dt - mx^2}{2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{dt} = mv$$

En el cálculo anterior se desprecia el término que contiene un infinitésimo de segundo orden.

El valor absoluto de la fuerza electromotriz inducida vale:

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{BdS}{dt} = Bmv$$

La intensidad de corriente que pasa por la barra es:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Bmv}{\rho\ m} = \frac{Bv}{\rho}$$

La fuerza que se debe aplicar para mantener la barra con movimiento uniforme es:

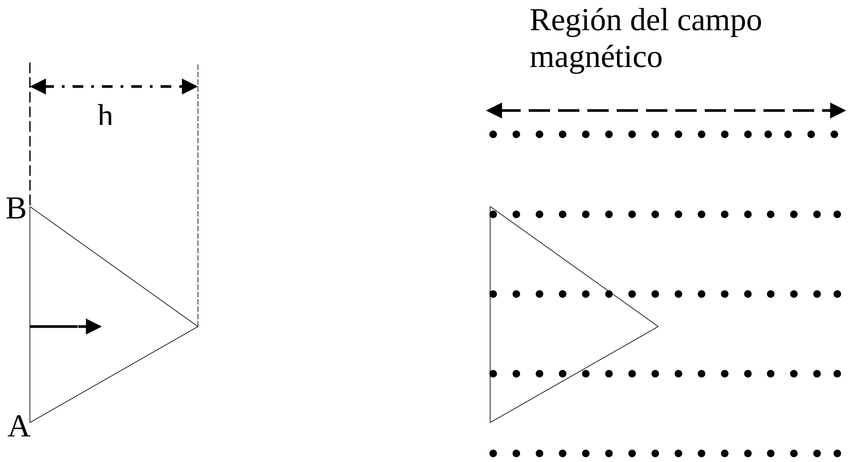
$$F = IlB = \frac{Bv}{\rho} - m \cdot B = \frac{B^2 v}{\rho} m$$

El trabajo necesario que se debe aplicar desde el exterior para que la barra se desplace una longitud L vale:

$$W = \int_0^L \frac{B^2 v}{\rho} m dx = \frac{B^2 v}{\rho} \int_0^L x\ \mathrm{tag}\alpha\ dx = \frac{B^2 v\ \mathrm{tag}\alpha}{\rho} \frac{L^2}{2}$$

Este trabajo se convierte en calor en el circuito.

5.-Una espira conductora en forma de triángulo equilátero de altura h se desplaza, sin rozamiento, con velocidad constante v. Luego penetra en un campo magnético uniforme perpendicular a la espira y de valor constante B. El campo magnético es perpendicular al plano de la espira y dirigido hacia el lector. La espira se detiene cuando el lado AB está justamente en el borde del campo, tal como se indica en la figura.
Calcular el campo magnético.



Supongamos que en el instante t=0 una parte de la espira está dentro del campo con un cierta velocidad w<v, tal como se indica en la figura 1.

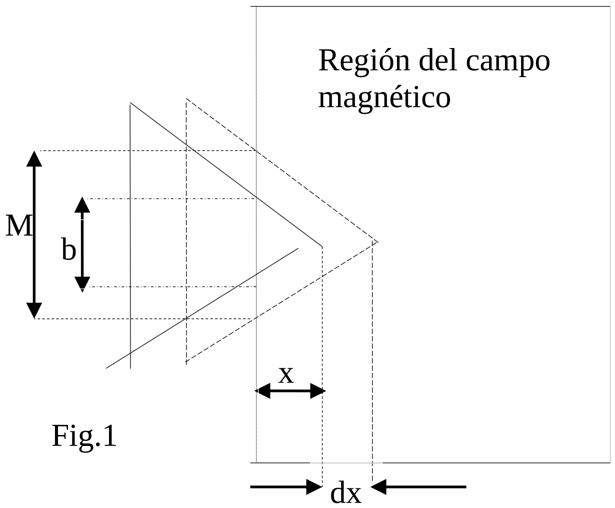
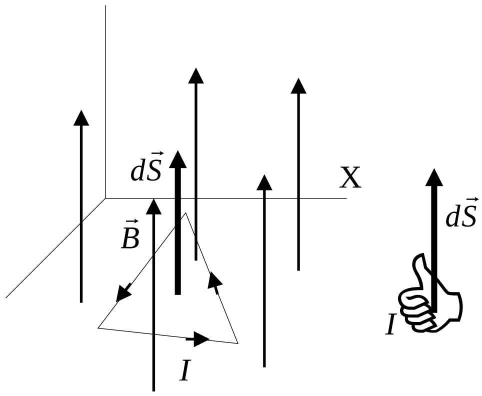


Fig.1



Tomando este sentido de la corriente I, los vectores $\vec{B}$ y $d\vec{S}$ tienen igual dirección y sentido.

La parte que está dentro del campo magnético en el instante t=0 es un triángulo de base b y altura x. Un tiempo después dt, la espira avanza una distancia dx = w dt y dentro del campo magnético existe un triángulo que tiene por base M y altura x +dx = x +wdt. En el tiempo dt el aumento de superficie dentro del campo es:

$$dS = \frac{M(x+dx)}{2} - \frac{bx}{2}$$

La variación del flujo magnético vale:

$$d\Phi = \vec{B}\cdot d\vec{S} = B\,dS\cos\theta = B\cdot dS = B\frac{M(x+dx)}{2} - \frac{B\cdot bx}{2} \quad (1)$$

Comparando triángulos semejantes, recuerde que la altura de la espira es h y llamamos a a la longitud de cada lado

$$\frac{a}{h} = \frac{b}{x} \quad ; \quad \frac{a}{h} = \frac{M}{x+dx} \quad \Rightarrow M = \frac{b(x+dx)}{x} \quad (2)$$

Combinado (1) y (2) resulta:

$$d\Phi = \frac{BM(x+dx)}{2} - \frac{B\cdot bx}{2} = \frac{Bb(x+dx)^2}{2x} - \frac{Bbx}{2} = \frac{Bbx^2 + 2Bbx\ dx - Bbx^2}{2x} = Bbdx$$

Una variación del flujo magnético conlleva que en la espira aparezca una fuerza electromotriz

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{Bb\ dx}{dt} = -Bbw$$

Esta fuerza electromotriz crea una corriente en la espira

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{Bbw}{R}$$

El signo menos de la corriente indica que el sentido real es el contrario al tomado
Esta corriente por sus efectos electromagnéticos tiende a oponerse a la causa externa introducida. Dado que la causa ha sido un aumento del flujo entrante en la espira hacia el lector la corriente en la espira tendrá el sentido indicado en la figura2

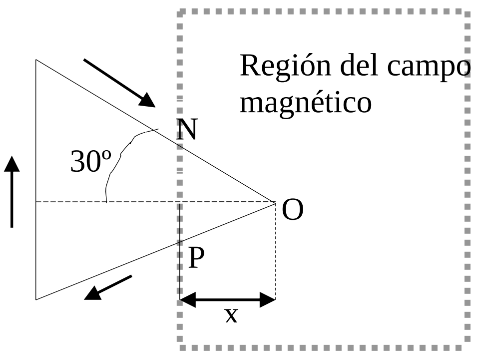


Fig.2

Sobre el trozo de espira NO actúa una fuerza dada por la ecuación $\vec{F} = I\ \vec{l}\times\vec{B}$, $\vec{l}$ es un vector que tiene de módulo la longitud NO y el sentido de la corriente, como $\vec{B}$ es perpendicular al plano de la espira y dirigido hacia el lector, la fuerza magnética es perpendicular a NO y el sentido indicado en la figura 3. Sobre OP actúa la misma fuerza en módulo pero dirigida como indica la figura 3. Se ha ampliado el tamaño de la espira en la figura 3 para observar con mayor facilidad las fuerzas.

