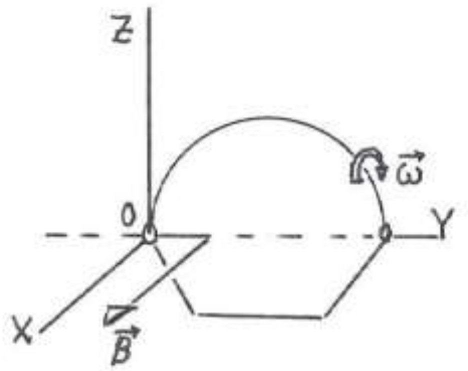
20.- En la figura inferior se muestra un circuito que inicialmente se encentra en el plano YZ. La semicircunferencia del circuito, de radio r, puede girar, con velocidad angular ω constante, alrededor de un eje OY, mientras que la otra parte del circuito está fija.



Existe un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\vec{i}$ y la resistencia del circuito es R. a) Calcular la potencia instantánea y dibujar la grafica potencia instantánea -tiempo b) La potencia media generada en el circuito. Se desprecia el campo magnético de la corriente inducida.

Ayuda :

Valor medio de una función periódica: $Y_{medio} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt$

$\int \left(sen^2 ax\right)dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} sen 2a\,x$

Designamos al vector superficie de la parte móvil del circuito mediante el vector $\vec{S} = S\vec{i} = \frac{\pi R^2}{2}\vec{i}$. En el instante t=0 el vector $\vec{B}$ y el vector $\vec{S}$ forman entre sí un ángulo de cero grados. Cuando haya transcurrido un tiempo t , la parte móvil del circuito ha girado un ángulo $\theta = \omega\, t$ y el vector $\vec{B}$ y el vector $\vec{S}$ forman entre sí un ángulo θ.

El flujo magnético que atraviesa el circuito en función de la variable tiempo es:

$$\Phi = BS\cos\theta = BS\cos\omega t$$

La figura 1 indica esta situación.

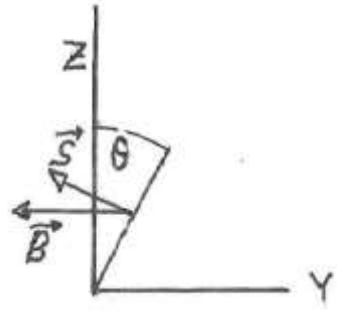


Fig.1

Dado que el flujo magnético varía a medida que transcurre el tiempo, como consecuencia de ello, aparece una fuerza electromotriz que según la ley de Lenz es:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -BS\frac{d(\cos\omega t)}{dt} = BS\omega \operatorname{sen}\omega t$$

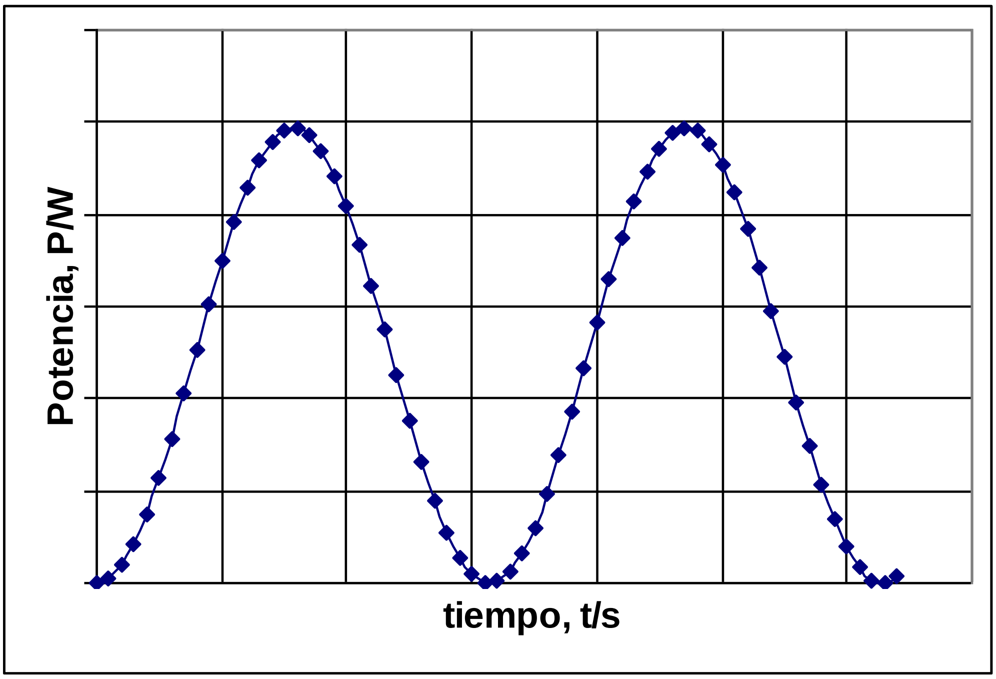
En el circuito aparece una intensidad de corriente

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BS\omega}{R}\operatorname{sen}\omega t = \frac{B\pi r^2\omega}{2R}\operatorname{sen}\omega t$$

La potencia instantánea vale:

$$P = \frac{\varepsilon^2}{R} = \frac{B^2\pi^2 r^4\omega^2}{4R}\operatorname{sen}^2\omega t = Cte\cdot \operatorname{sen}^2\omega t$$

La gráfica P-t siempre tendrá valores positivos ya que la función seno está elevada al cuadrado.



b) Como la potencia instantánea depende de una función periódica, hacemos uso de la ayuda del enunciado

$$< P > = \frac{1}{T}\int_0^T Cte\cdot \operatorname{sen}^2\omega t\cdot dt = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} Cte\cdot \operatorname{sen}^2\omega t\cdot dt \quad (1)$$

Según la ayuda

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \operatorname{sen}^2 \omega t \, dt = \frac{1}{2} t \Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} - \frac{1}{4\omega} \operatorname{sen}(2\omega t) \Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} - \frac{1}{4\omega} \left[\operatorname{sen} 2\omega \cdot \frac{2\pi}{\omega} - \operatorname{sen} 0^{o} \right] = \frac{\pi}{\omega}$$

Sustituyendo en al ecuación (1)

$$< P >= \frac{\omega}{2\pi} \cdot Cte \cdot \frac{\pi}{\omega} = \frac{Cte}{2} = \frac{B^2 \pi^2 r^4 \omega^2}{8\,R}$$

21.- Un conductor cilíndrico de radio a y longitud infinita esta situado en el eje Z y lo recorre una corriente constante de intensidad I y sentido positivo del eje Z. En un determinado instante un electrón abandona la superficie del conductor con una velocidad de módulo v_o dirigida según el eje X positivo. Debido a la acción del campo magnético creado por el conductor, el electrón se separa hasta una distancia máxima del eje del conductor que designamos con x_m. Calcular el valor de x_m.

En la figura 1 se representa una línea de campo, que es una circunferencia de radio x, creada por el conductor y el vector campo en una determinada posición.

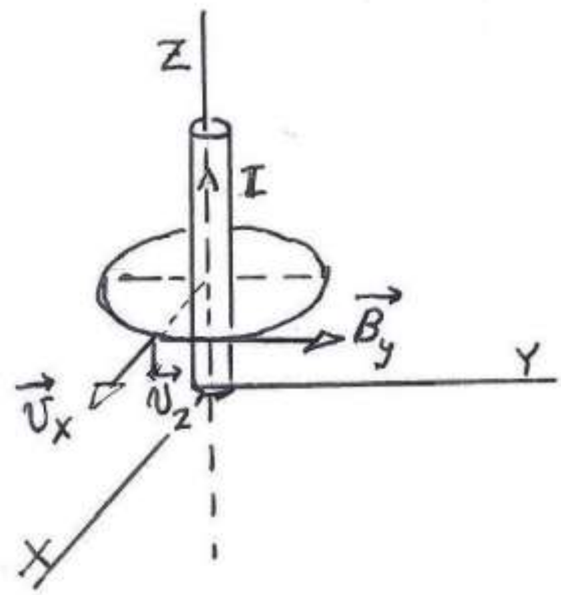


Fig.1

El vector campo es tangente a esa línea en cualquier punto, siendo su módulo:

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi x}$$

El vector campo en el punto del plano XZ, tangente a la línea del campo (ver la figura 1) es:

$$\vec{B}_y = \frac{\mu_o I}{2\pi x}\vec{i}$$

Al abandonar el electrón el conductor su velocidad está sobre el eje X positivo. Nada más salir el electrón del conductor interacciona con el campo magnético y sufre una fuerza vertical y hacia abajo, esto es, hacia el eje Z negativo, puesto que.

$$\vec{F} = -q\,\vec{v}_o \times \vec{B}_y$$

Como resultado de esta fuerza aparece una componente de la velocidad en el sentido del eje Z negativo y otra en la dirección del eje X positivo.

