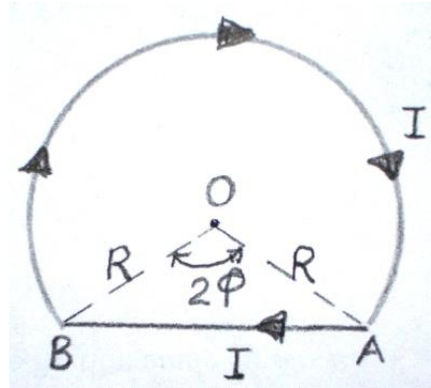


10.- Calcular la intensidad del campo magnético en el punto O, creado por un conductor cuya forma es la de la figura inferior y por el que circula una corriente de intensidad I. R es el radio de la circunferencia del conductor BA.

Calcular y dibujar el valor de B frente al ángulo φ , cuando éste varíe entre 0° y 180° .



El campo magnético en O está creado por un conductor que corresponde a un arco de circunferencia BA y por un conductor rectilíneo AB.

De acuerdo con la ley de Biot-Savart determinamos que el campo creado por BA es perpendicular al plano del papel y dirigido hacia dentro y con la misma dirección y sentido es el campo creado por AB.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (1)$$

Aplicamos la ecuación anterior para el conductor BA. En la figura 1 se observa que $d\vec{l}$ y \vec{r}_c forman un ángulo de 90° y $r_c = R$.

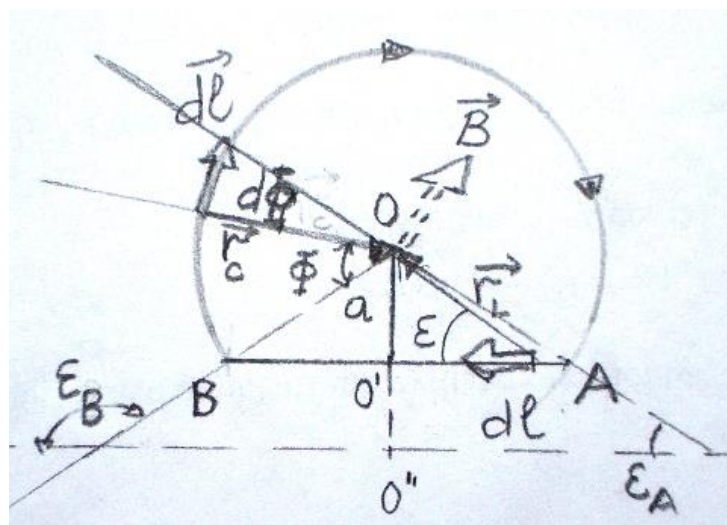


Fig.1

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_c}{r_c^3} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \cdot R \cdot \sin 90^\circ}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{R^2}$$

Como dl es un arco de circunferencia abarcado por un ángulo $d\phi$ y el valor del arco es igual ángulo por el radio, resulta que $dl=R d\phi$

$$dB_c = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R d\phi}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} d\phi \Rightarrow B_c = \int_0^{2\pi-2\phi} \frac{\mu_0 I}{4\pi R} d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (2\pi - 2\phi) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (\pi - \phi)$$

Aplicamos la ecuación (1) al conductor rectilíneo AB. Designamos con a , la mínima distancia que existe desde el punto O al conductor rectilíneo AB. Sobre dicho conductor, y a una distancia l del punto O', tomamos un elemento de corriente $d\vec{l}$. El vector que une $d\vec{l}$ con O lo llamamos \vec{r}_L . Ambos vectores forman entre sí un ángulo ε (ver la figura 2).

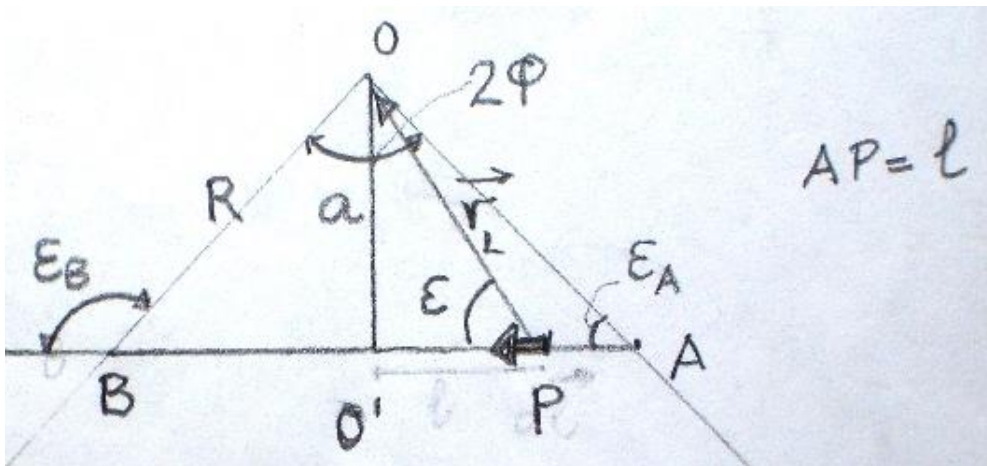


Fig.2

$$dB_L = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_L}{r_L^3} \Rightarrow dB_L = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \cdot r_L \cdot \sin \varepsilon}{r_L^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \cdot \sin \varepsilon}{r_L^2}$$

Se observa que en la ecuación anterior existen tres variables: l , ε y r_L , las cuales están relacionadas entre sí y lo que hacemos es poner dl y r_L en función de ε .

De la figura 2 se deduce que

$$r_L = \frac{a}{\operatorname{sen} \varepsilon} \quad ; \quad PO' = AO' - l = \frac{a}{\operatorname{tag} \varepsilon} = \frac{a \operatorname{cos} \varepsilon}{\operatorname{sen} \varepsilon} \Rightarrow -dl = -a \frac{\operatorname{sen}^2 \varepsilon + \operatorname{cos}^2 \varepsilon}{\operatorname{sen}^2 \varepsilon} d\varepsilon = -a \frac{d\varepsilon}{\operatorname{sen}^2 \varepsilon}$$

$$dB_L = + \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{\frac{a d\varepsilon}{\operatorname{sen}^2 \varepsilon} \cdot \operatorname{sen} \varepsilon}{a^2} = \frac{\mu_o I}{4\pi a} \operatorname{sen} \varepsilon d\varepsilon \Rightarrow B_L = \int_{\varepsilon_A}^{\varepsilon_B} \frac{\mu_o I}{4\pi a} \operatorname{sen} \varepsilon d\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_L = -\frac{\mu_o I}{4\pi a} (\operatorname{cos} \varepsilon_B - \operatorname{cos} \varepsilon_A) = \frac{\mu_o I}{4\pi a} (\operatorname{cos} \varepsilon_A - \operatorname{cos} \varepsilon_B)$$