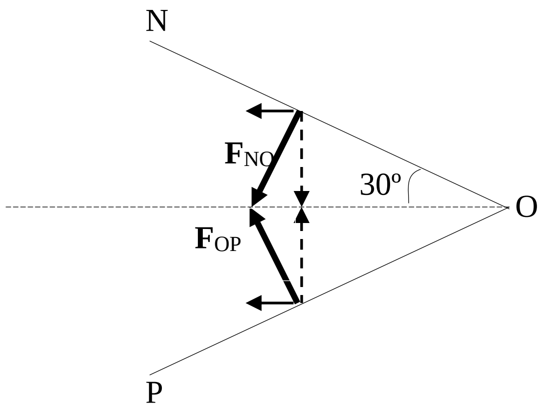


Fig.3

En la figura 3 se han dibujado las fuerzas (en trazo algo grueso) y las componentes verticales y horizontales. Se observa que las componentes verticales se anulan y las horizontales se suman

En consecuencia la fuerza horizontal dirigida hacia la izquierda vale:

$$F_H = 2\ (I \cdot NO \cdot B)\ \text{sen}30º$$

De la figura 2 se deduce que: $NO = \dfrac{x}{\cos 30º}$

$$F_H = 2\left(I \cdot \frac{x}{\cos 30º} \cdot B\right)\ \text{sen}30º = 2\ IxB\ \ \text{tag}\ 30º$$

Como $I = -\dfrac{Bbw}{R}$

$$F_H = 2\ IxB\ \ \text{tag}\ 30º = -\frac{2B^2bxw}{R}\text{tag}\ 30º = -\frac{2B^2bx}{R}\text{tag}30º\ \frac{dx}{dt}$$

Esta fuerza provoca una aceleración negativa dirigida hacia la izquierda, de sentido contrario a la velocidad y por tanto frenando a la espira. Como $F = ma = m\dfrac{dv}{dt}$

$$-\frac{2B^2bx}{R}\text{tag}30º\ \frac{dx}{dt} = m\frac{dw}{dt}$$

En la expresión anterior son constantes B,R y m y son variables x y b, pero ambas están relacionadas entre sí

$$\text{tag}30º = \frac{\frac{b}{2}}{x} \quad \Rightarrow \quad b = 2x\ \ \text{tag}30º$$

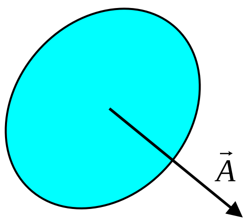
Observe que cuando la espira llega al campo magnético x=0 y cuando se para x=h, y la velocidad es v al entrar en el campo magnético y nula cuando se para.

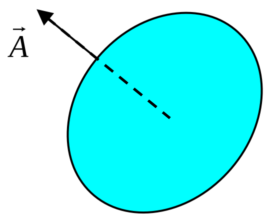
$$\int_0^h -\frac{4B^2x^2\text{tag}^2 30}{R}dx = \int_v^0 m\ dw \quad \Rightarrow \frac{4B^2\text{tag}^2 30}{R}\cdot\frac{h^3}{3} = mv \quad \Rightarrow \frac{4B^2\frac{1}{3}}{R}\cdot\frac{h^3}{3} = mv \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad B = \sqrt{\frac{9mvR}{4h^3}} = \frac{3}{2h}\sqrt{\frac{mvR}{h}}$$

Regla del flujo

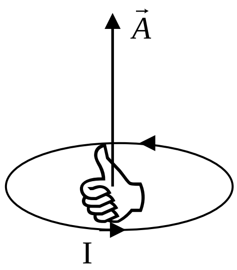
Comentario previo. Cuando se trata de una superficie abierta, el vector superficie se puede definir perpendicular a la misma, pero su sentido puede ser hacia uno o hacia otro lado.



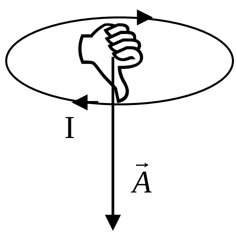


En el caso del flujo del campo magnético a través de una espira, como en general va a ser variable y engendrará entonces una corriente inducida, aceptamos el siguiente convenio.

Asignamos de modo arbitrario un sentido a la corriente inducida y aplicamos para definir el vector superficie la "regla de la mano derecha". Se sitúa la mano con los dedos curvados de modo que indiquen el sentido de giro de la corriente, estando el pulgar extendido como en la figura. El vector superficie $\vec{A}$, se tomará en la dirección y el sentido que señala el pulgar.



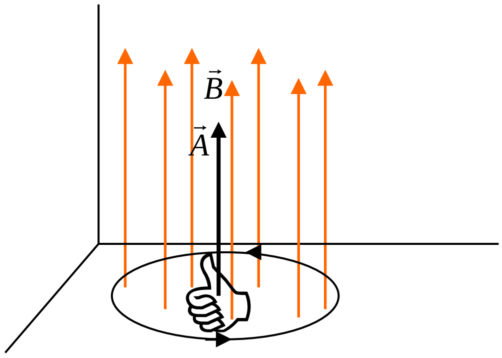
Opción a.

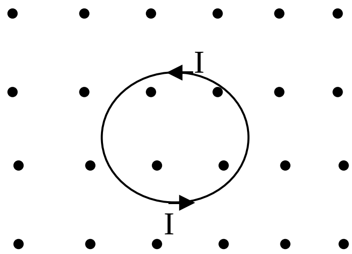


Opción b.

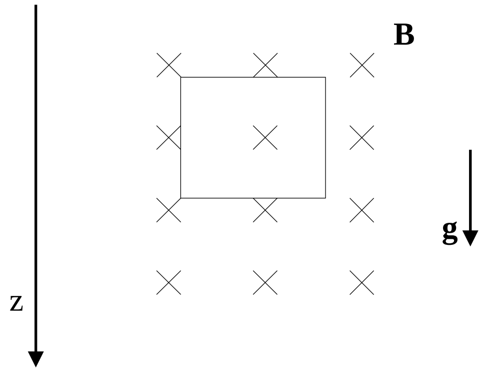
Como tenemos dos casos posibles, en general elegiremos aquel que coincida con la dirección y el sentido del campo magnético externo que atraviesa el plano de la espira. Así, suponiendo un campo magnético vertical y con sentido hacia arriba tomaremos la opción a y ahora el flujo es positivo. En la representación plana de la derecha el campo

$\vec{B}$ sale hacia el lector, tomaremos la corriente en sentido contrario a las agujas del reloj, para que $\vec{A}$ lleve la misma dirección y sentido de $\vec{B}$, de acuerdo con la regla de la mano derecha.





