PROBLEMAS DE LAS OLIMPIADAS INTERNACIONALES DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez

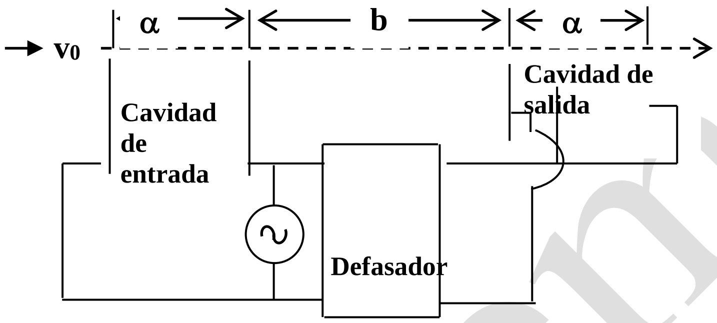
Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

XXXII OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. TURQUIA. 2001

1a) Klystron

Los klystrons son dispositivos para amplificar señales de muy altas frecuencias. Un klystron básicamente consiste en dos pares idénticos de platos paralelos (cavidades) separados entre sí por una distancia b, tal como se indica en la figura inferior



Un haz de electrones con una velocidad v_o atraviesa todo el sistema pasando a través de agujeros practicados en los platos. El voltaje de alta frecuencia que se quiere amplificar se aplica en ambos pares de platos con una cierta diferencia de fase (donde el periodo T corresponde a una diferencia de fase 2π) entre ellos, produciendo campos eléctricos horizontales alternos en las cavidades. Los electrones que penetran en la cavidad de entrada, cuando el campo está dirigido hacia la derecha sufren un retardo en su velocidad y un aumento de velocidad si el campo está dirigido hacia la izquierda, de esta manera los electrones forman agrupaciones a una cierta distancia. Si la cavidad de salida está colocada en el punto de agrupamiento, el campo eléctrico de dicha cavidad absorbe potencia del haz manteniendo la fase correctamente elegida.

V_o=2,0.10 ^{6} m/s, T =1,0.10^{-9} s, cambio del voltaje V=$\pm$0,5 V y la relación carga masa del electrón e/m =1,76.10^{11} C/kg.

La distancia α es tan pequeña que el tiempo de transito de los electrones se considera despreciable. Calcular

a) La distancia b donde los electrones se agrupan b) La diferencia de fase necesaria proporcionada por el defasador

Supongamos que en la cavidad de entrada el campo está dirigido hacia la derecha. Los electrones sufren una fuerza hacia la izquierda por ser la carga del electrón negativa. A consecuencia de ello los electrones pierden velocidad.

El trabajo negativo que el campo ejerce sobre los electrones vale

$$W = eE * \alpha = e\frac{V}{\alpha} * \alpha = eV$$

La velocidad final de los electrones se calcula

$$\frac{1}{2}mv_r^2 = \frac{1}{2}mv_o^2 - eV \Rightarrow v_r = \sqrt{v_o^2 - 2\frac{e}{m} * V} = \sqrt{\left(2{,}0.10^6\right)^2 - 2 * 1{,}76.10^{11} * 0{,}5}$$

$$= 1{,}956.10^6 \frac{m}{s}$$

Cuando transcurra un tiempo T/2 el campo eléctrico está dirigido hacia la izquierda y los electrones son acelerados, siendo su velocidad

$$v_a = \sqrt{v_o^2 + 2\frac{e}{m} * V} = \sqrt{\left(2{,}0.10^6\right)^2 + 2 * 1{,}76.10^{11} * 0{,}5} = 2{,}044.10^6 \frac{m}{s}$$

Los electrones de velocidad v_r tardan en recorrer la distancia b un tiempo t y los electrones de velocidad v_a han salido con un retraso de T/2, para que se agrupen deben llegar juntos a la segunda cavidad.

$$v_r t = v_a\left(t - \frac{T}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad t\left(v_a - v_r\right) = v_a\frac{T}{2} \Rightarrow t = \frac{v_a T}{2\left(v_a - v_r\right)} = 11{,}61\ T$$

Si el tiempo de agrupamiento fuese un número entero de periodos el desfase serie 360º o 0º. Al no ser un número entero se debe producir un desfase respecto del entero 11

$$\frac{T}{360^o} = \frac{0{,}61\ T}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 219{,}6^o$$

Respecto del entero 12

$$\frac{T}{360^o} = \frac{T - 11{,}61T}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 140{,}4^o$$