En la figura 2 se representa la situación del electrón a una cierta distancia del conductor. La velocidad tiene dos componentes, una en dirección y sentido del eje X positivo y otra en la dirección y sentido del eje Z negativo.

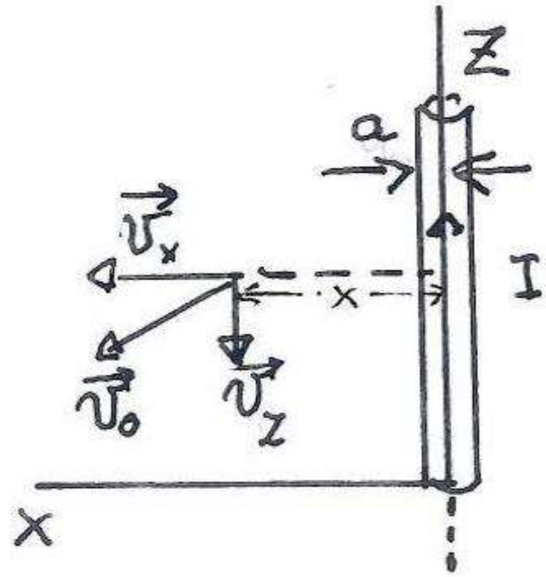


Fig.2

Analizamos ahora cómo interactúa el electrón con el campo magnético.

$$\vec{F} = -q\,\vec{v}_o \times \vec{B}_y = -q\vec{v}_x \times \vec{B}_y - q\vec{v}_z \times \vec{B}_y = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_1 = -q\,\vec{v}_x \times \vec{B}_y = -q\,v_x\,\vec{i} \times \frac{\mu_o I}{2\pi x}\,\vec{j} = -q\,v_x\,\frac{\mu_o I}{2\pi x}\,\vec{k}$$

El efecto de la fuerza $\vec{F}_1$ es acelerar al electrón en la dirección del eje Z negativo.

$$\vec{F}_2 = -q\,\vec{v}_z \times \vec{B}_y = -q\,v_z\left(-\vec{k}\right) \times \frac{\mu_o I}{2\pi x}\,\vec{j} = -q\,v_z\,\frac{\mu_o I}{2\pi x}\,\vec{i} \quad (1)$$

El efecto de la fuerza $\vec{F}_2$ es desacelerar al electrón en la dirección del eje X, como consecuencia de esta desaceleración el módulo v_x irá disminuyendo y cuando alcance la máxima distancia del conductor su v_x será nulo.

A partir de la ecuación (1), escribimos

$$-\frac{q\,\mu_o I}{2\pi x}\,v_z = m\frac{dv_x}{dt} = m\frac{dv_x}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = m\,v_x\,\frac{dv_x}{dx} \quad (2)$$

Para integrar la ecuación (2) debemos buscar una relación entre v_z y v_x

Tenemos en cuenta que la fuerza del campo magnético no hace trabajo sobre el electrón por ser perpendicular a su vector velocidad y en consecuencia éste conserva su energía cinética y solo lo desvía de su dirección inicial, por tanto, ésta debe conservarse, o en otras palabras el módulo de la velocidad inicial no puede variar, por ello:

$$v_x^2 + v_z^2 = v_o^2 \quad \Rightarrow \quad v_z = \sqrt{v_o^2 - v_x^2}$$

La ecuación (2) se convierte en

$$\int -\frac{q\mu_o I}{2\pi m}\frac{dx}{x} = \int \frac{v_x dv_x}{\sqrt{v_o^2 - v_x^2}} \quad (3)$$

La primera integral es inmediata y para resolver la segunda hacemos el cambio de variable

$$v_o^2 - v_x^2 = p^2 \quad \Rightarrow \quad -v_x dx = p\,dp$$

$$\int \frac{v_x dv_x}{\sqrt{v_o^2 - v_x^2}} = -\int \frac{p\,dp}{p} = -p + Cte = -\sqrt{v_o^2 - v_x^2} + Cte$$

Llevando esta ecuación a (3), resulta.

$$\frac{q\mu_o I}{2\pi m}\ln x = \sqrt{v_o^2 - v_x^2} + Cte$$

Para determinar el valor de la constante recurrimos a las condiciones iniciales en las que cuando x=a , $v_x = v_o$

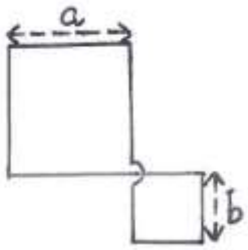
$$\frac{q\mu_o I}{2\pi m}\ln a = Cte$$

$$\frac{q\mu_o I}{2\pi m}\ln x = \sqrt{v_o^2 - v_x^2} + \frac{q\mu_o I}{2\pi m}\ln a \Rightarrow \sqrt{v_o^2 - v_x^2} = \frac{q\mu_o I}{2\pi m}(\ln x - \ln a) = \frac{q\mu_o I}{2\pi m}\ln\frac{x}{a}$$

La separación máxima del electrón del conductor hemos dicho que ocurre cuando v_x=0

$$v_o = \frac{q\,\mu_o I}{2\pi m}\ln\frac{x_m}{a} \quad \Rightarrow \quad x_m = a\,e^{\frac{2\pi m v_o}{\mu_o q\ I}}$$

22.-Con un hilo de longitud L= 2 m, siendo la resistencia por unidad de longitud ρ =10 Ω /m, se construyen dos cuadrados como indica la figura.



Ambos se sitúan en un plano horizontal donde existe un campo magnético variable con el tiempo, $B = B_0 \cos\omega t$, perpendicular al plano que forman los cuadrados.

a) Determinar la intensidad que recorre el circuito si

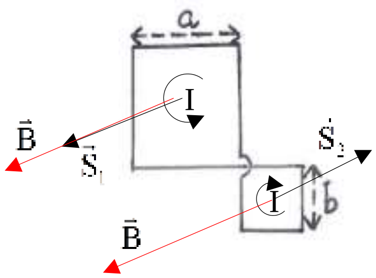
$$B_o = 0,5\ T \quad y \quad \omega = 0,6\ s^{-1}$$

b) Dibujar la intensidad frente al tiempo cuando a=0,4 m y a=0,3 m.

Ahora consideramos una sola espira cuadrada del mismo hilo de lado inicial a= 0,5 m y situada en el mismo campo magnético. Dicha espira disminuye su área (y por tanto la longitud de la periferia de la espira) a un ritmo dado por la ecuación: $S = a^2 - 0,009t$.

c) Calcular la fuerza electromotriz inducida y dibujar la gráfica intensidad tiempo.

Para calcular el flujo vamos a asignar arbitrariamente un sentido a la corriente inducida I. Tomaremos para I en el cuadrado de lado a, el sentido de las agujas del reloj y como está conectado al cuadrado de lado b, en éste necesariamente la corriente tendrá que ir en sentido contrario.



Vamos a asignar un vector superficie perpendicular a cada cuadrado, de acuerdo con el siguiente criterio: Se cierran los dedos **de la mano derecha** pero situando el pulgar estirado en dirección perpendicular, ahora se hacen coincidir los dedos con el sentido de la corriente y el pulgar, señalará en la dirección y el sentido del vector superficie $\vec{S}$. En este caso, como la corriente tiene sentido contrario en cada cuadrado, tendremos que definir dos vectores superficies $\vec{S}_1$ y $\vec{S}_2$ cuyas direcciones y sentidos aparecen en el dibujo.

El flujo a través del circuito es la suma de los flujos a través de cada cuadrado.