Los ángulo ε_A y ε_B son suplementarios, el coseno de ε_B es igual a $-\operatorname{cos} \varepsilon_A$. Por otra parte tenemos que $a = R \operatorname{sen} \varepsilon_A$, por lo que B_L

$$B_L = \frac{\mu_o I}{4\pi a} \cdot 2 \operatorname{cos} \varepsilon_A$$

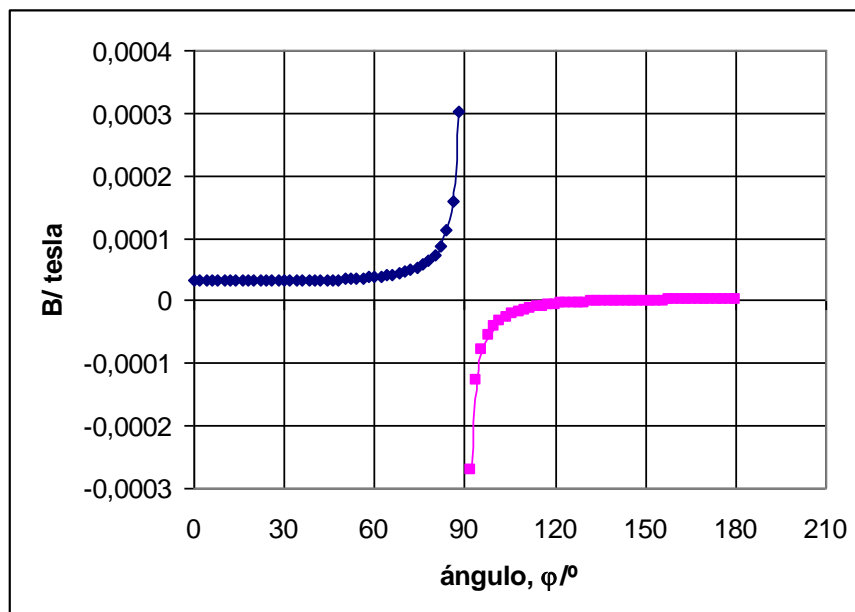
Volviendo a la figura 2, se deduce que $2\varepsilon_A + 2\varphi = \pi \Rightarrow \varepsilon_A = \pi - \varphi$

$$B_L = \frac{\mu_o I}{4\pi R \operatorname{sen} \varepsilon_A} \cdot 2 \operatorname{cos} \varepsilon_A = \frac{\mu_o I}{2\pi R} \cdot \frac{1}{\operatorname{tag} \varepsilon_A} = \frac{\mu_o I}{2\pi R} \cdot \frac{1}{\operatorname{tag}(\pi - \varphi)} = \frac{\mu_o I}{2\pi R} \cdot \operatorname{tag} \varphi$$

El campo en O

$$B_O = B_C + B_L = \frac{\mu_o I}{2\pi R} (\pi - \varphi) + \frac{\mu_o I}{2\pi R} \operatorname{tag} \varphi = \frac{\mu_o I}{2\pi R} (\pi - \varphi + \operatorname{tag} \varphi)$$

En la ecuación anterior se dan valores a φ en una hoja de cálculo y se obtiene la siguiente gráfica



Cuando φ se aproxima a 90° el conductor AB se acerca al punto O y según la ecuación anterior el valor de B aumenta de forma notable y las gráficas tienen una asintota para ese valor.

11. Dos conductores rectilíneos de longitud infinita están situados en el plano XZ. El A corta al eje X en la coordenada $-D$ y el B en la coordenada $+D$. La intensidad de la corriente es la misma en los dos conductores, en el A se dirige hacia el eje Z negativo y en el B hacia el eje Z positivo. Se pide calcular el campo magnético en los siguientes punto cuyas coordenadas son: $(0;0;0)$, $(0;2D;0)$, y $(2D;0;0)$.

El módulo del campo magnético creado por un conductor de longitud infinita esta dado por la expresión

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Siendo r la distancia mínima entre el conductor y el punto donde se calcula el campo. La anterior expresión se deduce a partir de la ley de Biot-Savart.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Haremos uso de la primera expresión para calcular el módulo del campo y de la segunda, concretamente del producto vectorial $d\vec{l} \times \vec{r}$ para saber la dirección y sentido del campo.

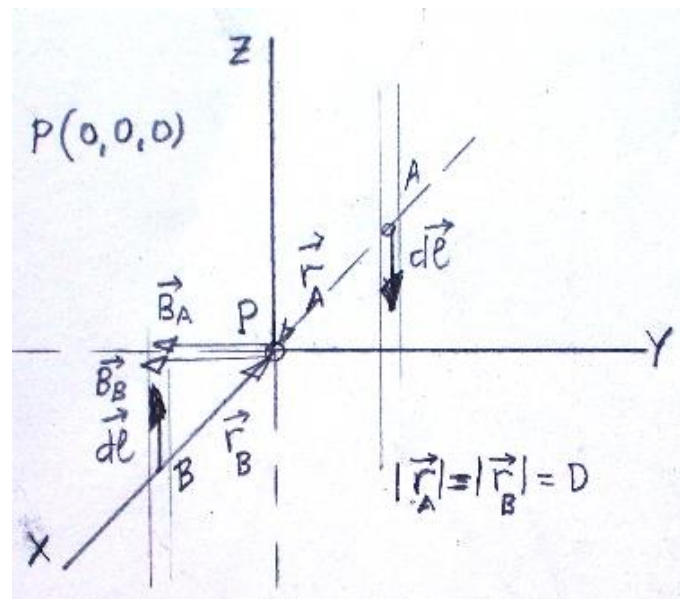


Fig.1

En la figura 1 se ha hecho una representación para calcular el campo en $P(0;0;0)$. Ambos campos tienen la misma dirección y sentido en el eje Y negativo. Esta dirección y sentidos se obtienen a partir del producto $d\vec{l} \times \vec{r}$.

$$B = B_A + B_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} + \frac{\mu_0 I}{2\pi D} = \frac{\mu_0 I}{\pi D} \Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{\pi D} \vec{j}$$

En la figura 2a se ha representado la situación de los vectores y del punto P. Para aclarar dicha figura se ha hecho la figura 2b en el plano XY. Observando esta figura se deduce que los vectores \vec{B}_A y \vec{B}_B suman sus componentes sobre el eje Y y se anulan sobre el eje X.

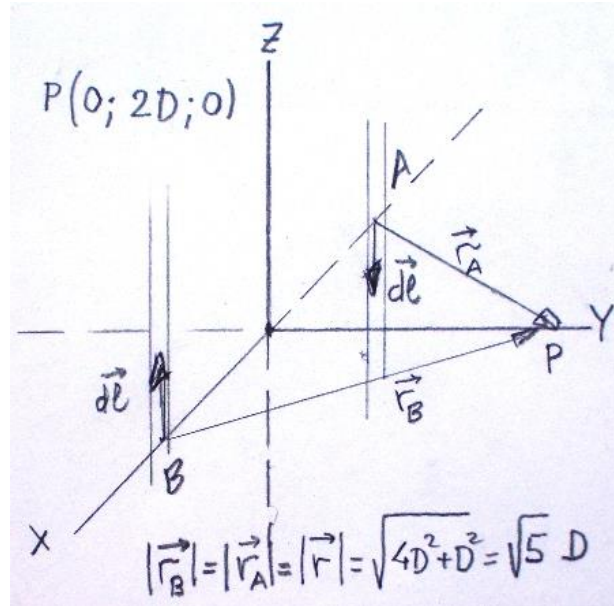


Fig.2 a

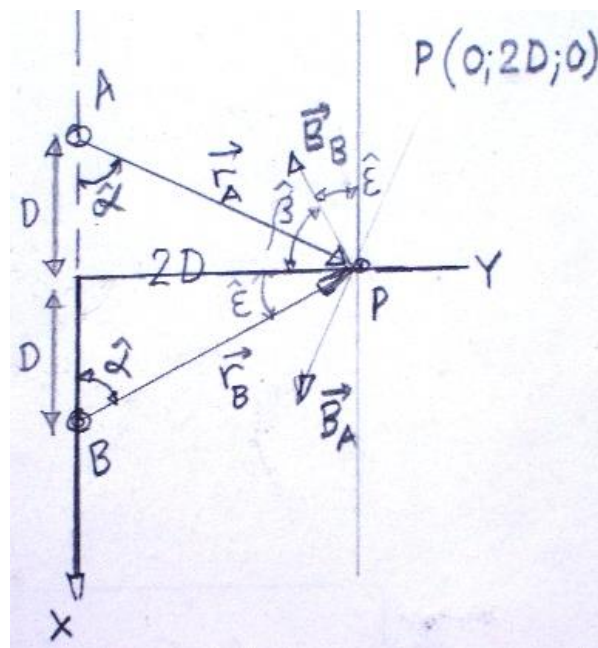


Fig. 2 b

$$B_A = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{5}D} ; \quad B_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{5}D}$$