1b) Distancia intermolecular

Se designa con d_L y d_V las distancias promedios entre las moléculas de agua en al fase líquida y vapor respectivamente. Se supone que ambas fases están a 100º C y a una presión de una atmósfera y que el vapor se comporta como un gas ideal. Utilizando los datos que se dan a continuación calcular la relación d_V/d_L

Densidad del agua en la fase líquida r =1,0.10^{3}kg/m^3

Masa molar del agua M = 1,8.10^{-2} kg/mol

Presión atmosférica p =1,0.10^5 Pa

Constante de los gases R = 8,3 J/(mol K)

Número de Abogador N_A = 6,02.10^{23} moléculas / mol

La masa de una molécula de agua es $m(H_2O) = \frac{M}{N_A}$. Si en un metro cúbico de agua existen N_L moléculas de agua, se cumple que

$$N_L * \frac{M}{N_A} = V\rho = 10^3 kg \quad \Rightarrow \quad N_L = \frac{10^3 * N_A}{M}$$

Si un metro cúbico de agua líquida pasa a la fase de vapor ocupa el siguiente volumen

$$V = \frac{10^3 * RT}{pM} = \frac{10^3 * 8{,}3 * 373}{1{,}0.10^5 * 1{,}8.10^{-2}} = 1722 \ \ m^3$$

Como en ambos volúmenes existen las mismas moléculas, la relación de distancias es

$$\frac{d_V}{d_L} = \sqrt{\frac{V_V}{V_L}} = \sqrt{\frac{1722}{1}} = 12$$

1c) Generador simple de una onda en forma de diente de sierra

Un voltaje V_o en forma de diente de sierra se puede obtener mediante el condensador C de la figura 1.

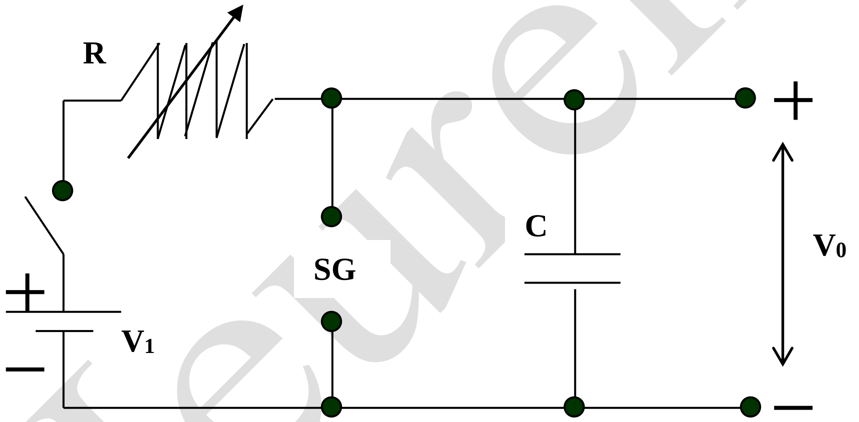


Fig. 1

R es una resistencia variable, V_i es una batería ideal, y SG son dos electrodos cuya distancia se puede variar, de modo que cuando el voltaje a través de ellos alcance un cierto valor Vf se produce una chispa entre ellos y como consecuencia el voltaje a través de ellos llega a ser prácticamente nulo.

a) Dibuje la forma del voltaje V_o frente al tiempo después que se cierra el interruptor

b) ¿Cuál es la condición para que el voltaje de diente de sierra sea prácticamente lineal?

c) Si la condición anterior se produce, derive una expresión simple para el periodo T de la onda

d) ¿Qué debe variar R, SG o ambos para cambiar solamente el periodo T?

e) ¿Qué debe variar R, SG o ambos para cambiar solamente la amplitud?

f) Si usted recibe una fuente de corriente continua adicional de voltaje ajustable, dibuje el circuito indicando los terminales entre los cuales se obtenga un voltaje $V_o^{\prime}$ de la forma que indica la figura 2

g)

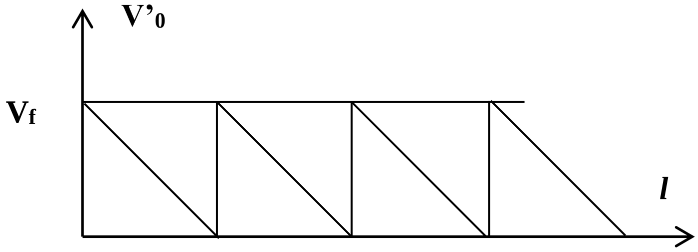
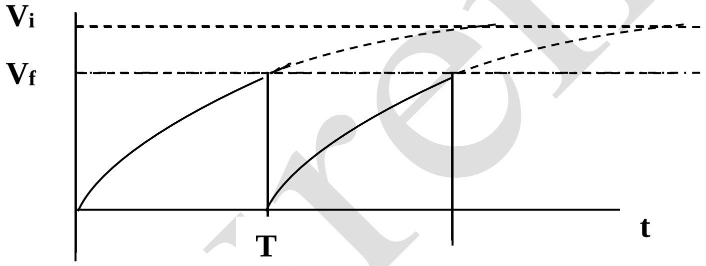