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \vec{B}\cdot\vec{S}_1 + \vec{B}\cdot\vec{S}_2 = BS_1 \cos 0 + BS_2 \cos 180 = B(S_1 - S_2) = (S_1 - S_2)B_o \cos \omega t$$

$$\Phi = (a^2 - b^2)B_o \cos\omega t$$

De acuerdo con la ley de Faraday la fuerza electromotriz inducida vale.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(a^2 - b^2)B_o \cos \omega t = (a^2 - b^2)B_o \omega \mathrm{sen}\omega t$$

La intensidad de la corriente:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{(a^2 - b^2)B_o\, \omega \mathrm{sen}\omega t}{R} = \frac{B_o(a^2 - b^2)\omega \mathrm{sen}\omega t}{4\rho(a+b)} = \frac{B_o(a - b)\omega \mathrm{sen}\omega t}{4\rho}$$

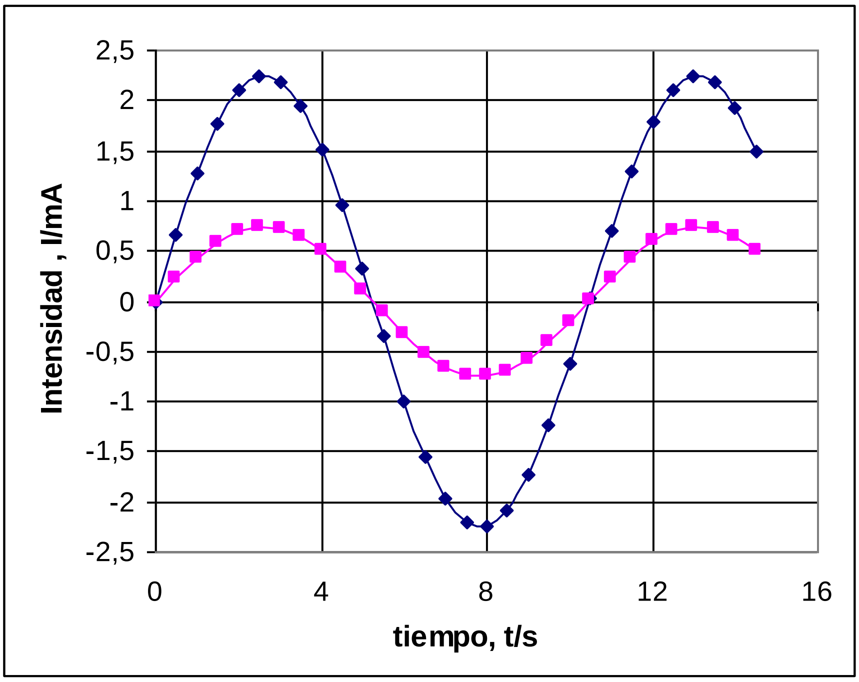
b) Calculamos en cada caso el valor de b.

$$L = 4a + 4b \Rightarrow b = \frac{L - 4a}{4} = \frac{2 - 1{,}6}{4} = 0{,}1\,\mathrm{m} \quad ; \quad b = \frac{L - 4a}{4} = \frac{2 - 1{,}2}{4} = 0{,}2\,\mathrm{m}$$

Las ecuaciones para cada valor de a son:

$$I(a = 0{,}4) = \frac{B_o(a - b)\omega \mathrm{sen}\omega t}{4\rho} = \frac{0{,}5\cdot(0{,}4 - 0{,}1)\cdot 0{,}6 \cdot \mathrm{sen}\,0{,}6t}{4\cdot 10} = 2{,}25.10^{-3}\cdot \mathrm{sen}\,0{,}6t$$

$$I(a = 0{,}3) = \frac{B_o(a - b)\omega \mathrm{sen}\omega t}{4\rho} = \frac{0{,}5\cdot(0{,}3 - 0{,}2)\cdot 6 \cdot \mathrm{sen}\,0{,}6t}{4\cdot 10} = 0{,}75.10^{-3}\cdot \mathrm{sen}\,0{,}6t$$



Observe que cuando los dos cuadrados sean iguales no existe corriente.

c)

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = B_0 \cos\omega t \cdot \left(a^2 - 0{,}009t\right) = B_0\, a^2 \cos\omega t - 0{,}009t \cdot B_0 \cos\omega t$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\left[-B_o a^2 \omega \operatorname{sen}\omega t - \left(-0{,}009t \cdot B_o\, \omega\, \operatorname{sen}\omega t + B_o \cos\omega t \cdot 0{,}009\right)\right] \Rightarrow$$

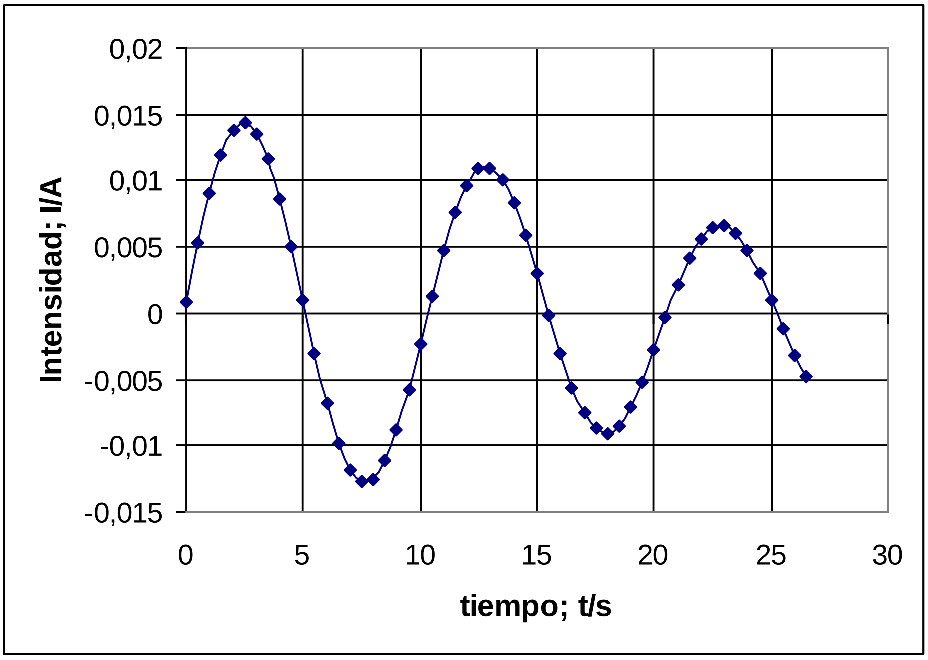
$$\varepsilon = B_o \omega \operatorname{sen}\omega t\left(a^2 - 0{,}009t\right) + B_o\, 0{,}009 \cos\omega t$$

$$\varepsilon = \left(0{,}075 - 0{,}0027t\right)\operatorname{sen} 0{,}6t + 0{,}0045 \cos 0{,}6t$$

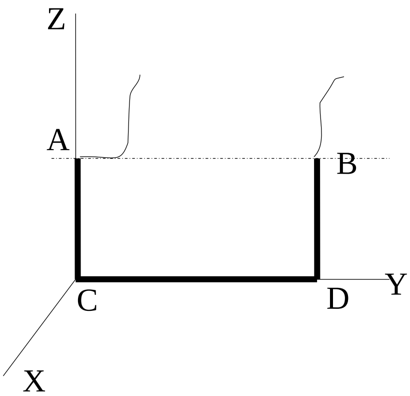
La resistencia eléctrica de la espira disminuye al paso del tiempo ya que su perímetro disminuye.

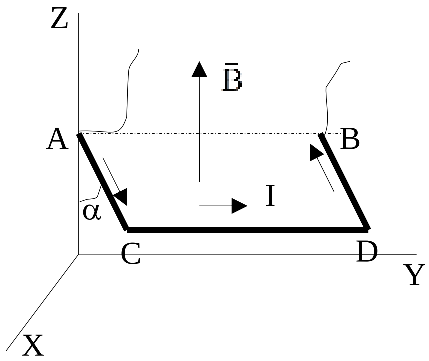
$$S = \left(a^2 - 0{,}009t\right) = l^2 \quad \Rightarrow \quad R = \rho\, l = \rho\sqrt{a^2 - 0{,}009t} = 10\sqrt{0{,}25 - 0{,}009t}$$

$$I = \frac{(0{,}075 - 0{,}0027t)\operatorname{sen} 0{,}6t + 0{,}0045 \cos 0{,}6t}{\sqrt{25 - 0{,}9t}}$$


0,02
0,015
0,01
0,005
0
-0,005
-0,01
-0,015
Intensidad; I/A
0
5
10
15
20
25
30
tiempo; t/s

23.-Con un alambre conductor, de masa por unidad de longitud λ, se forma un circuito como el indicado en la figura, el cual se encuentra en el plano YZ. En A y B el circuito puede oscilar. Por A se envía una corriente de intensidad I que sale por B. En la dirección del eje Z y sentido positivo existe un campo magnético constante B. El circuito oscila y se desvía del plano XY un cierto ángulo, hasta quedar en equilibrio. Determinar el valor del ángulo
Dimensiones del circuito. AC=DB= a ; CD = 2a





Sobre el circuito actúan dos tipos de fuerzas: una el peso del mismo cuya fuerza está aplicada en el centro de masas y las fuerzas de interacción de la corriente con el campo magnético.
Calculamos en primer lugar la situación del centro de masas del circuito. Por simetría se deduce que tiene que estar sobre una recta paralela a los lados menores y que pase por el centro de CD, que es el punto P de la figura 1.