6.-A un cuadrado de alambre de masa m, lado a y resistencia eléctrica R se le comunica una cierta velocidad horizontal. El cuadro se mueve en el campo gravitatorio terrestre y a la vez en una región donde existe un campo magnético B, siendo el vector B perpendicular al vector g, del modo que indica la figura inferior

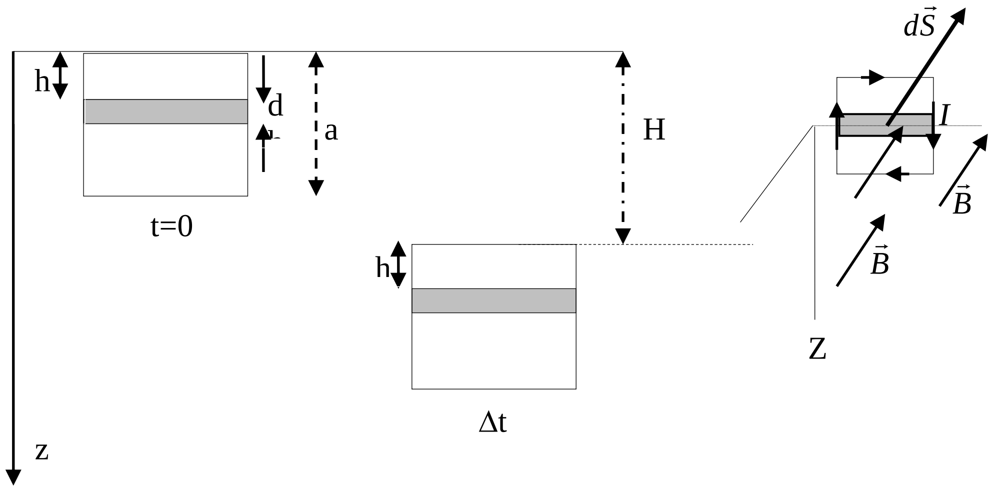


El módulo del vector B varía con la altura según la ecuación

$$B = B_o + kz$$

En la que k es una constante y z es la altura contada en dirección vertical hacia abajo. El cuadro se desplaza con velocidad v constante. Determinar la velocidad inicial v_o que se imprimió al cuadro.

En el caso de no existir el campo magnético, el movimiento del centro de masas del cuadro estaría compuesto por un movimiento uniforme horizontal con velocidad v_o y uno uniformemente acelerado debido al campo gravitatorio y la trayectoria del citado centro de masas sería una parábola.
Al existir un campo magnético que varía según z, resulta que en el cuadro se induce una fuerza electromotriz y por consiguiente una corriente eléctrica que lo recorre.
Vamos a calcular la fuerza electromotriz inducida en el cuadrado debido a su desplazamiento vertical, para ello asignamos de modo convencional a la corriente el sentido indicado en el dibujo.



Cuado el cuadrado está en la posición t=0 , el flujo magnético que atraviesa la superficie sombreada es:

$$d\Phi = B \cdot dS = (B_o + kh) \cdot a\ \ dh = B_o a\ \ dh + kah\ \ dh$$

El flujo que atraviesa todo el cuadrado se obtiene integrando la expresión anterior desde h=0 a h=a

$$\int d\Phi = \Phi_{t=0} = \int_0^a B_o a\ \ dh + \int_o^a kah\ \ dh = B_o a^2 + \frac{ka^3}{2}$$

Cuando el cuadrado ocupa la posición Δt, esto es, que entre la primera y la segunda posición ha transcurrido ese tiempo, el flujo que atraviesa la superficie sombreada vale:

$$d\Phi = B \cdot dS = [B_o + k(H + h)] \cdot a\ \ dh = B_o a\ \ dh + kaH\ \ dh + kah\ \ dh$$

El flujo que atraviesa todo el cuadrado se obtiene integrando la expresión anterior desde h=H a h=H+a

$$\Phi_{\Delta t} = \int_H^{H+a} B_o a\ \ dh + \int_H^{H+a} kaH\ \ dh + \int_H^{H+a} kah\ \ dh$$

$$\Phi_{\Delta t} = B_o a(H + a - H) + kaH(H + a - H) + ka\left[\frac{(H+a)^2 - H^2}{2}\right]$$

La fuerza electromotriz inducida en el cuadrado es:

$$\varepsilon = -\frac{\Phi_{\Delta t} - \Phi_{t=0}}{\Delta t} = -\frac{B_o a^2 + \frac{ka^3}{2} - B_o a^2 - ka^2 H - ka\left(\frac{H^2 + a^2 + 2aH - H^2}{2}\right)}{\Delta t}$$

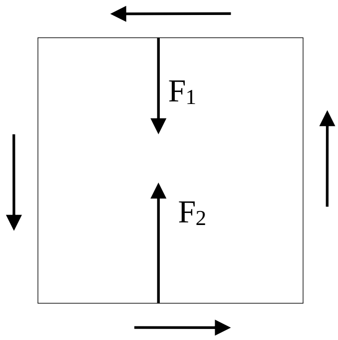
Si admitimos que Δt es muy pequeño, entonces $H = v_y \Delta t$, siendo v_y la velocidad del cuadro en dirección vertical

$$\varepsilon = -\frac{ka^2 v_y \Delta t + ka^2 v_y \Delta t}{\Delta t} = -2ka^2 v_y$$

La intensidad de la corriente que recorre el cuadrado es:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{2ka^2 v_y}{R}$$

Sobre el lado superior del cuadrado y el inferior aparecen fuerzas por interacción de esta corriente con el propio campo magnético. Sobre los lados verticales aparecen fuerzas que al tener el mismo módulo y sentido contrario se anulan.



La fuerza magnética en el lado superior es:

$$F_1 = I \cdot a \cdot (B_o + kH)$$

Y en el lado inferior:

$$F_2 = I \cdot a \cdot [B_o + k(H + a)]$$

La resultante de estas dos fuerzas es vertical y dirigida hacia arriba

$$F_R = F_2 - F_1 = Ia^2k = \frac{2ka^2 v_y}{R} a^2 k = \frac{2k^2 a^4 v_y}{R}$$

Si la velocidad es constante esta fuerza debe equilibrar al peso del cuadrado, para que la suma de ambas sea nula.

$$\frac{2k^2 a^4 v_y}{R} = mg \quad \Rightarrow \quad v_y = \frac{mgR}{2k^2 a^4}$$

La velocidad inicial horizontal v_o y la vertical v_y forman un ángulo de 90º y dan como resultante una velocidad constante v, por tanto,

$$v^2 = v_o^2 + v_y^2 \quad \Rightarrow \quad v_o = \sqrt{v^2 - v_y^2} = \sqrt{v^2 - \left(\frac{mgR}{2k^2 a^4}\right)^2}$$

7.-En un dispositivo para determinar la composición isotópica de los iones potasio $^{39}K^{+}$ y $^{41}K^{+}$, éstos primero se aceleran en un campo eléctrico y luego van a parar a un campo magnético B perpendicular a la dirección de su movimiento. La tensión que crea el campo eléctrico es U_o aun cuando este valor puede oscilar en $\pm\Delta U$. Determinar el cociente $\frac{\Delta U}{U_o}$ para que los haces de los iones potasio no se superpongan.