Teniendo en cuenta que las componentes sobre el eje X se anulan

$$B = B_A \cos\beta + B_B \cos\beta$$

De la figura 2 b se deduce que $\alpha + \varepsilon = 90^\circ$ y $\beta + \varepsilon = 90^\circ \Rightarrow \alpha = \beta$

$$B = B_A \cos\alpha + B_B \cos\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{5}D} \cdot \frac{D}{\sqrt{5}D} + \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{5}D} \cdot \frac{D}{\sqrt{5}D} = \frac{\mu_0 I}{5\pi D}$$

Como \vec{B} tienen el sentido negativo del eje Y

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{5\pi D} \vec{j}$$

En la figura 3 se ha hecho una representación para calcular el campo en $P(2D;0;0)$.

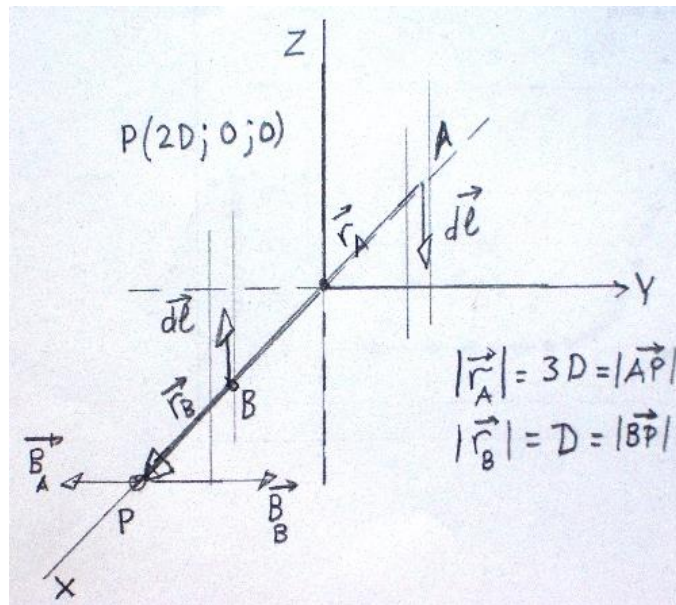
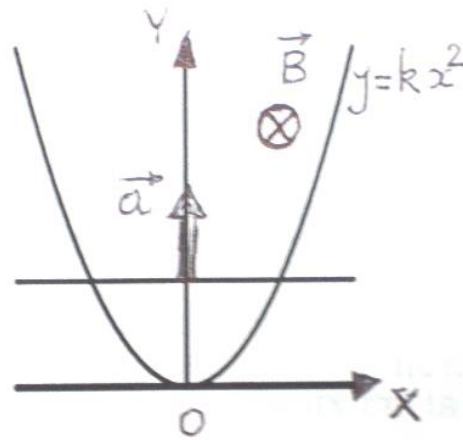


Fig.3

A la vista de la figura 3 y de las explicaciones anteriores se deduce:

$$B = B_B - B_A = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} - \frac{\mu_0 I}{2\pi 3D} = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{\mu_0 I}{3\pi D} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{3\pi D} \vec{j}$$

12.-Un conductor filiforme tiene la forma de una parábola de ecuación $y = kx^2$, y está situado en el plano XY. Perpendicular a dicho plano existe un campo magnético constante B .



En el instante $t=0$ una barra horizontal arranca desde el vértice de la parábola desplazándose con una aceleración constante a . Encontrar la fuerza electromotriz del circuito debido al movimiento de la barra en función de y .

En el instante $t=0$ la barra está sobre el eje X, un tiempo después t se encuentra en la posición indicada en la figura 1, siendo su altura sobre el vértice de la parábola

$$y = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{a}}$$

La velocidad de la barra en ese instante es $v=at$. Transcurrido un tiempo dt la barra se ha desplazado una altura $dy = v dt = at dt$ y ha barrido la superficie

$$dS = 2x dy = 2x v dt$$

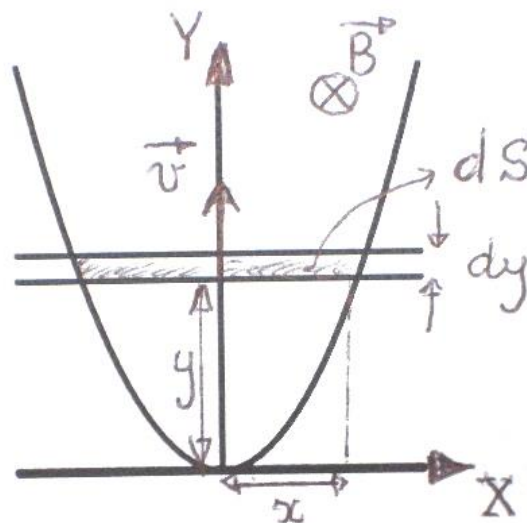


Fig.1

Como consecuencia de el desplazamiento el flujo magnético ha aumentado en

$$d\Phi_M = B \cdot dS = B 2x v dt = B 2 \sqrt{\frac{y}{k}} a t dt$$

El valor absoluto de la fuerza electromotriz es:

$$\varepsilon = \left| \frac{dB}{dt} \right| = 2B \sqrt{\frac{y}{k}} a \sqrt{\frac{2y}{a}} = 2B \sqrt{\frac{2y^2 a}{k}} = 2B y \sqrt{\frac{2a}{k}}$$

13.-En el plano XY yace un hilo conductor de longitud infinita por el que circula una corriente de intensidad I . En el mismo plano existe una barra conductora de longitud L que gira con velocidad angular constante ω , alrededor de un eje perpendicular a la varilla y que pasa por su centro. La distancia del extremo más próximo de la varilla al hilo conductor es D . a) Se pide calcular la fuerza electromotriz ε , inducida en la varilla. b) Si $I = 1 \text{ A}$, $\omega = 1 \text{ rad/s}$ y $L = 1 \text{ m}$, determinar la gráfica de ε en función de la distancia D .

Dato: $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ m kg C}^{-2}$

En la figura 1 se representa la varilla girando. En un lugar de ella se ha considerado un elemento de longitud dx , que al girar y en un tiempo dt barre un área dS , describiendo un ángulo $d\theta$.