Fig. 2

a).- Cuando se cierra el interruptor el circuito lo forma la pila y entre ella y el condensador una resistencia variable, por tanto, el condensador comienza a cargarse a través de dicha resistencia, de modo que la diferencia de potencial entre las armaduras sigue una función exponencial. Si no estuviese SG el condensador terminaría al cabo de un tiempo infinito por adquirir el voltaje de la pila, sin embargo cuando se alcanza el voltaje V_f el condensador se descarga y la diferencia de potencial cae a cero y de nuevo comienza el ciclo La gráfica correspondiente es la de la figura inferior



b).- Para que el voltaje se considere lineal la parte de curva exponencial debe ser pequeña lo cual se consigue cuando V_f sea pequeño comparado con Vi

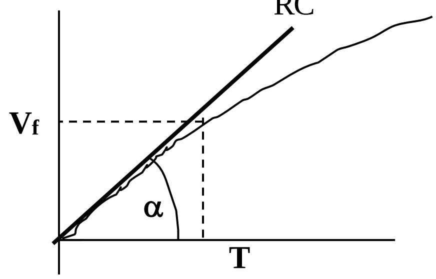
c).- La ecuación exponencial de carga del condensador es

$$V = V_i\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

La derivada con respecto del tiempo nos da la pendiente de la recta en cada punto de la curva

$$\frac{dV}{dt} = -V_i e^{-\frac{t}{RC}} * \left(-\frac{1}{RC}\right)$$

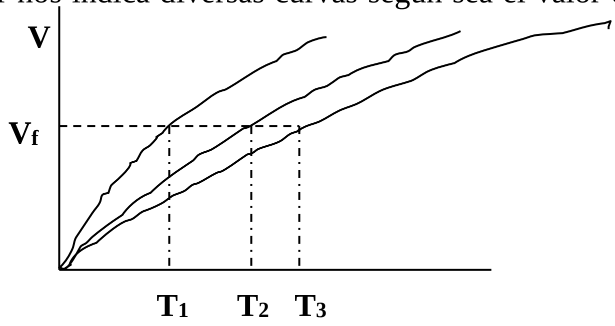
que aplicada al punto de coordenadas (0,0) $\quad \text{tag } \alpha = \frac{V_i}{RC}$



La pendiente de la recta situada entre el punto de coordenadas (0,0) y el de coordenadas (T,V_f) vale

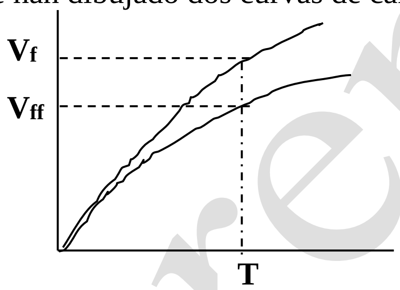
$$\mathrm{tag}\alpha = \frac{V_f}{T} = \frac{V_i}{RC} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{V_f}{V_i}RC$$

d).- La figura inferior nos indica diversas curvas según sea el valor de la resistencia de carga



Para cambiar exclusivamente el periodo debemos variar la resistencia tal como indica la gráfica

e).- En la gráfica inferior se han dibujado dos curvas de cargas



Para el mismo periodo T aparecen dos voltajes controlados por SG. Luego si queremos variar exclusivamente la amplitud debemos variar SG y como el periodo es el mismo también debemos variar R

f).- Si usted recibe una fuente de corriente continua adicional de voltaje ajustable, dibuje el circuito indicando los terminales entre los cuales se obtenga un voltaje V_o' de la forma que indica la figura 2