Dado que la tensión toma los valores extremos $U_o + \Delta U$ y $U_o - \Delta U$ los radios de los iones potasio están comprendidos entre los siguientes valores

$$U_o + \Delta U = \frac{1}{2} m_{39} v_{M39}^2 \Rightarrow v_{M39} = \sqrt{\frac{2(U_o + \Delta U)}{m_{39}}} \quad ; \quad qBv_{M39} = \frac{mv_{M39}^2}{R_{M39}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{M39} = \frac{\sqrt{2(U_o + \Delta U)m_{39}}}{Bq} \quad ; \quad R_{m39} = \frac{\sqrt{2(U_o - \Delta U)m_{39}}}{Bq}$$

M significa el radio mayor y m el menor .Para el íón de potasio 41

$$\Rightarrow R_{M41} = \frac{\sqrt{2(U_o + \Delta U)m_{41}}}{Bq} \quad ; \quad R_{m41} = \frac{\sqrt{2(U_o - \Delta U)m_{41}}}{Bq}$$

Para que no se superpongan los haces de los iones, el límite lo indica que coincidan el radio mayor del ión 39 con el radio menor del ión 41.

$$\Rightarrow R_{M39} = \frac{\sqrt{2(U_o + \Delta U)m_{39}}}{Bq} \quad ; \quad R_{m41} = \frac{\sqrt{2(U_o - \Delta U)m_{41}}}{Bq} \Rightarrow$$

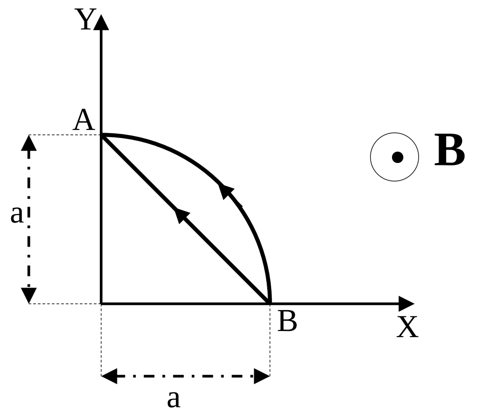
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2(U_o + \Delta U)m_{39}}}{Bq} = \frac{\sqrt{2(U_o - \Delta U)m_{41}}}{Bq} \Rightarrow (U_o + \Delta U)m_{39} = (U_o - \Delta U)m_{41} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(U_o + \Delta U)}{(U_o - \Delta U)} = \frac{m_{41}}{m_{39}} = \frac{41}{39} \Rightarrow 39U_0 + 39\Delta 9 = 41U_0 - 41\Delta 1 \Rightarrow 80\Delta 0 = 2U_o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta U}{U_o} = \frac{1}{40}$$

Dado el valor del límite, la relación para lo que no hay superposición es $\frac{\Delta U}{U_o} < \frac{1}{40}$

8.- En el plano XY existen dos conductores A y B, uno es rectilíneo y el otro un arco de circunferencia. En la dirección del eje Z positivo existe un campo magnético uniforme, o lo que es lo mismo el campo magnético es perpendicular al plano del papel y saliendo de él.



La corriente que circula por los conductores es I y dirigida desde B hacia A.
a) Calcular la fuerza magnética que sufren ambos conductores y comprobar que el módulo de la fuerza es el mismo para ambos.
b) Ahora, el campo magnético es decreciente, de modo que cuando y=0 vale B_o y cuando y =a es nulo. Calcular, para ambos conductores, el valor de la fuerza que sufren por acción de este campo variable.

En primer lugar debemos considerar despreciable la interacción magnética entre ambos conductores, puesto que al estar recorridos por corrientes, también éstas crean un campo magnético que actuaría sobre el otro conductor. Es decir, que la única interacción magnética a considerar es la que tiene lugar entre los conductores y el campo magnético B dirigido según el eje Z.

a) La fuerza que sufre un elemento de corriente al estar situado en el interior de un campo magnético es:

$$d\vec{F} = I\left(d\vec{l} \times \vec{B}\right) \quad \Rightarrow \quad dF = I\,dl\,B\,\text{sen}\alpha$$

Tanto para el conductor rectilíneo como para el arco α = 90º.

En la figura 1 se ha dibujado $d\vec{F}$, en dos lugares diferentes de los conductores

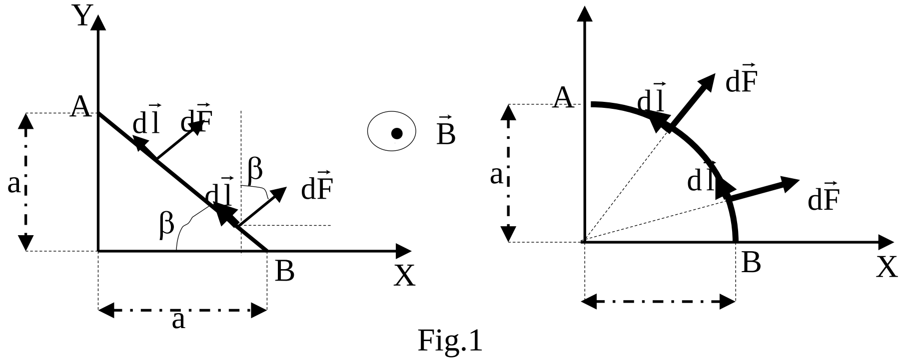


Fig.1

a1) Cuando el conductor es rectilíneo todos los vectores $d\vec{F}$ son paralelos, si el conductor es un arco de circunferencia, las rectas que contienen a los diferentes vectores $d\vec{F}$ todas pasan por el origen de coordenadas.

Para el conductor rectilíneo cada $d\vec{F}$ tiene dos componentes sobre los ejes X e Y, cuyos módulos son respectivamente

$$dF_X = dF \cdot \operatorname{sen}\beta = IB\,dl\operatorname{sen}\beta \Rightarrow dF_X = IB\,dl\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$dF_Y = dF \cdot \cos\beta = IB\,dl\cos\beta \Rightarrow dF_Y = IB\,dl\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para hallar las componentes F_X e F_Y debemos integrar las anteriores ecuaciones

$$F_X = IB\frac{\sqrt{2}}{2}\int dl = IB\frac{\sqrt{2}}{2}L = IB\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2a^2} = IBa$$

$$F_Y = IB\frac{\sqrt{2}}{2}\int dl = IB\frac{\sqrt{2}}{2}L = IB\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2a^2} = IBa$$

El resultado anterior expresado en forma vectorial

$$\vec{F} = IBa\,\vec{i} + IBa\,\vec{j}$$

Si se utilizan componentes cartesianas, resulta en este caso más sencillo y claro expresar $d\vec{l}$ *como:* $d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$

Al ser $d\vec{F} = Id\vec{l} \wedge \vec{B}$ $\Rightarrow$ $d\vec{F} = I(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}) \wedge B\vec{k} = IBdx\,(-\vec{j}) + IBdy\,\vec{i}$

Integrando, $\vec{F} = -\vec{j}\int_a^0 IBdx + \vec{i}\int_0^a IBdy = -\vec{j}IB\left[x\right]_a^0 + \vec{i}IB\left[y\right]_0^a = aIB\vec{j} + aIB\vec{i}$

a2) Cuando el conductor es un arco de circunferencia, nos fijamos en la figura 2.