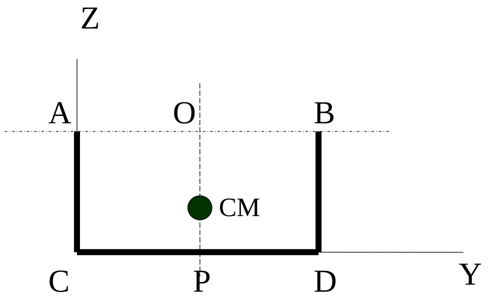


Fig.1

El centro de masas de AC tiene de coordenadas (0, 0, a/2). El lado DB tiene de coordenadas (0, 2a , a/2) . El centro de masas del lado CD tiene de coordenadas (0,a, 0). Las masas de los lados son respectivamente:

$$m_{AC} = m_{DB} = \lambda a \; ; \; m_{CD} = 2a\lambda \Rightarrow$$

$$z_{CM} = \frac{m_{AC} \cdot \frac{a}{2} + m_{DB} \cdot \frac{a}{2} + m_{CD} \cdot 0}{m_{AC} + m_{DB} + m_{CD}} = \frac{\lambda \frac{a^2}{2} + \lambda \frac{a^2}{2}}{\lambda a + \lambda a + \lambda 2a} = \frac{a}{4}$$

La distancia del centro de masas al punto O es: $a-\frac{a}{4}=\frac{3a}{4}$

Calculamos las fuerzas de interacción entre las corrientes y el campo magnético

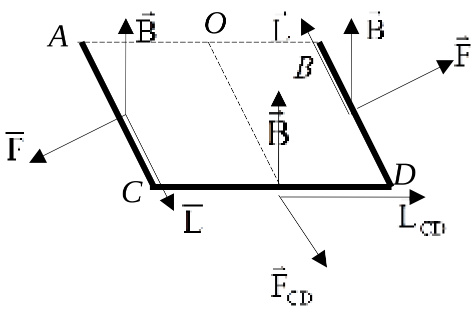


Fig. 2

Las fuerzas sobre los lados, están dadas por el producto vectorial $\vec{F}=I\,\vec{l}\times\vec{B}$. Para los lados AC y DB la fuerza tiene el mismo módulo y la misma dirección y sentido contrario, en consecuencia, considerando a los alambres como un sólido rígido, al trasladar las fuerzas al c.d.m. su suma es nula. El módulo de la fuerza sobre CD es:

$$F_{CD}=I\,L_{CD}B=2aI\,B$$

En la figura 3 observamos el circuito desde una posición lateral de modo que el lado CD esté perpendicular al plano del papel, y lo representamos por un círculo negro. De puntos dibujamos una línea imaginaria que pasa por O y por el centro de masas CM.

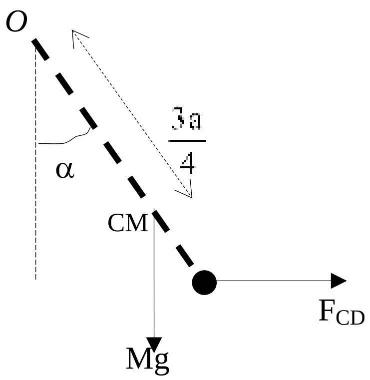


Fig. 3

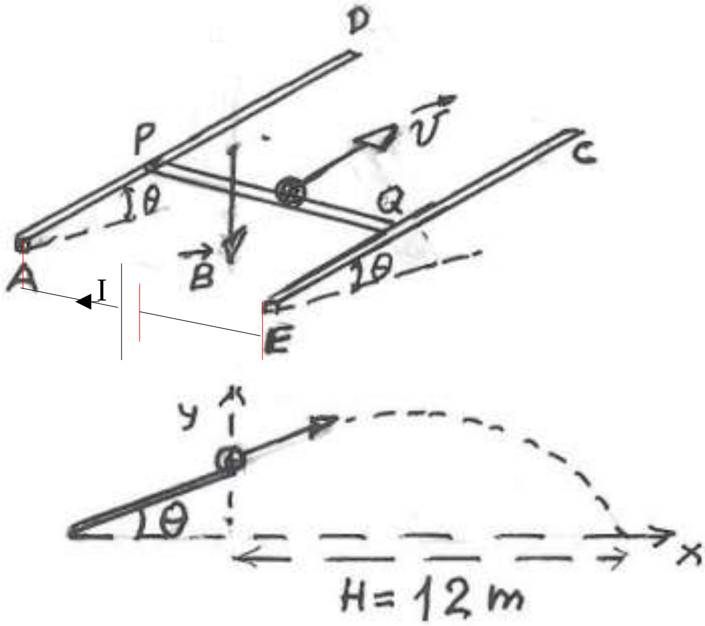
M = 4λa, es la masa total del circuito que actúa en el centro de masas. Tomamos momentos respecto de O del Peso y de F_{CD}. Sus módulos son respectivamente:

$$Mg\cdot\overline{OCM}\,\text{sen}\,\alpha=Mg\frac{3a}{4}\text{sen}\,\alpha \quad ; \qquad F_{CD}\cdot a\cos\alpha=2aIBa\cos\alpha$$

Dado que el circuito está en equilibrio los módulos de los momentos son iguales.

$$M g \frac{3a}{4} \operatorname{sen}\alpha = 2aIBa\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tag}\alpha = \frac{2aIB}{Mg\frac{3}{4}} = \frac{2aIB}{4\lambda a g\frac{3}{4}} = \frac{2IB}{3\lambda g}$$

24.-Con el dispositivo electromagnético de la figura se consigue lanzar un cuerpo de masa m= 2 kg al aire.
El dispositivo consta de dos barras conductoras iguales y paralelas (AD y EC) de 6,0 m de longitud.



Sobre ellas desliza una barra, también conductora, PQ de longitud 1 m y masa despreciable. Las barras, respecto del suelo horizontal, forman un cierto ángulo θ. Este ángulo se puede variar.
Perpendicular al plano AECD existe un campo magnético uniforme de módulo B = 2T. El dispositivo (cañón electromagnético) funciona cuando por los extremos AE se conecta una fuente de corriente continua que proporciona una intensidad constante de 30 amperios. El conjunto de todo el sistema de barras posee una resistencia de R = 1 Ω.
La barra PQ comienza su movimiento (v=0) en AE y termina en DC . Al llegar a ese lugar la masa m se desprende y viaja por el aire. El impacto de la masa m con el suelo se produce a una distancia horizontal H = 12 m respecto de su punto de salida.
Calcular el ángulo θ de lanzamiento y el tiempo total que emplea la masa m desde que sale de AE hasta que impacta con el suelo. Se admite que los rozamientos son despreciables.
a) Realizar el cálculo suponiendo despreciable la corriente inducida.
b) Teniendo en cuenta la corriente inducida.
Tome g = 10 m/s²

Ayuda.- $L\frac{di}{dt}+R\,i=E \;\Rightarrow\;$ solución: $\quad i=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

a) Para que el sistema de lanzamiento funcione debe actuar sobre la barra una fuerza electromagnética en sentido ascendente, para lo cual es necesario que la intensidad de la corriente que circula por la barra PQ lo haga en el sentido de PQ, esto significa que el polo positivo de la fuente debe ser el extremo A y el negativo el E. Esto se deduce de la ecuación electromagnética de la fuerza que sufre un conductor en el seno de un campo magnético

$$\vec{F} = I\vec{L}\times\vec{B} = I\ \ \vec{PQ}\times\vec{B}$$

Siendo el módulo de la fuerza

$$F = I\cdot L\cdot B\,\mathrm{sen}90º = I\,L\,B$$

Si observamos la barra mirando desde el extremo Q, deducimos que sobre el c.d.m. existen tres fuerzas: la citada anteriormente, la componente del peso de la masa m y la fuerza normal de reacción N (figura 1). Esta fuerza N la proporcionan las barras paralelas AD y EC en los puntos de contacto con la barra, en P y Q. donde en cada uno la reacción vele N/2.