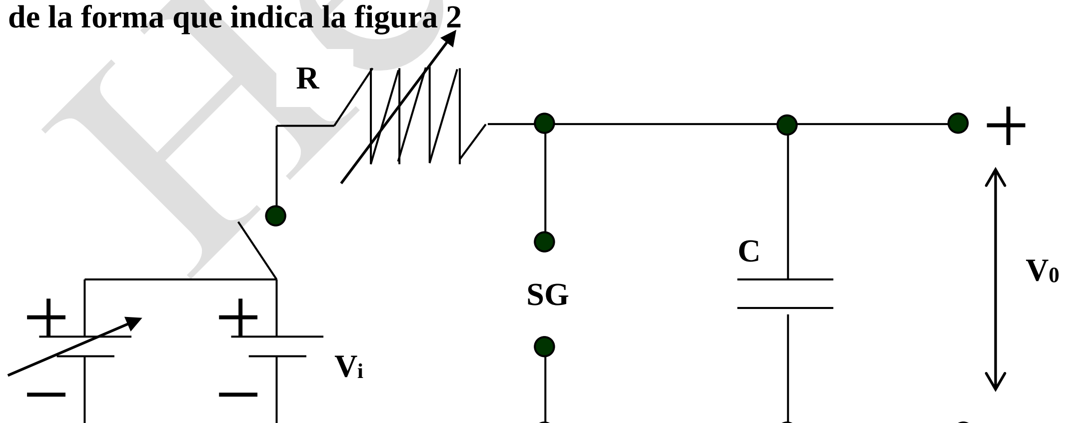


Fig. 1'

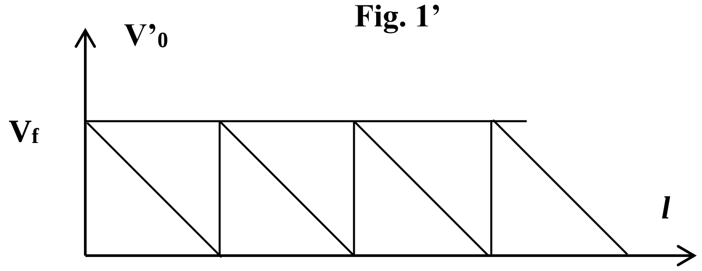
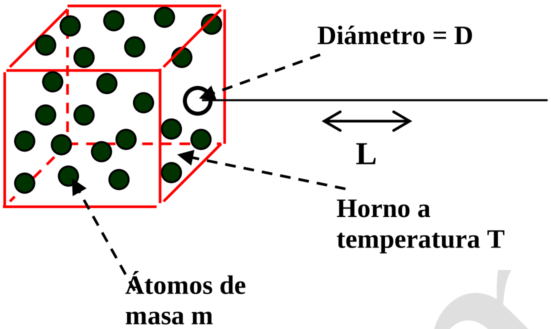


Fig. 2'

1d) Haz atómico

Un haz atómico se obtiene calentando un grupo de átomos a una temperatura T y permitiéndoles luego emerger horizontalmente por un agujero de dimensiones atómicas D practicado en una pared lateral del horno. Estimar el diámetro del haz después que haya viajado una longitud horizontal L. La masa de cada átomo es M.



El principio de incertidumbre nos dice que

$$\Delta p * \Delta x = \hbar$$

teniendo en cuenta que Δx es del orden de D, la incertidumbre en el momento lineal es del orden

$$\Delta p = \frac{\hbar}{D}$$

Por consiguiente la incertidumbre en la velocidad es del orden

$$\Delta v = \frac{\hbar}{MD}$$

Si el haz viaja una distancia L en un tiempo t, el haz se irá ensanchando en Δv*t.
Si el horno se encuentra a una temperatura T, la velocidad de los átomos se puede calcular mediante la expresión

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{3}{2}kT \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{3kT}{M}}$$

k es la constante de Boltzmann y t=L/v

El diámetro del haz será el diámetro D más el ensanchamiento

$$D_L = D + \Delta v * t = D + \frac{\hbar}{MD} * \frac{L}{\sqrt{\frac{3kT}{M}}} = D + \frac{\hbar L}{D\sqrt{3MkT}}$$

2.- SISTEMA BINARIO DE ESTRELLAS

a) Es bien conocido que la mayoría de las estrellas forman sistemas binarios. Uno de los tipos de sistemas binarios consiste en una estrella

ordinaria cuya masa es m_o y radio R y una estrella de neutrones de mayor masa M, ambas estrellas rotan alrededor una de otra. En el problema se desprecia el movimiento de rotación terrestre. A partir de la observación de dichas estrellas se obtiene la siguiente información:

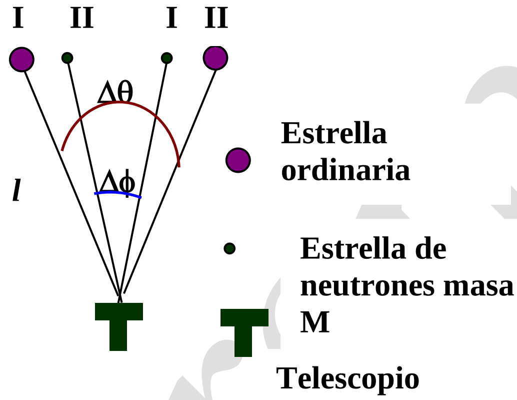


Fig. 1

El máximo desplazamiento angular de la estrella ordinaria es $\Delta\theta$ y la de la estrella de neutrones $\Delta\phi$
El tiempo correspondiente a estos máximos desplazamientos es τ.