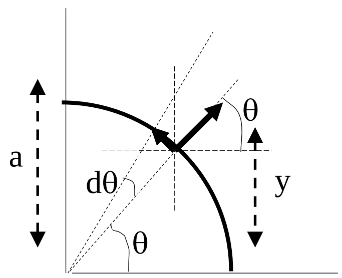


Fig.2

Hemos escogido al azar un elemento $d\vec{l}$ sobre el arco cuyo módulo se calcula teniendo en cuenta que el valor del arco es igual al del radio por el ángulo expresado en radianes.

$$dl = a\,d\theta$$

Las proyecciones del módulo de la fuerza elemental, $dF = I\,dl\,B\,sen\,90 = I\,dl\,B$ sobre los ejes valen:

$$dF_X = dF \cdot cos\theta = I\,B\,dl\,cos\theta = I\,B\,a\,cos\theta\,d\theta$$
$$dF_Y = dF \cdot cos\theta = I\,B\,dl\,sen\theta = I\,B\,a\,sen\theta\,d\theta$$

Para hallar las componentes F_X e F_Y debemos integrar las anteriores ecuaciones.

$$F_X = I\,B\,a\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta\,d\theta = I\,B\,a\left(sen\frac{\pi}{2} - sen\,0^o\right) = I\,B\,a$$
$$F_Y = I\,B\,a\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,\theta\,d\theta = I\,B\,a\left(-cos\frac{\pi}{2} + cos\,0^o\right) = I\,B\,a$$

El resultado anterior expresado en forma vectorial

$$\vec{F} = I\,B\,a\,\vec{i} + I\,B\,a\,\vec{j}$$

b) Al ser el campo decreciente podemos escribir

$$B = B_o - ky$$

Cuando y =a B =0,

$$0 = B_o - ka \;\Rightarrow\; k = \frac{B_o}{a} \;\Rightarrow\; B = B_o - \frac{B_o}{a}y \;\Rightarrow\; B = B_o\left(1 - \frac{y}{a}\right)$$

b1) Para el conductor recto ahora el módulo de **dF** no es constante y se hace cero en el extremo A del conductor

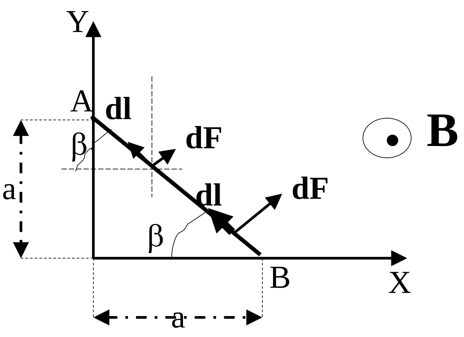


Fig.3

La componente del vector **dl** sobre el eje Y es **dy,** cuyo módulo es dy = dl senβ
La fuerza que sufre ese elemento de corriente vale:

$$dF = IB_o\left(1-\frac{y}{a}\right)dl = IB_o\left(1-\frac{y}{a}\right)\frac{dy}{\operatorname{sen}\beta} \Rightarrow dF_X = IB_o\left(1-\frac{y}{a}\right)\frac{dy}{\operatorname{sen}\beta}\cdot\operatorname{sen}\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_X = IB_o\left(\int_0^a dy - \frac{1}{a}\int_0^a y\,dy\right) = IB_o\left(a-\frac{1}{a}\cdot\frac{a^2}{2}\right) = IB_o\,\frac{a}{2}$$

Para la componente F_Y

$$dF = IB_o\left(1-\frac{y}{a}\right)dl = IB_o\left(1-\frac{y}{a}\right)\frac{dy}{\operatorname{sen}\beta} \Rightarrow dF_Y = IB_o\left(1-\frac{y}{a}\right)\frac{dy}{\operatorname{sen}\beta}\cdot\cos\beta =$$

$$= IB_o\left(1-\frac{y}{a}\right)\frac{dy}{\operatorname{tag}\beta} \quad \Rightarrow \quad F_Y = IB_o\left(\int_0^a dy - \frac{1}{a}\int_0^a y\,dy\right) = IB_o\left(a-\frac{1}{a}\cdot\frac{a^2}{2}\right) = IB_o\,\frac{a}{2}$$

El resultado anterior expresado en forma vectorial

$$\vec{F} = IB_o\,\frac{a}{2}\,\vec{i} + IB_o\,\frac{a}{2}\,\vec{j}$$

b2) Si en la figura 2 elegimos al azar un elemento de corriente dl, éste sufre una fuerza de módulo

$$dF = IB_o\left(1-\frac{y}{a}\right)dl = IB_o\left(1-\frac{y}{a}\right)a\,d\theta \quad \Rightarrow \quad dF_X = IB_o\left(1-\frac{y}{a}\right)a\,d\theta\cdot\cos\theta$$

De la figura 2 se deduce que $y = a\operatorname{sen}\theta$

$$dF_X = IB_o\left(1-\frac{y}{a}\right)a\,d\theta\cdot\cos\theta = IB_o\left(1-\frac{a\operatorname{sen}\theta}{a}\right)a\,d\theta\cdot\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_X = IB_o a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta\right) = IB_o a\left[\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}0^o\right) - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}2\theta\,d\theta\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_X = IB_o a + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\cos 2\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos 0^o\right) = IB_o a + IB_o a\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(-1-1)\right) = IB_o\,\frac{a}{2}$$

Calculamos la componente F_Y.

$$dF = I B_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) dl = I B_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) a\, d\theta \quad \Rightarrow \; dF_Y = I B_o \left(1 - \frac{y}{a}\right) a\, d\theta \cdot \operatorname{sen}\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_Y = \int I B_o \left(1 - \frac{a \operatorname{sen}\theta}{a}\right) a \operatorname{sen}\theta\, d\theta = I B_o \left(a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta - a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta \right)$$

$$F_Y = I B_o\, a - I B_o\, a \left| \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\theta \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow F_Y = I B_o\, a - I B_o\, a \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{sen}\pi + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 0^\circ \right) \Rightarrow$$

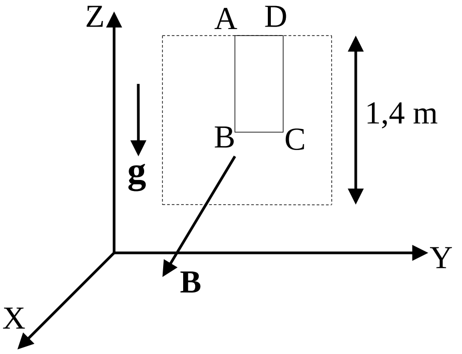
$$F_Y = I B_o\, a \left(1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\pi - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 0^\circ \right) = I B_o\, a \left(1 - \frac{\pi}{4} - 0 - 0 \right) = I B_o\, a \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$$

El resultado anterior expresado en forma vectorial

$$\vec{F} = I B_o \frac{a}{2} \vec{i} + I B_o\, a \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \vec{j}$$

9. En el plano ZY existe un campo magnético uniforme intenso de valor B= 2 T y dirigido en el sentido positivo del eje X (ver la figura inferior). Los límites de ese campo son 1,4 metros por 1,4 metros. En el interior del mismo existe una espira metálica ABCD rectangular de lados AD= L=0,20 m, AB=h=0,60 m, que inicialmente se encuentra en reposo. La resistencia óhmica de la espira es R=2 Ω y su masa m=5.10⁻² kg .a) Determinar cómo varía la velocidad de la espira desde que se suelta sin velocidad inicial hasta que el lado AD sale justamente del campo, Hacer una representación gráfica. b) Repetir el apartado anterior si el campo magnético tuviese una intensidad de 6 T.

Tome g = 10 m/s². Ayuda: $\int \frac{dx}{a-bx} = -\frac{1}{b}\, ln(a-bx)$



a) El movimiento de la espira se divide en dos partes: una, cuando la espira se encuentra totalmente sumergida en el campo magnético uniforme y el flujo a través de ella es constante, esto es, desde la posición inicial hasta que el lado BC llega al borde inferior del campo, otra cuando la espira comienza a abandonar el campo y una parte está dentro del campo y otra fuera, esto es, desde que la posición anterior hasta que el lado AD sale justamente del campo.