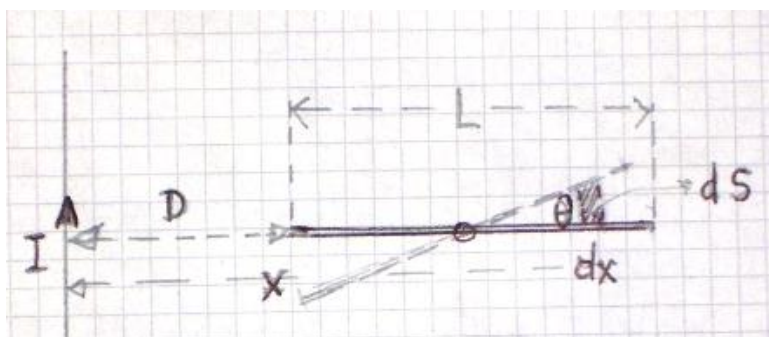


Fig.1

El área dS esta formada por un arco = ángulo \cdot radio = $d\theta \cdot \left(x - D - \frac{L}{2} \right)$ y una longitud dx

$$dS = \left(x - D - \frac{L}{2} \right) \cdot d\theta \cdot dx$$

Esta superficie es atravesada por el campo magnético B creado por el hilo conductor cuyo módulo es:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

El flujo barrido por dicha superficie en un tiempo dt , vale:

$$d\Phi = B \cdot dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \left(x - D - \frac{L}{2} \right) d\theta \cdot dx$$

De acuerdo con la ley de Faraday

$$d\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \left(x - D - \frac{L}{2} \right) \frac{d\theta}{dt} \cdot dx = -\frac{\mu_0 I \omega}{2\pi x} \left(x - D - \frac{L}{2} \right) \cdot dx$$

Hacemos extensible el valor de la fuerza electromotriz a toda la varilla

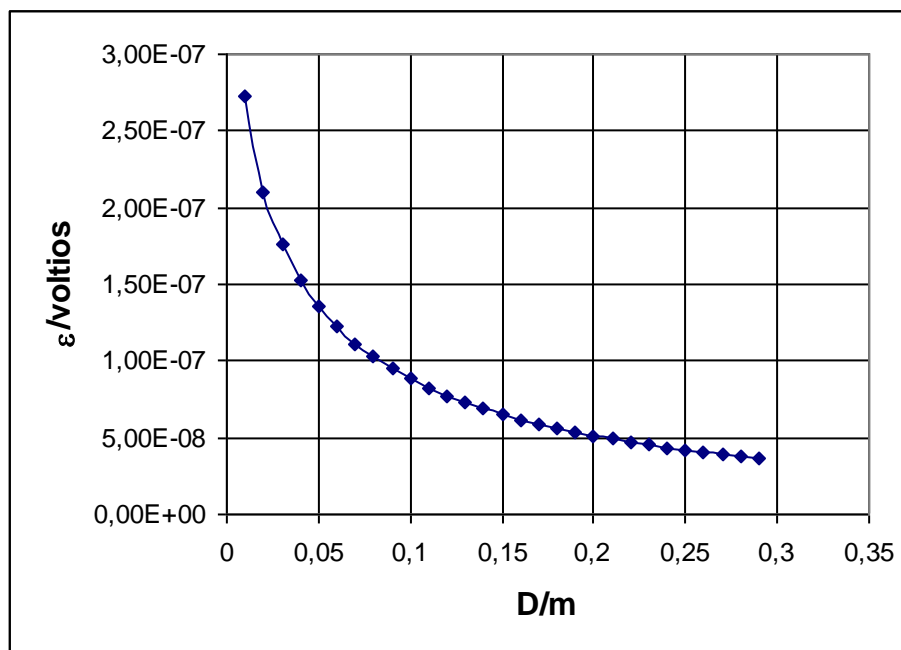
$$\varepsilon = - \int_D^{L+D} \frac{\mu_o I \omega}{2\pi x} \left(x - D - \frac{L}{2} \right) \cdot dx = - \frac{\mu_o I \omega}{2\pi} \left[\int_D^{L+D} dx - D \int_D^{L+D} \frac{dx}{x} - \frac{L}{2} \int_D^{L+D} \frac{dx}{x} \right] \Rightarrow$$

$$\varepsilon = - \frac{\mu_o I \omega}{2\pi} \left[(L+D-D) - D \left(\ln \frac{L+D}{D} \right) - \frac{L}{2} \left(\ln \frac{L+D}{D} \right) \right] = - \frac{\mu_o I \omega}{2\pi} \left[L - \left(\ln \frac{L+D}{D} \right) \left(D + \frac{L}{2} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\varepsilon = \frac{\mu_o I \omega}{2\pi} \left[\left(\ln \frac{L+D}{D} \right) \left(D + \frac{L}{2} \right) - L \right]$$

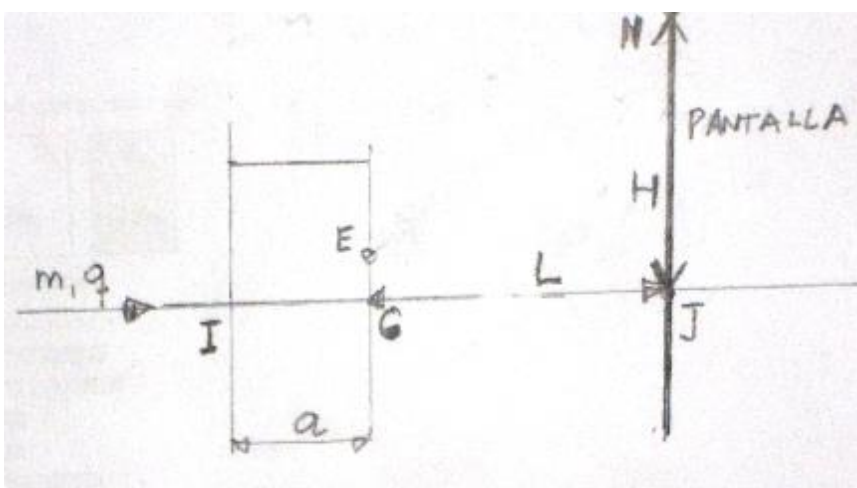
b) Sustituimos valores en la ecuación anterior

$$\varepsilon = \frac{1,26 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 1}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{1+D}{D} \right) \left(D + \frac{1}{2} \right) - 1 \right] = 2,01 \cdot 10^{-7} \left[\ln \left(\frac{1+D}{D} \right) \left(D + \frac{1}{2} \right) - 1 \right]$$



14.-Un haz de protones se acelera con una diferencia de potencial de 50 kV, el cual se dirige hacia una zona de anchura $a= 2\text{ cm}$ sobre la que se puede instalar un campo magnético uniforme B .

Cuando el campo está ausente, los protones alcanzan la pantalla en el punto J y cuando actúa el campo magnético en un punto de altura H , siendo $JH= 30\text{ cm}$ y $GJ=L= 20\text{ cm}$. Determinar la intensidad del campo magnético B .



Masa del protón $= 1,67 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$; Carga del protón $= 1,6 \cdot 10^{-19}\text{ C}$

Calculamos la velocidad de los protones

$$\frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^3}{1,67 \cdot 10^{-27}}} = 9,8 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Cuando existe un campo magnético B los protones recorren un arco de circunferencia de radio R , tal como se observa en la figura 1. El módulo de la velocidad de salida de los protones en E es igual a la de entrada en I , puesto que el campo magnético no aumenta el módulo de la velocidad aunque sí lo hace sobre su dirección. A partir de E el haz se dirige en línea recta hacia la pantalla.