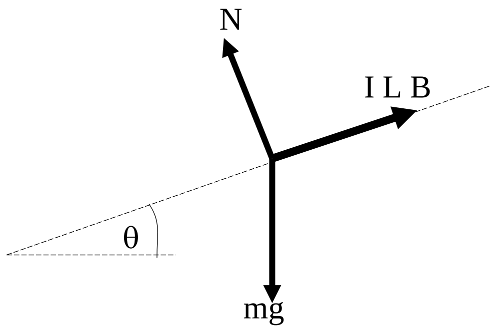


Fig.1

Respecto de la dirección de avance de la barra PQ hacia los puntos C y D, el módulo de la fuerza resultante es:

$$F_R = I\,L\,B - m\,g\,\mathrm{sen}\theta = ma \Rightarrow a = \frac{I\,L\,B - m\,g\,\mathrm{sen}\theta}{m} = \frac{30\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 10\cdot \mathrm{sen}\theta}{2} = (30 - 10\cdot\mathrm{sen}\theta)\,\frac{m}{s^2}$$

El movimiento de la barra PQ acompañado de la masa m es uniformemente acelerado, partiendo del reposo.

$$v = a\cdot t = (30 - 10\mathrm{sen}\theta)t\ ;\ AD = 6 = \frac{1}{2}(30 - 10\mathrm{sen}\theta)t^2\ ;\quad t = \sqrt{\frac{1{,}2}{3 - \mathrm{sen}\theta}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = (30 - 10\mathrm{sen}\theta)\sqrt{\frac{1{,}2}{3 - \mathrm{sen}\theta}} = \sqrt{120(3 - \mathrm{sen}\theta)}\ \ \frac{m}{s}$$

La velocidad con que la masa m abandona la barra PQ es v, describiendo en el aire una parábola. Las ecuaciones del movimiento respecto de ejes situados con origen en el suelo y situados en el pie del final de las barras, son las siguientes:

$$x = \sqrt{120(3 - \mathrm{sen}\theta)}\ \cos\theta\cdot t\ ;\quad y = AD\cdot\mathrm{sen}\theta + \sqrt{120(3 - \mathrm{sen}\theta)}\ \mathrm{sen}\theta\cdot t - \frac{1}{2}10t^2$$

Cuando x = H = 12 m; t es el tiempo de vuelo en el aire de la masa m y que designamos como t_v cuando llega a y=0

$$12=\sqrt{120(3-\text{sen}\theta)}\cos\theta\cdot t_v \quad (1); \quad 0=6{,}0\,\text{sen}\theta+\sqrt{120(3-\text{sen}\theta)}\ \text{sen}\theta\cdot t_v-5t_v^2 \quad (2)$$

La primera ecuación la elevamos al cuadrado, resulta:

$$144=120(3-\text{sen}\theta)\cdot\cos^2\theta\cdot t_v^2 \Rightarrow 1{,}2=(3-\text{sen}\theta)\cdot\cos^2\theta\cdot t_v^2 \quad (3)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones (2) y (3), en la ecuación (3) damos valores al ángulo θ, obtenemos t_v, y ambos valores los sustituimos en (2), cuando el resultado sea nulo, hemos encontrado los valores del tiempo de vuelo y del ángulo.

Ángulo θ/ º	S=(3-sen θ) $\cos^2\theta$	$t_v=\sqrt{\frac{1{,}2}{S}}$
40	1,383	0,93
50	0,923	1,14
60	0,533	1,50
70	0,241	2,23
80	0,061	4,44

Ángulo θ/ º	$t_v=\sqrt{\frac{1{,}2}{S}}$	P= $\sqrt{120(3-\text{sen}\theta)}\text{sen}\theta\cdot t_v+$ $+6\text{sen}\theta$	$-5t_v^2$	P-5t^2
40	0,93	13,9	-4,32	9,6
50	1,14	18,9	-6,5	12,4
60	1,50	26,0	-11,2	14,8
70	2,23	38,6	-24,9	13,7
80	4,44	68,0	-98,6	-30,6

El valor de θ está comprendido entre 70º y 80º, afinado de nuevo el cálculo

Ángulo θ/ º	S=(3-sen θ) $\cos^2\theta$	$t_v=\sqrt{\frac{1{,}2}{S}}$
75	0,14	3,0
77	0,10	3,4

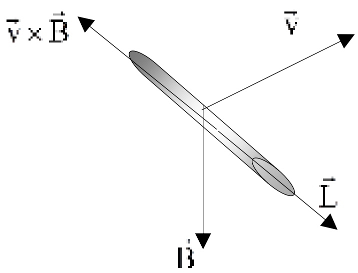
Ángulo θ/ º	$t_v=\sqrt{\frac{1{,}2}{S}}$	P= $\sqrt{120(3-\text{sen}\theta)}\text{sen}\theta\cdot t_v+$ $+6\text{sen}\theta$	$-5t_v^2$	P-5t^2
75	3,0	51,0	-45	6,0

77	3,4	57,5	-57,8	-0,3

El tiempo total es:

$$t_{total} = t + t_v = \sqrt{\frac{1,2}{3 - \mathrm{sen}77}} + 3,0 = 3,8\ \mathrm{s}$$

b) La f.e.m. inducida debida al movimiento de la barra PQ en el seno del campo magnético, responde a la ecuación $\varepsilon = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{L}$. Donde $\vec{L}$ es un vector en la dirección de la barra móvil y en el mismo sentido de la corriente.



En la figura se observa que los vectores $\vec{v} \times \vec{B}$ y $\vec{L}$ tienen la misma dirección y sentido contrario, por lo tanto el valor del producto mixto que proporciona la f.e.m. vale:

$$\varepsilon = \left|\vec{v} \times \vec{B}\right| \left|\vec{L}\right| \cos 180 = -vBL$$

La corriente inducida debido a esta f.e.m. es: $i = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{BLv}{R}$

La intensidad resultante en el circuito es: $I_F = I + i = I - \frac{BLv}{R}$

La intensidad i disminuye a la intensidad I aplicada por la batería ya que su efecto es oponerse a la causa introducida, esto es, I hace avanzar a PQ mientras que i se debe oponer, para no violar el principio de conservación de la energía.

De acuerdo con la explicado en el apartado a) tenemos al aplicar la ecuación de la Dinámica, $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$.

$$(I - i)LB - mg\,\mathrm{sen}\theta = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow ILB - \frac{B^2L^2v}{R} - mg\,\mathrm{sen}\theta = m\frac{dv}{dt}$$

En la última ecuación hacemos:

$$\text{ILB} - \text{mg}\,\text{sen}\theta = \text{P} \quad ; \quad \frac{\text{B}^2\,\text{L}^2}{\text{R}} = \text{Q}$$

Por tanto:

$$\text{m}\frac{\text{dv}}{\text{dt}} + \text{Q}\,\text{v} = \text{P}$$

Comparando con la ayuda del problema

$$\text{L}\frac{\text{di}}{\text{dt}} + \text{RI} = \text{E} \Rightarrow \quad \text{solución} \quad \Rightarrow \text{i} = \frac{\text{E}}{\text{R}}\left(1 - \text{e}^{-\frac{\text{R}}{\text{L}}\text{t}}\right)$$

$$\text{m}\frac{\text{dv}}{\text{dt}} + \text{Qv} = \text{P} \Rightarrow \quad \text{solución} \quad \Rightarrow \text{v} = \frac{\text{P}}{\text{Q}}\left(1 - \text{e}^{-\frac{\text{Q}}{\text{m}}\text{t}}\right)$$

Los valores de P y Q son:

$$\text{P} = 30 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 10 \cdot \text{sen}\theta = 60 - 20\text{sen}\theta \quad ; \quad \text{Q} = \frac{2^2 \cdot 1^2}{1} = 4$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de la velocidad:

$$\text{v} = \frac{60 - 20\,\text{sen}\,\theta}{4}\left(1 - \text{e}^{-2\text{t}}\right) = \left(15 - 5\,\text{sen}\,\theta\right)\left(1 - \text{e}^{-2\text{t}}\right)$$

La velocidad con que la masa m abandona la barra PQ es v, describiendo en el aire una parábola. Las ecuaciones del movimiento son las siguientes:

$$\text{x} = (15 - 5\text{sen}\theta)\left(1 - \text{e}^{-2\text{t}}\right)\cos\theta\ \text{t} \qquad \text{y} = 6\text{sen}\theta + (15 - 5\text{sen}\theta)\left(1 - \text{e}^{-2\text{t}}\right)\text{sen}\theta\text{t} - 5\text{t}^2$$

Cuando x = 12 m , y=0

$$(15 - 5\text{sen}\theta)\left(1 - \text{e}^{-2\text{t}}\right) = \frac{12}{\cos\theta\ \text{t}} \quad (4); \quad 0 = 6\text{sen}\theta + \frac{12}{\cos\theta\ \text{t}} \cdot \text{sen}\theta\ \text{t} - 5\text{t}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = 6\text{sen}\theta + 12\,\text{tag}\,\theta - 5\text{t}^2 \quad \Rightarrow \quad \text{t} = \sqrt{\frac{6\text{sen}\theta + 12\,\text{tag}\,\theta}{5}} \quad (5)$$

Utilizaremos las ecuaciones (4) y (5). En la cinco damos valores al ángulo y obtenemos t , llevamos esos valores a (4) y cuando los dos miembros de la ecuación sean iguales hemos encontrado las soluciones del tiempo y del ángulo.