La radiación característica de la estrella ordinaria nos indica que la temperatura de su superficie es T y la energía radiada incidente sobre la unidad de superficie terrestre en la unidad de tiempo es P.

La línea del calcio de esta radiación difiere respecto de la longitud de onda normal λ_o en una cantidad $\Delta\lambda$, debido solamente al campo gravitacional de la estrella ordinaria. Para el cálculo puede considerarse al fotón con una masa efectiva hc□λ

Encontrar una expresión para la distancia l desde la tierra al sistema binario en términos de las cantidades observadas y de constantes universales.

b) Suponer que M>>mo de modo que la estrella ordinaria básicamente rota alrededor de la estrella de neutrones en una órbita circular de radio r_o

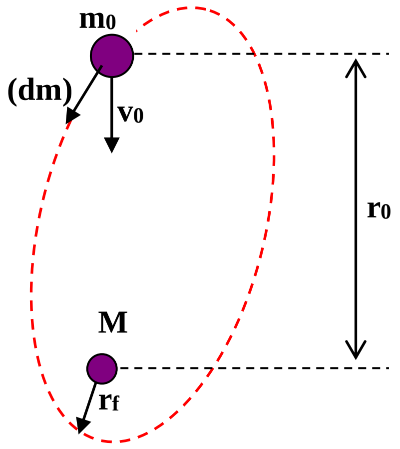


Fig. 2

Suponer que la estrella ordinaria emite gas hacia la estrella de neutrones con una velocidad v_o relativa a la estrella ordinaria. Admitiendo que el campo gravitacional de la estrella ordinaria es dominante y despreciando el cambio orbital en la estrella ordinaria encontrar la máxima aproximación r_f del gas a la estrella de neutrones.

a) La ley de Stefan-Boltzmann nos dice que la potencia radiada por unidad de área de la estrella viene dada por la expresión

$$P_R = \sigma T^4 \ \frac{W}{m^2}$$

La superficie de la estrella es $4\pi R^2$, luego la potencia radiada al exterior por la estrella vale $\sigma T^4 * 4\pi R^2 \ \ W$.

Esa energía por unidad de tiempo esta distribuida al llegar a la Tierra sobre una esfera de superficie $4\pi\ l^2$.El valor de P es

$$P = \frac{\sigma T^4 * 4\pi R^2}{4\pi l^2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{l}{T^2}\sqrt{\frac{P}{\sigma}} \ (1)$$

Si consideramos que el fotón tiene una masa efectiva deducida de la relación

$$E = m_{ef} c^2 = h\nu \quad \Rightarrow \quad m_{ef} = \frac{h\nu}{c^2}$$

La energía potencial gravitatoria de una masa m_{ef} es $-\frac{Gm_o m_{ef}}{R}$, siendo R la distancia de la masa m_{ef} al centro de la estrella de masa m_o. La conservación de la energía nos permite escribir

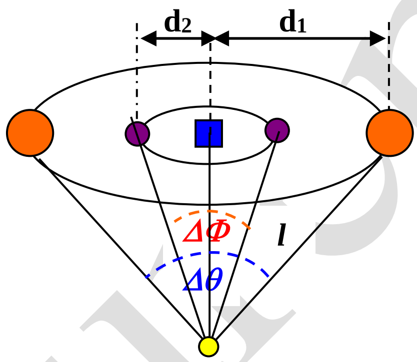
$$h\nu - \frac{Gm_o m_{ef}}{R} = h\nu - \frac{Gm_o h\nu}{Rc^2} = \text{Cons tan te}$$

Teniendo en cuenta que $\nu = \dfrac{c}{\lambda_o}$ siendo λ_o la longitud de onda normal de la raya del calcio y λ_T la medida en la Tierra y la ecuación (1), resulta:

$$h\frac{c}{\lambda_o} - \frac{Gm_o h}{Rc\lambda_o} = h\frac{c}{\lambda_T} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{\lambda_o} - \frac{Gm_o}{\frac{l}{T^2}\sqrt{\frac{P}{\sigma}}} * \frac{1}{c\lambda_o} = \frac{c}{\lambda_T} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda_o} - \frac{1}{\lambda_T} = \frac{Gm_o T^2}{lc^2\sqrt{\frac{P}{\sigma}}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\lambda_T - \lambda_o}{\lambda_T\lambda_o} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o(\lambda_o + \Delta\lambda)} = \frac{Gm_o T^2}{lc^2\sqrt{\frac{P}{\sigma}}} \quad \Rightarrow \quad m_o = \frac{\Delta\lambda lc^2\sqrt{\frac{P}{\sigma}}}{\lambda_o(\lambda_o + \Delta\lambda)\ GT^2} \quad (1)$$

En la siguiente figura observamos el movimiento de las estrellas con una cierta perspectiva. El cuadrado representa el centro de masas de las dos estrellas



d_2 es la distancia de la estrella de neutrones al centro de masas y d_1 la de la estrella ordinaria al citado centro de masas.