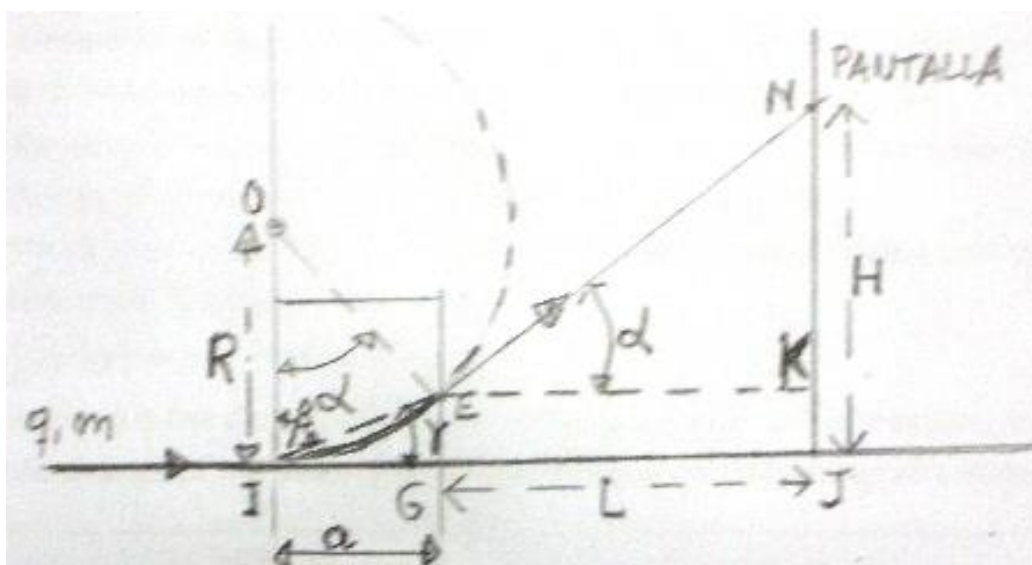


Fig 1

Cuando el haz penetra en el campo magnético la fuerza centrípeta es proporcionada por la fuerza magnética:

$$\frac{m v^2}{R} = q v B \Rightarrow B = \frac{m v}{R q}$$

Para determinar el valor de R nos fijamos en la figura 1. Designamos $GE=h$.

Del triángulo EKN deducimos que $\operatorname{tag} \alpha = \frac{H-h}{L}$ (1).

El triángulo OIE es isósceles siendo sus lados iguales a R

$$\alpha + 2\beta = \pi : \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tag} \gamma = \operatorname{tag} \frac{\alpha}{2} = \frac{h}{a} \quad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2) resulta:

$$\operatorname{tag} \alpha = \frac{H - a \operatorname{tag} \frac{\alpha}{2}}{L} = \frac{30 - 2 \operatorname{tag} \frac{\alpha}{2}}{20} = 1,5 - 0,10 \cdot \operatorname{tag} \frac{\alpha}{2} \quad (3)$$

La ecuación (3) la resolvemos por tanteo

α	$\operatorname{tag} \alpha$	$1,5 - 0,10 \operatorname{tag} (\alpha/2)$
10	0,176	1,49
50	1,19	1,45
70	2,75	1,43
60	1,73	1,44
56	1,48	1,45
55,5	1,46	1,45
55,4	1,45	1,45

Volviendo a la figura 1:

$$R = R \cos \alpha + h = R \cos \alpha + a \operatorname{tag} \frac{\alpha}{2} \Rightarrow R = \frac{a \operatorname{tag} \frac{\alpha}{2}}{1 - \cos \alpha} = \frac{2 \cdot \operatorname{tag} 27,7}{1 - \cos 55,4} = 2,43 \text{ cm}$$

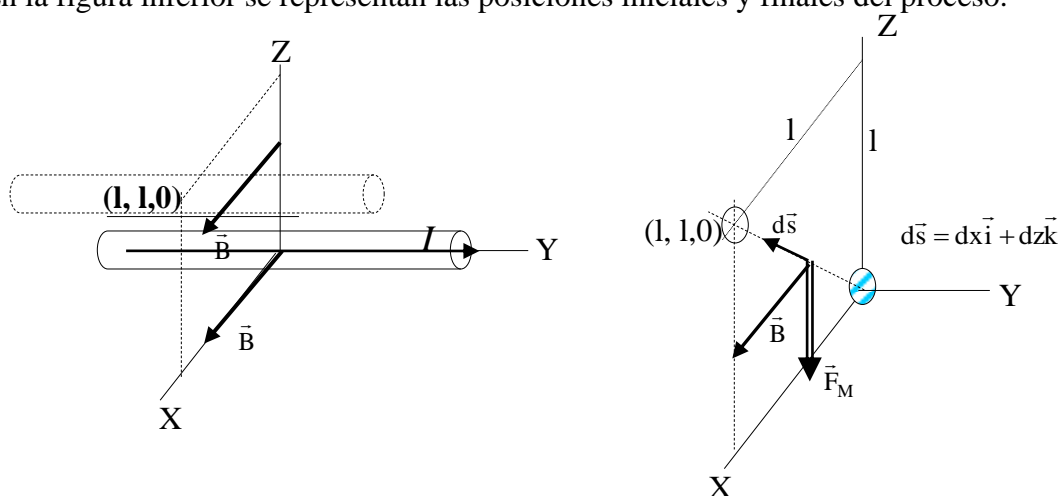
$$B = \frac{m v}{R q} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 9,8 \cdot 10^5}{2,43 \cdot 10^{-2} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,42 \text{ T}$$

15.- Un conductor rectilíneo (de masa despreciable) de longitud L está situado sobre el eje Y , ocupando sus extremos las posiciones $(y = +L/2 ; y = -L/2)$; mantiene una corriente constante de I amperios en el sentido del eje Y positivo. Un campo magnético uniforme B está dirigido en sentido positivo del eje X ocupando todo el espacio. Si el mencionado conductor se traslada paralelamente a sí mismo hasta que el centro del mismo ocupe la posición $x=l, z=l$

a) Se pide calcular el trabajo que se realiza para lograr este desplazamiento, cuando el campo magnético es uniforme.

b) El trabajo, si el módulo del campo es variable según la ecuación $B(z) = B - \rho z$, siendo ρ positivo

a) En la figura inferior se representan las posiciones iniciales y finales del proceso.



El campo magnético provoca sobre el conductor una fuerza cuya ecuación es:

$$\vec{F}_M = I\vec{L} \times \vec{B} = IL \vec{j} \times B \vec{i} = -ILB \vec{k}$$

Esta fuerza perpendicular al conductor, tiende a llevárselo en el sentido negativo del eje Z , por lo tanto, para trasladar el conductor en el sentido positivo de este mismo eje, hemos de aplicar una fuerza \vec{F} de módulo igual a la anterior, pero de sentido contrario, que efectúe un trabajo positivo. Después, para llevarlo paralelo al eje X , hasta llegar al punto considerado $(1, 1, 0)$, no hace falta más trabajo, puesto que la fuerza del campo magnético al estar según Z y ser perpendicular al camino, (paralelo al eje X), hace trabajo nulo. En efecto.