Ángulo / º	Tiempo/s
50	1,94

60	2,28
70	2,78

Ángulo/º	Tiempo/s	$(15-5\text{sen}\theta)\left(1-e^{-2t)}\right)$	$\dfrac{12}{\cos\theta\ t}$
50	1,94	10,9	9,62
60	2,28	10,6	10,5
70	2,78	10,3	12,6

Afinamos el resultado:

Ángulo / º	Tiempo/s
61	2,32
60,5	2,30
60,4	2,30

Ángulo/º	Tiempo/s	$(15-5\text{sen}\theta)\left(1-e^{-2t)}\right)$	$\dfrac{12}{\cos\theta\ t}$
61	2,32	10,5	10, 7
60,5	2,30	10,5	10,6
60,4	2,30	10,5	10,56

Las soluciones son: ángulo = 60,4º , tiempo de vuelo 2,30 segundos .

Para averiguar el tiempo total hemos de calcular el que emplea la barra PQ en recorrer la distancia de 6 m .

Calculamos la ecuación de la velocidad para el ángulo θ = 60,4º

$$v = (15-5\text{sen } 60{,}4^{\circ})\left(1-e^{-2t}\right) = 10{,}7-10{,}7e^{-2t}$$

$$x = 6 = \int_0^{t_R} v\,dt = \int_0^{t_R} 10{,}7\,dt - 10{,}7\int_0^{t_R} e^{-2t}dt = 10{,}7t_R - \frac{10{,}7e^{-2t_R}}{-2} = 10{,}7\,t_R + 5{,}35.e^{-2t_R}$$

La ecuación anterior la resolvemos por tanteo

t_R/s	$10{,}7\ t_R+5{,}35\ e^{-2t_R}$
0,4	6,68>6
0,3	6,14>6

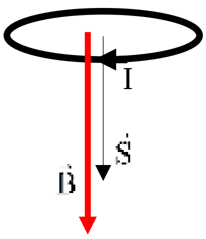
0,28	6,05>6
0,27	6,00= 6

Tiempo total = 0,27+2,30=2,57s

25.- En dirección del eje Z existe un campo magnético. El suelo está en el plano XY. El campo magnético varía con la altura según la ecuación $B = B_o(1-\alpha z)$, siendo α un número positivo y z es la altura contada desde el suelo.
Un anillo metálico de masa m, diámetro d y resistencia R se deja en libertad desde una altura muy grande y se observa que a partir de cierta altura h desciende con movimiento uniforme. Calcular la velocidad constante del anillo. Se supone que en su caída el plano del anillo es paralelo al plano XY.

Cuando el anillo se deja en libertad con velocidad cero, al encontrase en el campo gravitatorio terrestre se acelera y durante un tiempo aumenta su velocidad. A medida que desciende se origina una fuerza electromotriz inducida en el anillo que depende de la velocidad y del campo magnético.

Desde el punto de vista energético el anillo disminuye su energía potencial, que se transforma en energía cinética del propio anillo y en energía eléctrica debido a la corriente inducida que se crea en el anillo, produciéndose una disipación de la misma por efecto Joule, en la resistencia del mismo. Cuando la velocidad del anillo ya es constante, no varía su energía cinética y toda la energía potencial pasa a energía eléctrica, de acuerdo con el principio de conservación de la energía.
Supongamos que a una altura h sobre el suelo el anillo lleva velocidad constante que designamos con v. Si el anillo desciende una altura dh, y en ello emplea un tiempo dt, la fuerza electromotriz inducida en el anillo es, de acuerdo con la ley de Faraday $\varepsilon = -d\Phi/dt$:



Tomamos arbitrariamente para la corriente inducida I el sentido de la figura, y así de acuerdo con la regla de la mano derecha el vector superficie $\vec{S}$ tiene la dirección y sentido señalados en la misma, que coincide con el de $\vec{B}$ en $z \geq 1$.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\vec{B}\cdot\vec{S}\right) = -S\frac{dB}{dt} = -\frac{\pi d^2}{4}\cdot\frac{d}{dt}\left[B_o - B_o\alpha h\right] = -\frac{\pi d^2}{4}\left(-B_o\alpha\frac{dh}{dt}\right) = \frac{\pi d^2 B_o \alpha v}{4}$$

Esta fuerza electromotriz crea en el anillo una corriente eléctrica inducida de intensidad

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\pi d^4 B_o \alpha v}{4R}$$

El valor positivo de la intensidad nos indica que el sentido arbitrario elegido para la corriente inducida, es el correcto. Es decir, que durante la caída del anillo (en $z \geq 1$) la corriente inducida circula en el sentido indicado en el dibujo.

La energía calorífica producida por efecto Joule, en el anillo en el tiempo dt es:

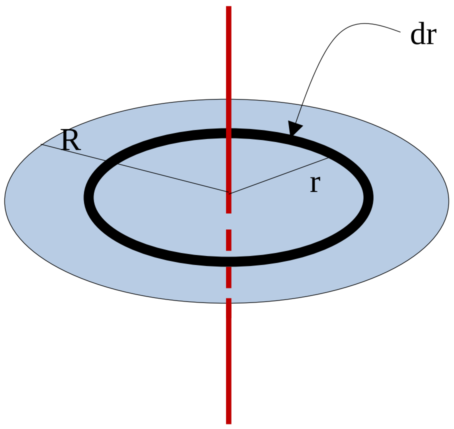
$$I^2 R\,dt = \left(\frac{\pi d^2 B_o\,\alpha v}{4R}\right)^2 Rdt = \frac{\pi^2 d^4 B_o^2\,\alpha^2 v^2}{16R}dt$$

La disminución de energía potencial en el tiempo dt es. mg dh y como en estas condiciones ambas son iguales, resulta.

$$\frac{\pi^2 d^4 B_o^2\,\alpha^2 v^2}{16R}dt = mg\,dh \quad \Rightarrow \frac{\pi^2 d^4 B_o^2\,\alpha^2 v^2}{16R} = m\,g\,v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{16 m\,g\,R}{\pi^2 d^4 B_o^2\,\alpha^2}$$

26.- *(338)* ***Un disco delgado de radio R y no conductor tiene una densidad de carga superficial uniforme σ y un eje de rotación que pasa por el centro del disco y es perpendicular a él. El disco gira con velocidad angular constante ω. Calcular: a) el módulo del campo magnético creado en el centro del disco, b) el módulo del momento magnético***

a) Consideramos una superficie elemental del disco que es una corona circular de ancho dr y situado a una distancia r del centro del disco, cuya superficie es: $dS = 2\pi r \cdot dr$. Ver la figura inferior.