En la primera parte el movimiento es una caída libre en el campo gravitatorio terrestre y la velocidad de la espira cuando el lado BC está justamente en el límite del campo es:

$$v_i = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot (1{,}4 - 0{,}6)} = 4\,\frac{m}{s}$$

El tiempo en que se verifica el anterior movimiento

$$h = \frac{1}{2} g\, t_i^2 \;\Rightarrow\; t_i = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}8}{10}} = 0{,}40 \text{ s}$$

A partir del instante anterior, la espira sale del campo magnético y como consecuencia de ello se produce una variación del flujo magnético que la atraviesa y de ello se deriva que aparezca una fuerza electromotriz que provoca una corriente en la espira y finalmente, como veremos, una fuerza opuesta a la del campo gravitatorio.

En la figura 1 se observa la posición de la espira cuando su velocidad es v y un instante posterior Δt muy pequeño.

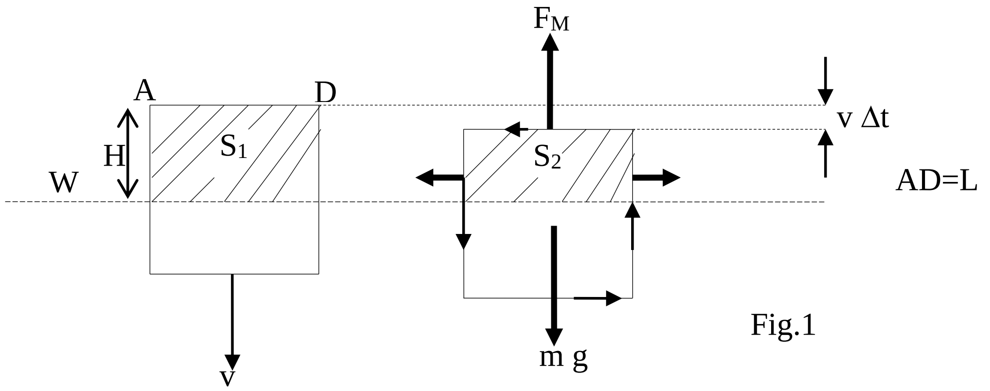


Fig.1

En la figura 1 la línea W indica el límite del campo, por encima existe un campo B perpendicular al plano del papel y dirigido hacia fuera del mismo, por debajo de L no existe campo.
Observando la figura 1 se deduce que S_1 es la superficie de la espira atravesada por el campo en la posición 1 y S_2 en la posición 2.

$$S_1 = H \cdot L \ ; \ S_2 = (H - v\Delta t) \cdot L \quad \Rightarrow \quad S_2 - S_1 = L(H - v\Delta t - H) = -L \cdot v \cdot \Delta t$$

En la posición 1 la espira está atravesada por un flujo magnético Φ_1. Un tiempo después Δt (muy pequeño), la espira se ha desplazado hacia abajo una distancia v Δt, y es atravesada por un flujo Φ_2.
El flujo penetra por la cara posterior de la espira y sale por la de delante, mirando la figura 2.

Podemos escribir siguiendo la ley de Lenz

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t} = -\frac{B \cdot S_2 - B \cdot S_1}{\Delta t} = -\frac{B(S_2 - S_1)}{\Delta t} = \frac{B \cdot L \cdot v \cdot \Delta t}{\Delta t} = BvL$$

En la espira aparecerá una corriente cuya intensidad es:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BvL}{R}$$

Ahora hay que averiguar si la intensidad I en la espira forma una cara Norte o Sur tal como está la figura 2. Para ello recordemos que esa intensidad debe oponerse a la causa externa introducida, por ello la corriente tratará, dentro de lo posible, que el flujo que atraviesa la espira se conserve , en consecuencia la cara vista de frente (figura 2) debe ser una cara norte .
Finalmente la espira recorrida por la corriente I está en el seno de un campo magnético B (intenso y por tanto despreciable el que se induce) y por consiguiente habrá fuerzas sobre los lados de la espira
La fuerza sobre el lado AD=L es:

$$\vec{F}_M = I\vec{L} \times \vec{B} = IL(-\vec{j}) \times B\vec{i} = ILB\vec{k} \quad \Rightarrow \quad F_M = ILB = \frac{B^2L^2}{R} v$$

Las fuerzas sobre los lados verticales tienen el mismo módulo y son de sentido contrario, su resultante es nula.

La espira, mientras está moviéndose una parte de ella dentro del campo y otra fuera, actúan dos fuerzas, una el peso vertical y hacia abajo y otra la fuerza magnética vertical y hacia arriba.
Para calcular la velocidad habremos de integrar una ecuación diferencial y para plantearla hay que aplicar la segunda ley de Newton.

$$mg - \frac{B^2L^2}{R}v = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow mg - \beta v = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow dt = \frac{m\,dv}{mg - \beta v} = \frac{dv}{g - \frac{\beta}{m}v}$$

Para integrar la expresión anterior recurrimos a la ayuda que nos dan en el enunciado. Comparando las expresiones se deduce que a =g y $b = \frac{\beta}{m}$.

$$t = -\frac{m}{\beta}\ln\left(g - \frac{\beta}{m}v\right) + Cte$$

Para hallar el valor de la constante de integración observamos que cuando la espira llega la posición en que BC está sobre la línea W, la velocidad de la espira es v_i = 4 m/s y el tiempo es t_i =0,40 s.

$$t_i = -\frac{m}{\beta}\ln\left(g - \frac{\beta}{m}v_i\right) + Cte \Rightarrow Cte = t_i + \frac{m}{\beta}\ln\left(g - \frac{\beta}{m}v_i\right)$$

Sustituyendo la constante en t, resulta:

$$t = -\frac{m}{\beta}\ln\left(g - \frac{\beta}{m}v\right) + t_i + \frac{m}{\beta}\ln\left(g - \frac{\beta}{m}v_i\right) = t_i + \frac{m}{\beta}\ln\frac{g - \frac{\beta}{m}v_i}{g - \frac{\beta}{m}v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\frac{\beta}{m}(t - t_i)} = \frac{g - \frac{\beta}{m}v_i}{g - \frac{\beta}{m}v} \Rightarrow g - \frac{\beta}{m}v = \left(g - \frac{\beta}{m}v_i\right)e^{-\frac{\beta}{m}(t - t_i)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{m}v = g - \left(g - \frac{\beta}{m}v_i\right)e^{-\frac{\beta}{m}(t - t_i)} \Rightarrow v = \frac{mg}{\beta} + \left(v_i - \frac{mg}{\beta}\right)e^{-\frac{\beta}{m}(t - t_i)} \quad (1)$$

La ecuación anterior de v es válida cuando $t \geq 0{,}40$ s hasta que la espira abandone el campo. Como la espira tiene una altura limitada hemos de calcular el tiempo que transcurre desde que llega el lado BC a la línea W, hasta que el lado AD llega a esa línea, en total una altura recorrida de 0,60m. Teniendo en cuenta que $h = \int v\,dt$, con resolver esa integral solucionaríamos el problema, pero dado que en el enunciado no se nos dice nada acerca de cómo resolver la integral, solamente podemos encontrar la solución al problema de forma aproximada, midiendo el área comprendida entre v y el tiempo.