El trabajo es:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int -\vec{F}_M \cdot d\vec{s} = \int ILB \vec{k} \cdot (dx \vec{i} + dz \vec{k}) = \int_0^1 ILB dz = ILB l$$

b) La fuerza que sufre el conductor por acción del campo magnético variable es:

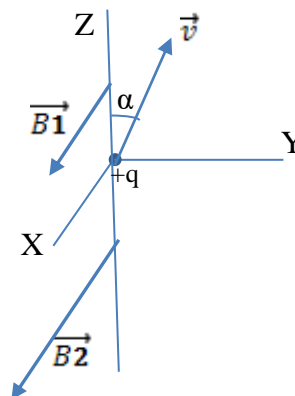
$$\vec{F}_M = I\vec{L} \times \vec{B} = IL \vec{j} \times B(z) \vec{i} = -ILB(z) \vec{k} = -IL(B - \rho z) \vec{k}$$

El trabajo es:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int -\vec{F}_M \cdot d\vec{s} = \int IL(B - \rho z)\vec{k} \cdot (dx\vec{i} + dz\vec{k}) = \int_0^1 IL(B - \rho z)dz = ILB1 - ILB\rho\frac{1^2}{2} \Rightarrow$$

$$W = ILB1\left(1 - \frac{\rho l}{2}\right)$$

16.- Una partícula de masa m y carga $+q$ se encuentra en el instante inicial sobre el eje Y , formando su velocidad un ángulo α respecto del eje Z . En el semiplano superior YZ existe un campo magnético uniforme B_1 dirigido según el eje positivo X y en el semiplano inferior un campo magnético B_2 también dirigido en el sentido positivo del eje X , siendo $B_2 > B_1$. Se pide estudiar el movimiento de la partícula a partir del instante inicial.



La partícula al penetrar en el campo B_1 sufre una fuerza perpendicular a su velocidad que modifica su dirección, pero no su módulo, de valor:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}_1$$

La velocidad \vec{v} y el campo \vec{B}_1 forman un ángulo de 90° , por lo que se puede escribir

$$F_1 = qvB_1 = m \frac{v^2}{R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{mv}{qB_1}$$

La partícula describe un arco de circunferencia OQ (figura 1) con velocidad constante. Al llegar a Q penetra en el campo magnético B_2 y describe otro arco de circunferencia QP de radio

$$F_2 = qvB_2 = m \frac{v^2}{R_2} \Rightarrow R_2 = \frac{mv}{qB_2} ; R_1 > R_2$$

Al llegar a P se repite la situación de O y a partir de este momento el movimiento se repite de forma periódica.

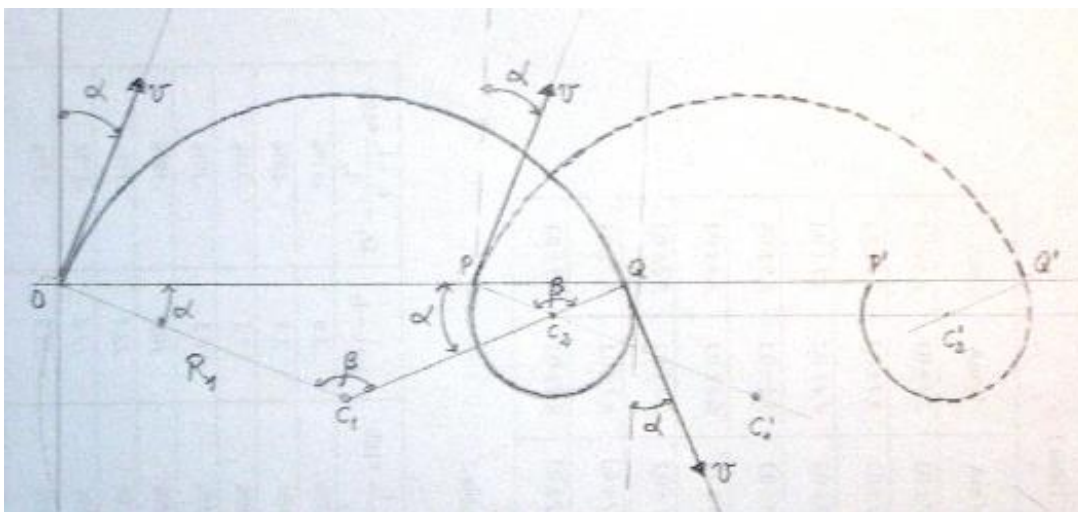


Fig.1

Vamos a calcular el periodo del movimiento. Determinamos primero el tiempo t_1 que emplea la partícula en ir desde O hasta Q.

La longitud del arco OQ vale recordando que el arco es igual al ángulo abarcado, expresado en radianes, por el radio.

$$L_{OQ} = \beta R_1$$

Del triángulo OC_1Q

$$2\alpha + \beta = \pi \Rightarrow \beta = \pi - 2\alpha \Rightarrow L_{OQ} = (\pi - 2\alpha)R_1$$

Teniendo en cuenta que el arco OQ se recorre con velocidad constante

$$t_1 = \frac{L_{OQ}}{v} = \frac{(\pi - 2\alpha)R_1}{v}$$

Calculamos ahora el tiempo que emplea la partícula en recorrer el arco QP,. Utilizamos el razonamiento anterior

$$L_{QP} = (2\pi - \beta)R_2 = (2\pi - \pi + 2\alpha)R_2 \Rightarrow t_2 = \frac{(\pi + 2\alpha)R_2}{v}$$

El periodo T del movimiento

$$T = t_1 + t_2 = \frac{(\pi - 2\alpha)R_1 + (\pi + 2\alpha)R_2}{v} = \frac{\pi(R_1 + R_2) - 2\alpha(R_1 - R_2)}{v}$$

La velocidad media con que la partícula recorre el segmento OP es:

$$v_m = \frac{OP}{T} = \frac{OQ - PQ}{T} = \frac{2R_1 \cos \alpha - 2R_2 \cos \alpha}{\frac{\pi(R_1 + R_2) - 2\alpha(R_1 - R_2)}{v}} = \frac{2v \cos \alpha (R_1 - R_2)}{\pi(R_1 + R_2) - 2\alpha(R_1 - R_2)}$$

Expresamos los radios en función de los campos magnéticos

$$R_1 - R_2 = \frac{mv}{q} \left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{B_2} \right) = \frac{mv}{q} \left(\frac{B_2 - B_1}{B_1 B_2} \right); \quad R_1 + R_2 = \frac{mv}{q} \left(\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} \right) = \frac{mv}{q} \left(\frac{B_2 + B_1}{B_1 B_2} \right)$$

Llevando estas relaciones a la velocidad media:

$$v_m = \frac{2v \cos \alpha \frac{mv}{q} \left(\frac{B_2 - B_1}{B_1 B_2} \right)}{\pi \frac{mv}{q} \left(\frac{B_1 + B_2}{B_1 B_2} \right) - 2\alpha \frac{mv}{q} \left(\frac{B_2 - B_1}{B_1 B_2} \right)} = \frac{2v \cos \alpha (B_2 - B_1)}{\pi(B_1 + B_2) - 2\alpha(B_2 - B_1)}$$

17.- Un hilo conductor de longitud L está colocado sobre el eje X positivo y recorrido por una intensidad I constante en el sentido del eje X positivo, estando uno de los extremos, designado con O , en el centro de coordenadas. Existe un campo magnético uniforme de módulo B , en la dirección positiva del eje Z . Se hace girar, respecto del eje Z , el hilo conductor moviéndolo por el plano XY a velocidad constante, hasta que el hilo alcance el eje Y positivo. Calcular el trabajo necesario para realizar este proceso.

En la figura 1a se representa el hilo en una posición cualquiera de su movimiento y en la figura 1b, visto desde el eje Z positivo.