Esa superficie tiene una carga elemental que vale

$$dq = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr$$

Ahora imaginemos un observador situado en un punto frente a corona que determina la carga que pasa ante él, deduce que cuando el disco dé una vuelta completa toda la carga de la corona pasa frente él y considera que ha pasado una corriente elemental.

$$di = \frac{dq}{t}$$

Siendo t el tiempo que el disco emplea en dar una vuelta completa

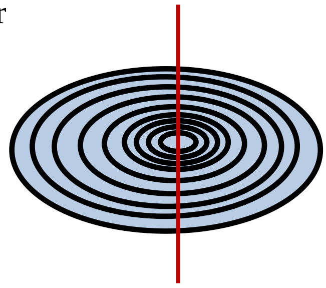
$$\omega = \frac{2\pi}{t} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \Rightarrow \qquad di = \frac{2\sigma\pi\, rdr}{\frac{2\pi}{\omega}} = \sigma\omega\, rdr$$

Dado que la corona está a una distancia r del centro del disco, de acuerdo con la ley de Biot-Savart crea en el centro del mismo un campo magnético elemental de módulo

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{di \cdot l}{r^2}$$

Siendo l la longitud de la orona, $l = 2\pi r$

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{di \cdot l}{r^2} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{di \cdot 2\pi r}{r^2} = \frac{\mu_o}{2}\sigma\omega dr$$



La contribución al campo se debe conjunto de todas las coronas en que descomponemos el disco, por tanto, hemos de sumar cada contribución

$$B = \frac{\mu_o}{2}\sigma\omega\int_0^R dr = \frac{\mu_o}{2}\sigma\omega R$$

b) El módulo del momento magnético de una espira es el producto de la intensidad de corriente por el área de la espira. Para la corona que hemos considerado vale dm y para el disco completo m.

$$dm = di \cdot \pi r^2 = \sigma\omega\ rdr \cdot \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad m = \sigma\pi\omega\int_0^R r^3 dr = \sigma\pi\omega\frac{R^4}{4}$$

27.- (381) - Un galvanómetro lleva pivotada una bobina cuyas espiras son rectangulares de dimensiones a y b. La bobina consta de N espiras. El resorte ligado a la bobina tiene una constante de torsión k, cuyo par mecánico restaurador es $k\theta$, siendo θ el ángulo que gira la bobina. La inducción del campo magnético es B y actúa en el seno de toda la superficie de la bobina.

a) Calcular la relación $\frac{\theta}{I}$ del aparato, siendo θ el ángulo girado e I la intensidad de la corriente que pasa por la bobina.

b) Determinar la potencia que consume el galvanómetro y la relación entre el ángulo girado y la potencia

c) Si la resistencia óhmica de la bobina es 18 Ω, a = 1 cm y b = 2 cm , B=0,05 T , N = 20 espiras , determinar la constante k del resorte si el ángulo girado vale 30º cuando la intensidad que circula por el aparato es 0,01 A.

a) Antes de contestar al apartado recordemos cómo es la interacción de la bobina con el campo magnético. Para mayor sencillez consideramos una espira como la indicada en la figura 1a.

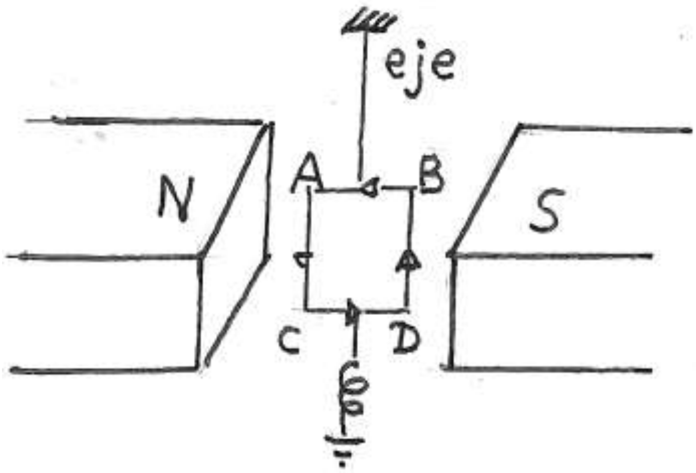


Fig.1a

El campo magnético se dirige del polo norte al sur del electroimán. La espira está recorrida por una corriente de intensidad i que circula en el sentido ACDB; este sentido determina que la espira tenga una cara NORTE observada tal como indica la figura 1a. La espira se caracteriza por un vector $\bar{S}$, perpendicular a su plano siendo su módulo S=ab . En la figura 1b (que es una ampliación de la espira de la figura 1a) se ha dibujado el vector superficie, que en forma una ángulo de 90º con el vector campo magnético.

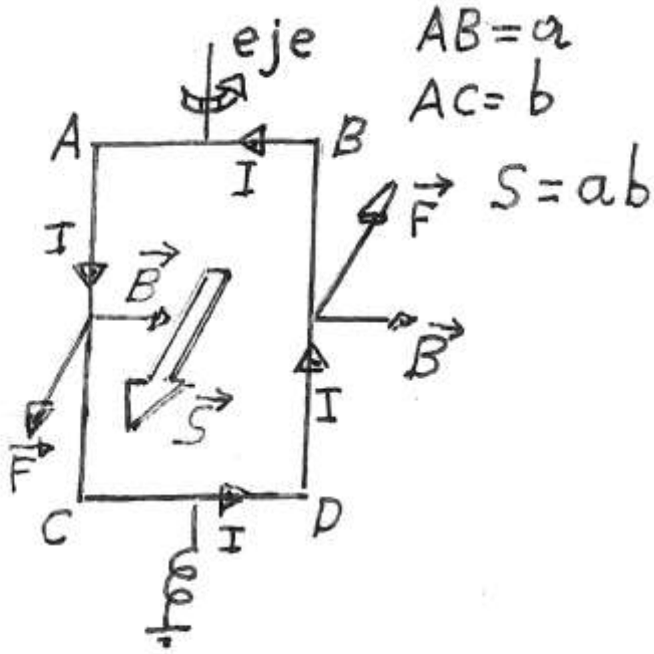


Fig.1b

La espira está sometida a un momento magnético que vale:

$$\vec{M}_M = i\vec{S}\times\vec{B}$$

Este momento hace girar a la espira y si no hubiese resorte y no hubiese rozamiento, la espira se colocaría en el campo magnético, de modo que los vectores $\vec{B}$ y $\vec{S}$ tendrían la misma dirección y sentido, o dicho de otra manera, el flujo magnético penetraría por la cara SUR de la espira y saldría por la cara NORTE, pero como existe un resorte que crea un momento mecánico opuesto al magnético se alcanza una situación de equilibrio cuando ambos se igualen y entones la espira formaría un ángulo con la dirección del campo B.
Igualando los módulos de los momentos magnético y mecánico, resulta:

$$iSB\operatorname{sen}\theta = k\theta$$

De la ecuación anterior se deduce que no existe proporcionalidad directa entre el ángulo girado y la intensidad de la corriente. Para evitar esto, el imán de un galvanómetro no tiene los polos magnéticos planos como indica la figura 1, sino que son curvos y dan lugar a un campo magnético radial, el cual determina que el flujo magnético que atraviesa la bobina sea prácticamente constante e independiente de la posición que ocupe en el mencionado campo, de esta manera, al desaparecer el seno del ángulo, existe proporcionalidad directa entre el ángulo girado y la intensidad de la corriente que atraviesa la bobina.

$$NiSB = k\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\theta}{i} = \frac{NSB}{k} = \frac{NabB}{k}$$

b) La potencia consumida en la bobina vale:

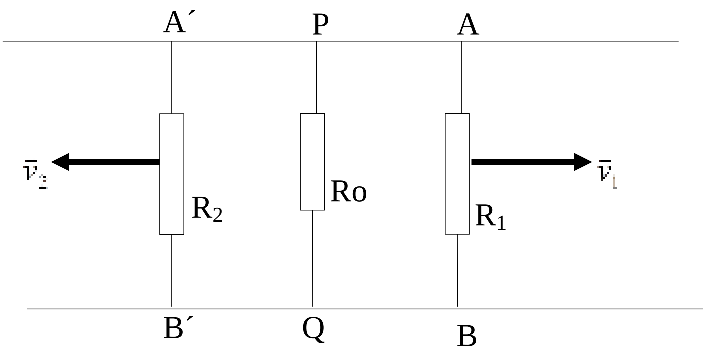
$$P = i^2 R = \frac{k^2 \theta^2 R}{N^2 S^2 B^2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{NabB}{k\sqrt{R}}\sqrt{P}$$

c)

$$\frac{\theta}{i} = \frac{NabB}{k} \Rightarrow \quad k = \frac{NabBi}{\theta} = \frac{20 \cdot \left(10^{-2} \cdot 2.10^{-2}\right) m^2 \cdot 0{,}05 \frac{N}{A\,m} \cdot 0{,}01 A}{30 \frac{\pi}{180}} = 3{,}8.10^{-6}\ \frac{N\,m}{rad}$$

28.- (384) - En la figura inferior el movimiento de AB y A´B´ es uniforme y el tramo PQ que contiene la resistencia R_o = 3Ω está fijo. Sobre el sistema actúa un campo magnético uniforme de inducción B= 1 T, perpendicular y dirigido hacia dentro del plano. Determinar la intensidad de la corriente que atraviesa la resistencia R_o.