Sustituimos valores en la ecuación (1)

$$\beta = \frac{B^2L^2}{R} = \frac{2^2 \cdot 0{,}20^2}{2} = 0{,}080\frac{T^2m^2}{\Omega} \Rightarrow \quad \frac{mg}{\beta} = \frac{5.10^{-2} \cdot 10}{0{,}080} = 6{,}25\frac{m}{s} \quad \Rightarrow$$

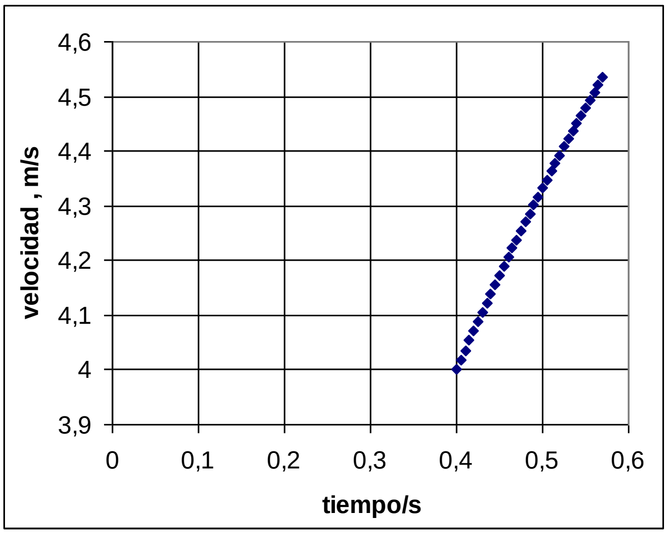
$$\Rightarrow \quad \frac{\beta}{m} = \frac{0{,}080}{5.10^{-2}} = 1{,}6\frac{T^2m^2}{kg\,\Omega}$$

$$v = 6{,}25 + (4 - 6{,}25)\cdot e^{-1{,}6(t-0{,}4)} = 6{,}25 - 2{,}25\cdot e^{-1{,}6(t-0{,}4)}$$

Representamos v frente a t. Antes de hacer la representación obtengamos una idea acerca del valor de t. Si cayese libremente, con g = 10 m/s^2, y su velocidad inicial 4 m/s y la altura recorrida 0,60 metros

$$0{,}60 = 4 * te + \frac{1}{2}10t_e^2 \Rightarrow \ t_e = 0{,}14 \text{segundos} \Rightarrow t = 0{,}4 + 0{,}13 = 0{,}53\ s$$

Como F_M se opone a g (ver la figura 1), el tiempo será algo mayor y por tanto en la gráfica damos valores a t superiores a 0,53 segundos.



La curva de la figura se puede aproximar a una línea recta, por tanto, el área comprendida entre la curva y el eje de los tiempos es un trapecio, cuya área debe valer numéricamente 0,60.

$$0{,}60 = \frac{4 + v(t)}{2}\cdot t \quad \Rightarrow \quad 0{,}60 = \frac{4 + \left(6{,}25 - 2{,}25e^{-1{,}6(t-0{,}4)}\right)}{2}(t - 0{,}4) \quad \Rightarrow$$

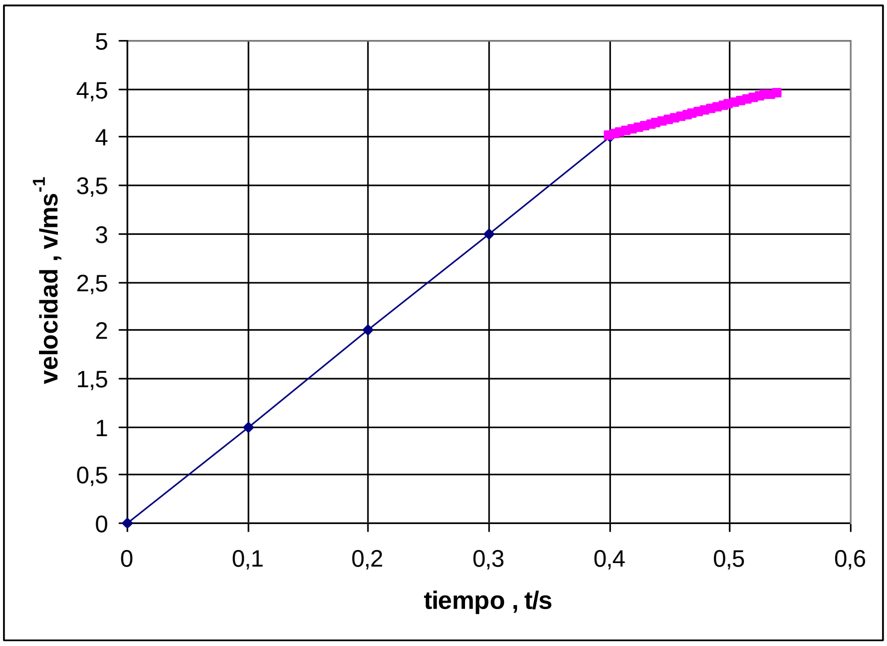
$$\Rightarrow \quad 0{,}60 = \frac{10{,}25 - 2{,}25e^{-1{,}6(t-0{,}4)}}{2}(t - 0{,}4)$$

Resolvemos la ecuación anterior por tanteo, damos valores a t y cogemos como solución aquel valor de t, que dé como resultado 0,60.

Cuando t = 0,56 segundos 0,60<0,68 ; Cuando t = 0,54 segundos 0,60>0,59

Cuando t = 0,543 segundos 0,60=0,60

La velocidad de la espira es la siguiente



El primer tramo es lineal y corresponde a un movimiento uniformemente acelerado, el segundo no es lineal pero como el tiempo que dura ese movimiento es muy pequeño la curva aparece en el gráfico como si fuese una línea recta. Se observa que la velocidad siempre aumenta

b) Cuando el campo sea B=6 T, los valores de v_i= 4 m/s y t_i=0,4 segundos no varían .Cambian los siguientes:

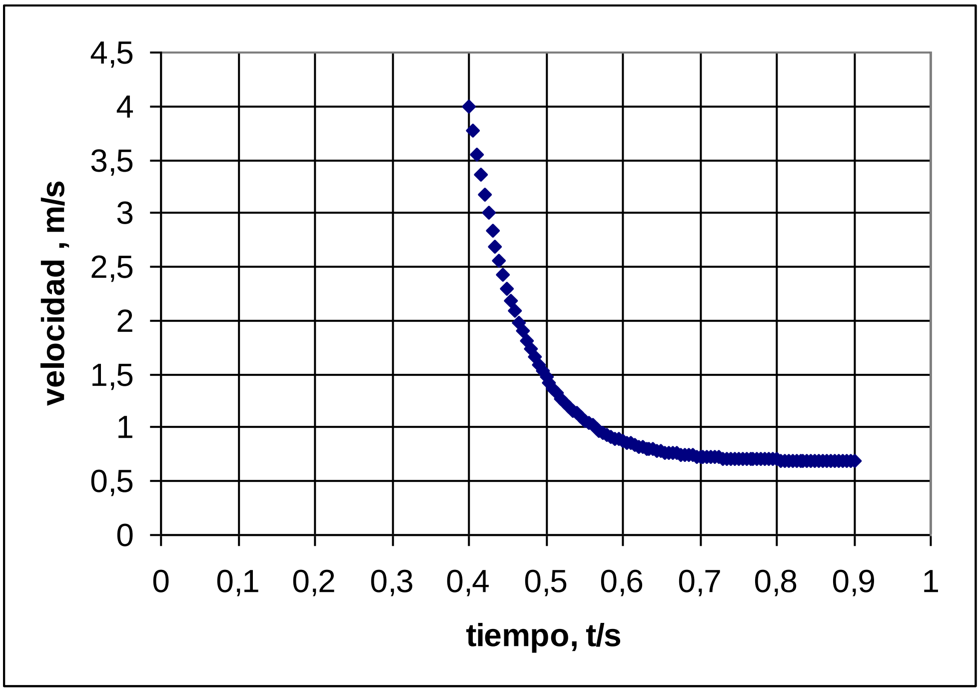
$$\beta = \frac{B^2L^2}{R} = \frac{6^2 \cdot 0{,}20^2}{2} = 0{,}72\frac{T^2m^2}{\Omega} \Rightarrow \quad \frac{mg}{\beta} = \frac{5.10^{-2} \cdot 10}{0{,}72} = 0{,}69\frac{m}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{m} = \frac{0{,}72}{5.10^{-2}} = 14{,}4\frac{T^2m^2}{kg\,\Omega}$$