La fuerza de atracción gravitatoria entre ambas estrellas es $\dfrac{Gm_o M}{(d_1 + d_2)^2}$ y que es la fuerza centrípeta necesaria para que ambas estrellas giren alrededor del centro de masas.

$$\frac{Gm_o M}{(d_1 + d_2)^2} = m_o\omega^2 d_1 = M\omega^2 d_2 \quad (2)$$

La distancia de la tierra a las estrellas es grande luego el arco es igual al segmento d_1 para la estrella ordinaria y al segmento d_2 para la estrella de neutrones

$$\text{Arco = ángulo * radio,} \qquad d_2 = \frac{\Delta\phi}{2} * l \qquad ; \qquad d_1 = \frac{\Delta\theta}{2} * l \quad (3)$$

La velocidad angular de rotación es $\omega = \dfrac{\pi}{\tau}$

En la ecuación (1) sustituimos la (2) y hacemos uso de la (3)

$$\frac{G\Delta\lambda l c^2\sqrt{\frac{P}{\sigma}}}{\lambda_o(\lambda_o+\Delta\lambda)GT^2}\frac{M}{(d_1+d_2)^2}=M\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 d_2 \Rightarrow \frac{\Delta\lambda l c^2\sqrt{\frac{P}{\sigma}}}{\lambda_o(\lambda_o+\Delta\lambda)T^2}\frac{1}{\left[\frac{1}{2}(\Delta\theta+\Delta\phi)\right]^2}=\frac{\pi^2}{\tau^2}\frac{\Delta\phi}{2}l\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\lambda c^2\sqrt{\frac{P}{\sigma}}}{\lambda_o(\lambda_o+\Delta\lambda)T^2}*\frac{8\tau^2}{(\Delta\theta+\Delta\phi)^2}*\frac{1}{\pi^2\Delta\phi}=l^2\Rightarrow \quad l=\sqrt{\frac{8c^2\Delta\lambda\tau^2\left(\frac{P}{\sigma}\right)^2}{\lambda_o(\lambda_o+\Delta\lambda)T^2(\Delta\theta+\Delta\phi)^2\pi^2\Delta\phi}}$$

b).-Suponer que la estrella ordinaria emite gas hacia la estrella de neutrones

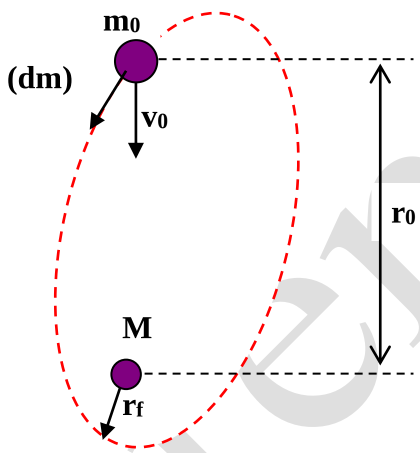


Fig. 2

Conservación del momento angular de la estrella ordinaria: $m_0.r_0^2.\omega_0=m.r^2.\omega$
entre el estado inicial y otro cualquiera en su trayectoria

Conservación del momento angular de la masa dm emitida por la estrella:
$dm.r^2.\omega = dm.r_f^2.\omega_f$ entre un estado cualquiera y el más próxima a la estrella de neutrones, donde ω_f es la velocidad angular en la curva próxima a M.