Datos. v_1= 0,3 m/s; v_2=0,2 m/s , R_1=1Ω , R_2=2Ω, AB= A´B´=0,1 m



Consideramos la espira PABQ. Al moverse AB hacia la derecha aumenta el flujo magnético que la atraviesa y de acuerdo con la ley de Lenz aparece una fuerza electromotriz que engendra una corriente inducida de un sentido tal, que crea un flujo magnético adicional, que tenderá a disminuir ese aumento de flujo, por tanto, este nuevo flujo y el campo magnético que lo crea , será saliente hacia el observador y de acuerdo con la mano derecha(explicada en otras secciones de esta web) se produce una corriente eléctrica de sentido contrario a las agujas del reloj.(corriente inducida) El mismo razonamiento es válido para la espira PA´B´Q.El circuito anterior equivale al de la figuras 1.

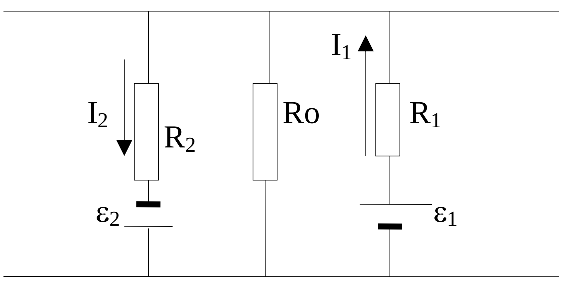


Fig.1

Calculamos los valores de las fuerzas electromotrices. En un tiempo Δt, AB se desplaza $v_1\Delta t$ y el área aumenta en $l\, v_1\Delta t$

$$\varepsilon_1 = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \left|\frac{B\,\ell v_1\,\Delta t}{\Delta t}\right| = \left|B\ell\, v_1\right| \quad ; \quad \varepsilon_2 = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \left|\frac{B\,\ell\, v_2\,\Delta t}{\Delta t}\right| = \left|B\ell\, v_2\right|$$

Aplicamos Kirchoff a las mallas PABQ y PA´B´Q, tomando como sentido positivo el movimiento de las agujas del reloj.

$$\varepsilon_1 = B\ell v_1 = I_1R_1 + (I_1 - I_2)R_o \quad ; \quad \varepsilon_2 = B\ell v_2 = I_2R_2 + (I_2 - I_1)R_o$$

Sustituyendo los valores numérico.

$$0{,}03 = I_1 + (I_1 - I_2)3 \;\; ; \;\; 0{,}02 = I_2 2 + (I_2 - I_1)3 \Rightarrow \quad 0{,}03 = 4I_1 - 3I_2 \;\; ; \;\; 0{,}02 = 5I_2 - 3I_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}09 = 12I_1 - 9I_2 \quad ; \quad 0{,}08 = 20I_2 - 12I_1, \text{sumando}$$

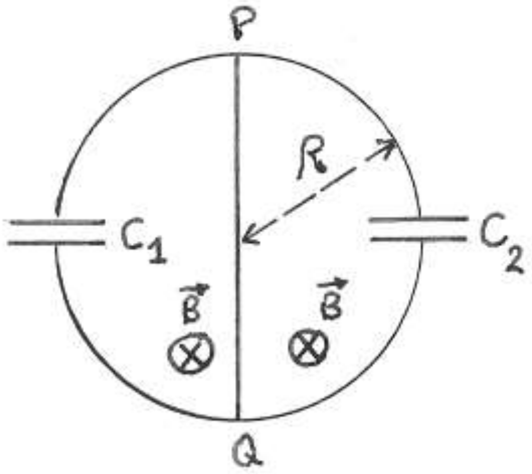
$$0{,}17 = 11I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{0{,}17}{11}\text{A} \quad \Rightarrow \quad 0{,}03 = 4I_1 - 3\frac{0{,}17}{11} \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{0{,}03 + \frac{0{,}51}{11}}{4} = \frac{0{,}84}{44} = \frac{0{,}21}{11}\text{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_o = I_1 - I_2 = \frac{0{,}21}{11} - \frac{0{,}17}{11} = 0{,}0036\text{A} = 3{,}6\,\text{mA}$$

29.- (385).- En el circuito de la figura inferior los cables de conexión tienen resistencia despreciable. Cada espira tiene la superficie de un semicírculo de radio R Los condensadores tienen capacidades C_1 y C_2 respectivamente. El dispositivo está atravesado por un campo magnético variable que es perpendicular al plano de los conductores y dirigido hacia dentro de ese plan. El módulo de ese campo es:

$$B = B_o \frac{t}{T}$$

B_o y T son constantes y t es la variable tiempo.
En un determinado instante el cable perpendicular PQ se corta y se suprime el campo magnético. Se pide la carga de cada condensador.



Calculamos la fuerza electromotriz inducida en la malla situada a la izquierda de PQ. Supongamos que el intervalo de tiempo que consideramos es desde t=0 a t=ΔT

$$\left|\varepsilon_1 = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \left|\frac{[B(\Delta t) - B(0)]\pi\frac{R^2}{2}}{\Delta t}\right| = \left|\frac{B_o\frac{\Delta t}{T}\cdot\pi\frac{R^2}{2}}{\Delta t}\right| = \left|\frac{B_o \pi R^2}{2T}\right|$$

Otra forma de analizar el problema:

Considerando arbitrariamente que la corriente inducida circula en esta malla en sentido contrario a las agujas de un reloj, de acuerdo con la regla de la mano derecha para el flujo , haciendo coincidir los dedos con la mano cerrada en el sentido de la corriente, , el vector superficie que lo señala el dedo pulgar sale del plano hacia el observador. En consecuencia ese vector $\vec{S}$ *y el vector* $\vec{B}$ *formaran un ángulo de 180º.*
El flujo a través de ese elemento vale

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = \frac{B_o\, t}{T}\cdot\pi\frac{R^2}{2}\cdot\cos 180^o = -\frac{B_o\pi R^2}{2T}$$

La fuerza electromotriz inducida

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[-\frac{B_o\pi R^2}{2T}\right] = \frac{B_o\pi R^2}{2T}$$

El sentido en que se carga el condensador C_1 nos lo indica la ley de Lenz. Al aumentar el flujo que atraviesa la malla a la izquierda de PQ, la corriente inducida que se opone a ese aumento es de sentido contrario a las agujas del reloj, y por consiguiente, la armadura superior de C_1 se cargará positivamente y negativamente la inferior, de modo que la diferencia de potencial entre el condensador es $\Delta V = \varepsilon_1$ y la carga de dicho condensador.

$$q_1 = \varepsilon_1 C_1 = \frac{B_o\pi R^2}{2T} C_1$$

Para el otro condensador los argumentos empleados son los mismos y la corriente inducida es en sentido contrario a las agujas del reloj, así que la armadura superior de C_2 se carga negativamente y la inferior positivamente.

Al desaparecer PQ y el campo, ocurre que la armadura inferior de C_1, cargada negativamente , está en contacto directo con la armadura inferior de C_2, cargada positivamente; y la armadura superior de C_2, cargada negativamente, está en contacto directo con la armadura superior de C_1 , cargada positivamente. Así que de inmediato se produce una cancelación de cargas, de modo que si la carga de C_1 fuese igual a la de C_2 los condensadores se descargarían totalmente. Si $C_1>C_2$ quedaría un remanente de carga de valor

$$\frac{B_o\,\pi R^2}{2T}\left(C_1 - C_2\right)$$

Esta carga remanente se repartiría a entre los dos condensadores quedando ambos asociados en paralelo y por tanto a la misma diferencia de potencial. Sea Q_1 y Q_2 las cargas finales de cada condensador:

$$Q_1 + Q_2 = \frac{B_o\,\pi R^2}{2T}\left(C_1 - C_2\right) \quad ; \quad \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \Rightarrow \quad Q_2 = Q_1\frac{C_2}{C_1} \quad \Rightarrow$$

$$Q_1 + Q_1\frac{C_2}{C_1} = \frac{B_o\,\pi R^2}{2T}\left(C_1 - C_2\right) \quad \Rightarrow \quad Q_1\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1}\right) = \frac{B_o\,\pi R^2}{2T}\left(C_1 - C_2\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Q_1 = \frac{B_o\,\pi R^2}{2T} C_1 \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}$$

Par el condensador C_2

$$Q_2 = \frac{B_o \pi R^2}{2T} C_2 \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}$$