La ecuación de la velocidad es:

$$v = \frac{mg}{\beta} + \left(v_i - \frac{mg}{\beta}\right)e^{-\frac{\beta}{m}(t-t_i)} = 0{,}69 + (4-0{,}69)\cdot e^{-14{,}4(t-0{,}4)} = 0{,}69 + 3{,}31\cdot e^{-14{,}4(t-0{,}4)} \quad (2)$$

La representación gráfica de la velocidad frente al tiempo es la gráfica siguiente:



La velocidad cuando la espira está una parte fuera del campo y otra dentro disminuye. Por tanto el tiempo que tarda la espira en recorrer su altura h=0,60 metros es mayor que en el caso anterior.

Hacemos en primer lugar un cálculo aproximado del área bajo la curva suponiendo un trapecio.

$$0{,}60 = \frac{4+v(t)}{2}\cdot t \quad \Rightarrow \quad 0{,}60 = \frac{4+\left(0{,}69+3{,}31\cdot e^{-14{,}4(t-0{,}4)}\right)}{2}(t-0{,}4) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}60 = \frac{4{,}69+3{,}31\cdot e^{-14{,}4(t-0{,}4)}}{2}(t-0{,}4)$$

Para t =0,5, 0,60>0,27. Para t=0,6 , 0,60>0,49. Para t=0,70 , 0,60<0,71

A la vista de los resultados anteriores dividimos la curva entre 0,4 y 0,5 segundos.

Velocidad a los 0,4 segundos 4 m/s. Velocidad a los 0,5 segundos

$$v_{0,5} = 0{,}69+3{,}31\cdot e^{-14.4(0{,}5-0{,}4)} = 1{,}47\,\frac{m}{s} \quad \Rightarrow \quad \text{área} = \frac{4+1{,}47}{2}\cdot 0{,}1 = 0{,}27$$

Entre 0,5 y 0,6 segundos. Velocidad a los cinco segundos 1,47 m/s. Velocidad a los seis segundos

$$v_{0,6} = 0{,}69+3{,}31\cdot e^{-14.4(0{,}6-0{,}4)} = 0{,}88\,\frac{m}{s} \quad \Rightarrow \quad \text{área} = \frac{1{,}47+0{,}88}{2}\cdot 0{,}1 = 0{,}12$$

Entre 0,4 y 0,6 segundos el área vale 0,27+0,12= 0,39, nos falta de área 0,6-0,39=0,21

Calculemos la velocidad para un tiempo de t =0,80 segundos y el área entre 0,80 y 0,60 segundos

$$v_{0,80} = 0,69 + 3,31 \cdot e^{-14.4(0,80-0,4)} = 0,70\,\frac{m}{s} \Rightarrow \text{área} = \frac{0,70+0,88}{2} \cdot 0,2 = 0,16$$

Como 0,16<0,21 el tiempo debe ser superior a 0,80 segundos

Calculemos la velocidad para un tiempo de t =0,90 segundos y el área entre 0,90 y 0,60 sendos

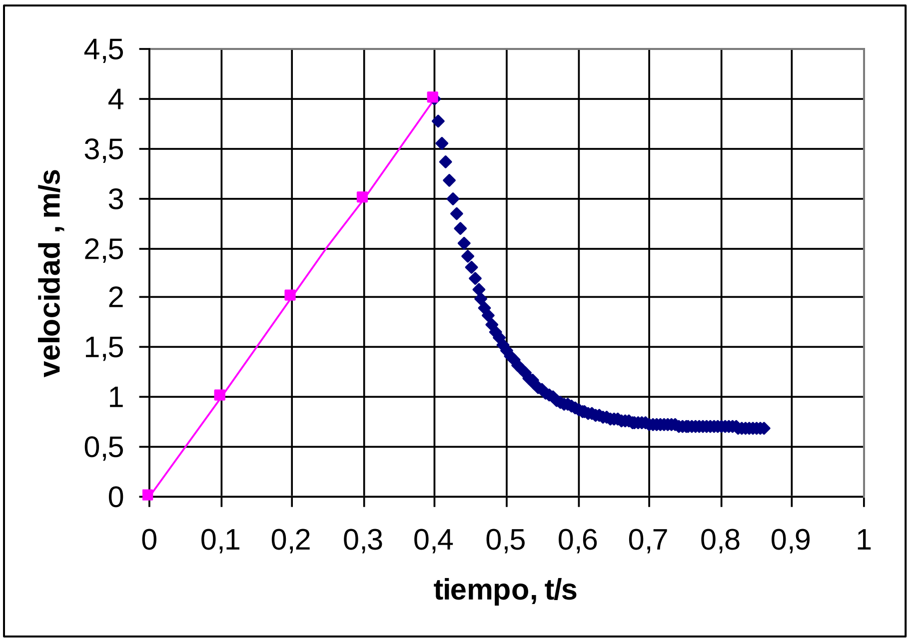
$$v_{0,90} = 0,69 + 3,31 \cdot e^{-14.4(0,90-0,4)} = 0,69\,\frac{m}{s} \Rightarrow \text{área} = \frac{0,69+0,88}{2} \cdot 0,3 = 0,24$$

Como 0,24>0,21 el tiempo debe ser inferior a 0,90 segundos.

Calculemos la velocidad para un tiempo de t =0,86 segundos y el área entre 0,86 y 0,60 segundos

$$v_{0,85} = 0,69 + 3,31 \cdot e^{-14.4(0,86-0,4)} = 0,69\,\frac{m}{s} \Rightarrow \text{área} = \frac{0,69+0,88}{2} \cdot 0,26 = 0,20$$

La gráfica del movimiento de la espira en un campo magnético de seis teslas es:



La espira alcanza prácticamente la velocidad límite. Calculemos el valor de ésta, que ocurrirá cuando la aceleración se anule.

$$mg - \frac{B^2L^2}{R} v = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow g - \frac{B^2L^2}{R} v_{lim} = 0 \quad \Rightarrow v_{lim} = \frac{g\ m\ R}{B^2L^2} = \frac{10 \cdot 5.10^{-2} \cdot 2}{6^2 \cdot 0,20^2} = 0,69\,\frac{m}{s}$$