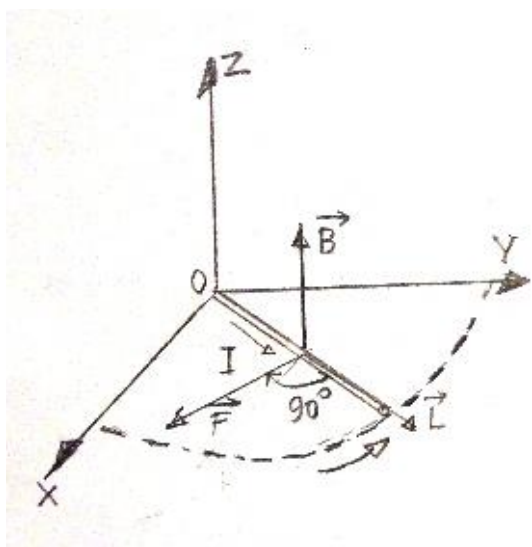


Fig.1a

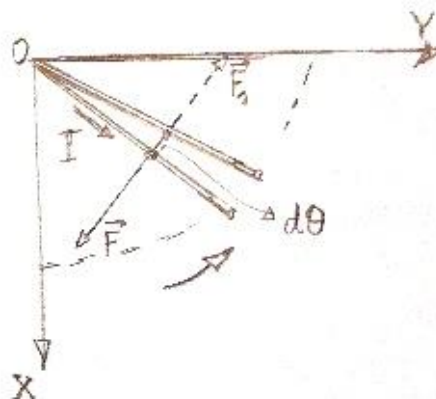


Fig.1b

El hilo en cualquier posición que ocupe en el plano XY está sometido a una fuerza dada por:

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad F = ILB$$

Esta fuerza se opone al movimiento que se pretende realizar, por lo que si deseamos girar al hilo conductor desde el eje X al Y a velocidad constante, hemos de aplicar de forma continua una fuerza igual en módulo a F y de sentido contrario que designamos con F_1 .

En la figura 1b el centro de masas del hilo conductor ha sido desplazado un ángulo $d\theta$.

Dado que el valor del arco es igual al del radio por el ángulo en radianes, $dx = \frac{L}{2} d\theta$.

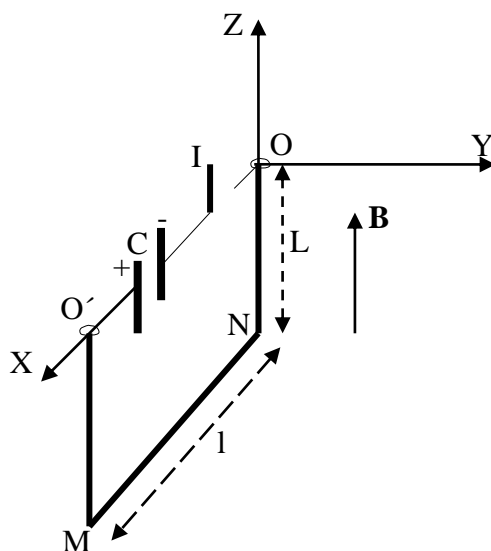
El trabajo elemental realizado por la fuerza $F_1=F$ es:

$$dW = F_1 \cdot dx = ILB \cdot \frac{L}{2} d\theta = \frac{IL^2B}{2} d\theta$$

El trabajo total lo calculamos a partir de la siguiente integral

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{IL^2B}{2} d\theta = \frac{\pi IL^2B}{4}$$

18.- En el plano XZ de la figura inferior está dispuesto un circuito con un condensador de capacidad C con un interruptor I . Articulado en O y O' se ha dispuesto un rectángulo de hilo conductor que puede balancearse sobre el eje OO' , cuyos lados iguales, que tienen la dirección del eje Z , poseen una longitud L y una masa despreciable y el tercero, con la dirección del eje $+X$, tiene una longitud l y una masa m . Existe un campo magnético uniforme B en la dirección positiva del eje Z . El condensador está cargado a una diferencia de potencial U y el interruptor I abierto. Si se cierra el interruptor y se admite que la descarga del condensador se verifica en un tiempo muy corto, y que la resistencia de los conductores es despreciable. Determinar el ángulo máximo que describe el rectángulo



El condensador al estar cargado posee una carga $q = CU$. En cuando se cierra el interruptor I , esa carga determina la aparición de una corriente eléctrica $I = \frac{q}{\Delta t}$ en el rectángulo, siendo Δt el tiempo que tarda en descargarse el condensador. Teniendo presente que en el enunciado nos dice que ese tiempo Δt es muy pequeño podemos suponer, con una aproximación razonable, que al rectángulo no le ha dado tiempo a moverse del plano XZ, mientras que por él circula una intensidad de corriente I . Esta corriente determina que exista una interacción con el campo magnético dando lugar a una fuerza cuya ecuación es para el trozo de conductor MN

$$\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow F = IlB$$

Para los conductores verticales ON y $O'M$, a pesar de pasar una intensidad I , no existe fuerza, pues la intensidad y el campo son paralelos.

La fuerza de módulo F actúa durante un tiempo muy corto lo que da lugar a un impulso de valor $F\Delta t$ y en consecuencia sobre el hilo MN aparece una variación de la cantidad de movimiento

$$F\Delta t = m\Delta v = mv \Rightarrow I\Delta t = mv \Rightarrow \frac{q}{\Delta t} I\Delta t = mv \Rightarrow v = \frac{CUIB}{m}$$

La energía cinética que adquiere MN se convierte en potencial debido a que el rectángulo al balancearse sobre OO' , se eleva una altura h .

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = \frac{C^2U^2I^2B^2}{2m^2g}$$

La relación entre la altura h y el ángulo girado θ puede deducirse de la figura 1.

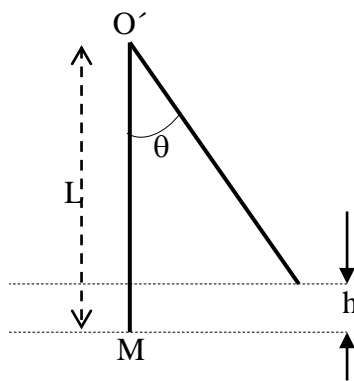
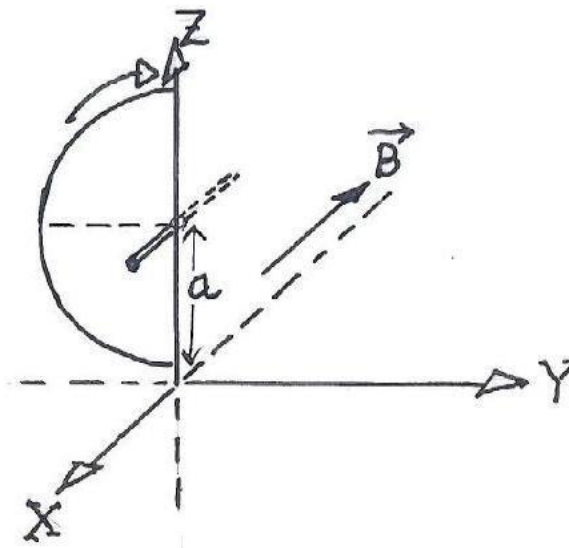


Fig 1

$$h = L - L\cos\theta \Rightarrow L(1 - \cos\theta) = \frac{C^2U^2I^2B^2}{2m^2g} \Rightarrow \cos\theta = 1 - \frac{C^2U^2I^2B^2}{2m^2Lg}$$

19.-Un hilo conductor tiene forma de semicircunferencia de radio a , y sus extremos están unidos por un hilo recto del mismo material. La superficie abarcada por esta espira es medio círculo de radio a .