Teniendo en cuenta que el equilibrio en el estado original exige que $\omega_0=\sqrt{\frac{GM}{r_0^3}}$,

Las ecuaciones anteriores dan,

$$\omega=\frac{m_0 r_0}{mr^2}\sqrt{\frac{GM}{r_0}}, \qquad y \qquad \omega_f=\frac{m_0 r_0}{mr_f^2}\sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

La conservación de la energía para dm, nos da

$$\frac{1}{2}dm.(v_0^2+r^2\omega^2)-\frac{GM.dm}{r}=\frac{1}{2}dm.r_f^2\omega_f^2-\frac{GM.dm}{r_f}$$

en las que se sustituyen los valores de ω y ω_f y queda

$$v_0^2+\frac{GM.m_0 r_0}{m^2}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_f^2}\right)-2GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_f}\right)=0$$

Puesto que $r_0 >> r_f$, <u>si además, $r > r_0$</u> , los términos r^{-1} y r^{-2} pueden despreciarse y queda

de donde despejamos r_f

$$v_0^2 - \frac{GM.m_0^2 r_0}{m^2}\frac{1}{r_f^2} + 2GM\frac{1}{r_f} = 0$$

Argumento para demostrar el crecimiento de r, es decir que <u>$r > r_0$.-</u> Encontremos la relación entre la fuerza gravitatoria F_g y la fuerza centrífuga, F_c en cualquier punto de la trayectoria.

Usando la conservación del momento cinético de la estrella $m.r^2.\omega = m_0.r_0^2.\omega_0$ de la que sacamos que la fuerza centrífuga en cualquier punto es $F_c = mr\omega^2 = \dfrac{m_0^2 r_0^4 \omega_0^2}{mr^3}$

Y la fuerza gravitatoria $F_g = \dfrac{GM.m}{r^2} = \dfrac{\omega_0^2.r_0^3.m}{r^2}$

Entonces la relación entre ambas es ,

$$\frac{F_g}{F_c} = \frac{\dfrac{\omega_0^2.r_0^3.m}{r^2}}{\dfrac{m_0^2.r_0^4\omega_0^2}{m.r^3}} = \frac{1}{m_0^2.r_0}.m^2.r$$

directamente proporcional la producto m^2. r. Dado que m es decreciente, el factor r debe ser creciente desde el valor inicial r_0 . Por tanto $r > r_0$.

Si r fuera decreciendo m debería crecer con el tiempo y la estrella ganaría masa en lugar de perderla. Por tanto $r > r_0$.

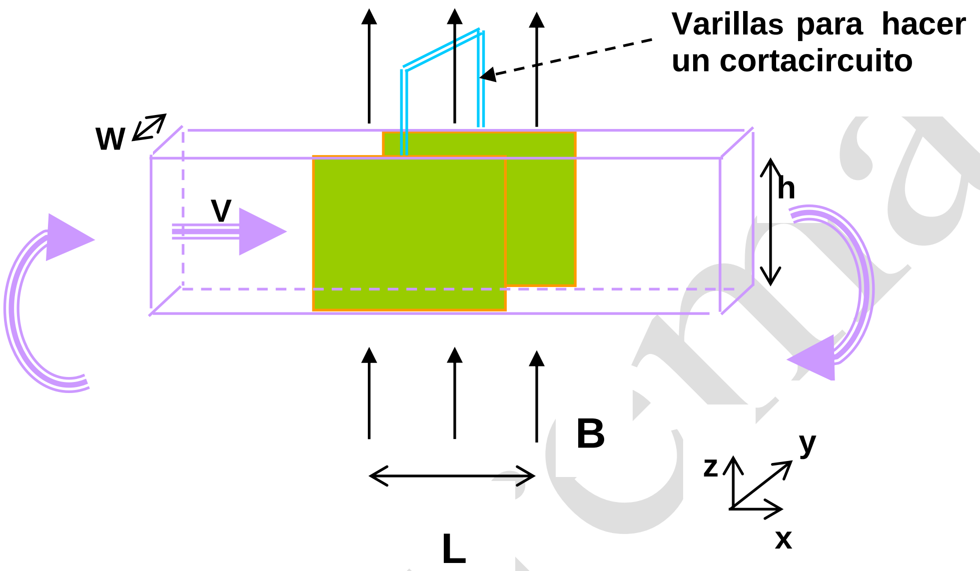
Otro argumento a favor del crecimiento de r.- El incremento del momento lineal es igual a la resultante de las fuerzas que actúan sobre la estrella ordinaria. Este incremento tiene dos componentes, una debida al incremento de la velocidad radial y otra a la pérdida de masa. Las fuerzas presentes son la gravitacional y la centrípeta.

$$-\frac{GMm}{r^2} + mr\omega^2 = m\frac{dv_r}{dt} - v_0\frac{dm_{gas}}{dt}$$

Para que el equilibrio dinámico se mantenga es preciso que mientras m decrece, r aumente. Esto demuestra que en cualquier punto de la trayectoria que siga el gas expulsado, $r > r_o$.