La espira se coloca en el plano YZ de modo que el diámetro está sobre el eje Z . En la mitad de su diámetro existe un eje perpendicular al mismo, paralelo al eje X . Un campo magnético uniforme B tiene la dirección del eje X negativo y se extiende por el semiplano YZ positivo. La espira gira alrededor de su eje con una aceleración angular α constante. Calcular la intensidad de la corriente que aparece sobre la espira suponiendo que inicialmente su velocidad de rotación es nula. Dibujar la gráfica intensidad-tiempo para los valores de $B = 0,1 \text{ T}$, $a = 1 \text{ m}$, $\alpha = 0,4 \text{ m/s}^2$, resistencia de la espira 1Ω .

Inicialmente el flujo magnético que atraviesa la espira es nulo, por encontrarse fuera del semiplano YZ positivo, que es donde está el campo magnético. Cuando comienza a girar la espira penetra en el campo magnético y el flujo que la atraviesa aumenta hasta que la espira ha girado 180° . A partir de ahí parte de la espira sale del campo y, por tanto, el flujo comienza a disminuir de modo que cuando la espira haya girado 360° el flujo es nulo pues toda la superficie de la espira está fuera del campo. A continuación se repite el proceso.

Dado que existe variación de flujo debe aparecer una fuerza electromotriz inducida en la espira y una corriente sobre ella, de acuerdo con las leyes de Faraday de la inducción electromagnética.

Una parte de la espira se encuentra dentro del campo magnético y forma con el eje Z un ángulo φ , tal como se observa en la figura 2. Si la espira describe un ángulo $d\varphi$, en un tiempo dt , a consecuencia de ello aumenta la superficie dS de la espira dentro del campo y en definitiva el flujo que la atraviesa.

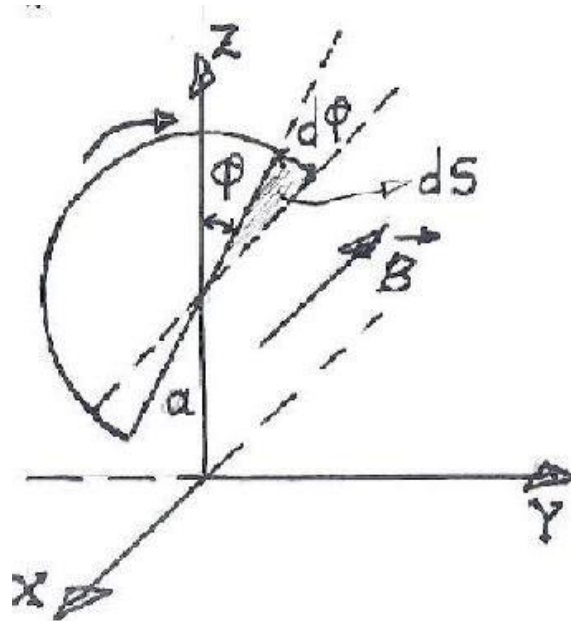


Fig.2

Calculamos la variación del flujo

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS \cos 0^\circ = B dS$$

Como dS es un sector circular de radio a :

$$\frac{\pi a^2}{2\pi \text{ rad}} = \frac{dS}{d\varphi} \Rightarrow dS = \frac{1}{2} a^2 d\varphi \Rightarrow d\Phi = \frac{1}{2} B a^2 d\varphi$$

La fuerza electromotriz inducida en la espira vale:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2} B a^2 \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{2} B a^2 \omega = -\frac{1}{2} B a^2 \alpha t$$

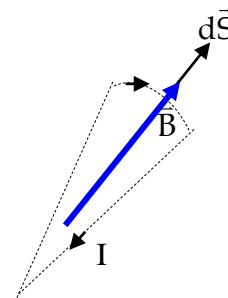
La intensidad de la corriente en la espira es:

$$I = \frac{-\frac{1}{2} B a^2 \alpha t}{R} = -Cte \cdot t \quad (1)$$

La ecuación (1) no indica que la intensidad es directamente proporcional al tiempo. Ahora debemos averiguar si la intensidad en la espira tiene siempre el mismo sentido o por el contrario cambia de sentido. Para ello recurrimos a ley de Lenz que nos dice que la corriente inducida debe oponerse a la causa que la crea. La causa que crea esa corriente es el aumento de flujo mientras la espira gira de 0° a 180° . La corriente solamente tiene dos posibilidades: girar en sentido horario o antihorario. Si gira en sentido horario la corriente inducida crea un campo que se suma a la causa externa mientras que si lo hace en sentido antihorario se opone, por consiguiente, la corriente

girará en sentido antihorario entre 0° y 180° . Entre 180° y 360° , durante el cual el flujo disminuye, la corriente será en sentido horario.

Otro procedimiento consiste en asignar un sentido arbitrario de circulación a la corriente I , en el perímetro del elemento $d\vec{S}$ y de acuerdo con él, aplicar la regla de la mano derecha. Los dedos curvados se colocan en el mismo sentido de giro de la corriente I , (señalado con rayitas y flechas en el dibujo) el pulgar situado en posición vertical, marcará la dirección y sentido del vector $d\vec{S}$, que en este caso tiene igual dirección y sentido que la del campo \vec{B} .



El signo negativo que se ha obtenido para la intensidad de la corriente en (1) significa físicamente, que el sentido real de la misma es contrario al previamente elegido. Es decir, que durante el recorrido de la espira por el semiplano-positivo XZ, la corriente circula en sentido opuesto al señalado en el dibujo anterior, por lo tanto en sentido opuesto al de las agujas del reloj.

Dado que la velocidad de rotación de la espira es cada vez mayor, el tiempo de giro de 0° a 180° es mayor que de 180° a 360° y éste mayor que de 360° a 470° y así sucesivamente.

Calculamos los tiempos:

$$\pi = \frac{1}{2} \alpha t_{0-180}^2 \Rightarrow t_{0-180} = \sqrt{2\pi\alpha} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi\alpha} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi 0,4} = 1,59 \text{ s}$$

$$2\pi = \frac{1}{2} \alpha t_{0-360}^2 \Rightarrow t_{0-360} = \sqrt{4\pi\alpha} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{\pi\alpha} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{\pi 0,4} = 2,24 \text{ s}$$

$$3\pi = \frac{1}{2} \alpha t_{0-540}^2 \Rightarrow t_{0-540} = \sqrt{6\pi\alpha} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{\pi\alpha} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{\pi 0,4} = 2,75 \text{ s}$$

$$4\pi = \frac{1}{2} \alpha t_{0-720}^2 \Rightarrow t_{0-720} = \sqrt{8\pi\alpha} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{\pi\alpha} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{\pi 0,4} = 3,17 \text{ s}$$

Sustituimos valores en la ecuación (1)

$$I = -\frac{0,1 \cdot 1^2 \cdot 0,4}{2 \cdot 1} \cdot t = -0,02 t$$

La tabla intensidad tiempo es la siguiente:

Tiempo/s	I/ A (mínimo)	I/A (máximo)
0-1,59	0	-0,032
1,59-2,24	0,032	0,045
2,24-2,75	-0,045	-0,055
2,75-3,17	0,055	0,063