3.- GENERADOR MAGNETOHIDRODINÁMICO (MHD)

Un conducto de forma horizontal hecho de plástico tiene por dimensiones ancho w y alto h, el cual se cierra sobre si mismo, esta lleno con mercurio cuya resistividad eléctrica es. Mediante una turbina se produce un sobrepresión P, lo que determina que el fluido se desplace con una velocidad v_o.



****El movimiento del fluido es muy complicado y con el fin de simplificarlo se hacen las siguientes suposiciones:***
****Aunque el fluido es viscoso su velocidad es constante en toda la sección del conducto***
****La velocidad del fluido es directamente proporcional a la fuerza externa neta que actúe sobre él***
****El fluido es incompresible***

Las dos paredes opuestas verticales de longitud L y altura h están hechas de cobre y corctocircuitadas externamente, existe un campo magnético uniforme B de dirección vertical hacia arriba que ocupa el espacio de estas láminas de cobre.

a) ***Determinar la fuerza que actua sobre el fluido debido al campo magnético , expresada en función de L, B ,h, w, ρ y la nueva velocidad v***
b) ***Deducir una expresión para la nueva velocidad v del fluido en función de v_o, P, L, B y ρ después de que se aplique el campo magnético***

c) ***Calcular la potencia adicional que debe suministrar la turbina para aumentar la velocidad al valor original v_o***

d) ***Ahora el campo magnético se desconecta y el mercurio se reemplaza por agua que fluye a la velocidad v_o. Una onda electromagnética de una única frecuencia se envía a lo largo de la sección L en la dirección del flujo. El índice de refracción del agua es n y v_o<< c. Encuentre una expresión para la contribución del movimiento del fluido a la diferencia de fase entre las ondas que entran y que abandonan la sección L.***

a).- El campo magnético interactúa con las cargas que lleve el líquido conductor. La expresión matemática de esta interacción es $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. De acuerdo con el producto vectorial las cargas negativas se dirigen hacia la chapa de cobre del fondo y las positivas hacia la chapa de cobre situada delante en la figura del enunciado. Aparecerá un campo eléctrico **E** perpendicular a la velocidad y al campo magnético dirigido desde la chapa de cobre delantera hacia la del fondo (sentido positivo del eje y). Cuando la fuerza magnética equilibre a la eléctrica, la suma de las fuerzas sobre una partícula es nula

$$q\mathbf{v} \times \mathbf{B} + q\,\mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Teniendo en cuenta que ambas chapas de cobre están cortocircuitadas el proceso de desviación de las cargas se hace de modo continuo por lo que se establece una corriente eléctrica I . Teniendo en cuenta el movimiento de las cargas negativas (sentido y) y de las positivas (-y) ,la corriente I tiene el sentido –y. A consecuencia de ello sobre el fluido en movimiento aparece una fuerza de valor

$$\mathbf{F_M} = \mathrm{I}\ \mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Dado que el vector **l** tiene el sentido de la corriente I, esto es (-y), resulta que $\mathbf{F_M}$ es perpendicular a **B** y de la misma dirección que la velocidad pero de sentido contrario a ésta (-x) Esta fuerza que actúa en sentido contrario de la corriente produce una disminución de la velocidad v_o que proporciona la turbina.
La intensidad de corriente en función del campo y de la distancia vale

$$I = \frac{V}{R} = \frac{E * w}{\rho \frac{w}{Lh}} = \frac{vBLh}{\rho}$$

El módulo de la fuerza

$$F_M = IlB = \frac{vBLh}{\rho} * w * B = \frac{vB^2Lhw}{\rho} \quad (1)$$

b).- De acuerdo con le enunciado la velocidad del fluido es directamente proporcional a la fuerza externa que actúe sobre él. Por una parte tenemos la fuerza que ejerce la turbina y en sentido contrario la fuerza F_M

$$\text{Fuerza neta} = P*hw - \frac{vB^2Lhw}{\rho} = hw\left(\frac{P\rho - vB^2L}{\rho}\right) = kv \qquad (2)$$

Cuando no actúa el campo magnético

$$P*hw = kv_o$$

Combinado las dos ecuaciones

$$\frac{kv_o}{P}\left(\frac{P\rho - vB^2L}{\rho}\right) = kv \quad \Rightarrow \quad v_o - \frac{v_o vB^2L}{P\rho} = v \quad \Rightarrow \quad v_o = v\left(1 + \frac{v_oB^2L}{P\rho}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{v_o}{\left(1 + \frac{v_oB^2L}{P\rho}\right)} = \frac{v_oP\rho}{P\rho + v_oB^2L}$$

c).- Si la velocidad es v_o, la fuerza F_M vale, según la expresión (1)

$$F_M = \frac{v_oB^2Lhw}{\rho}$$

y según la ecuación (2),la fuerza neta sería

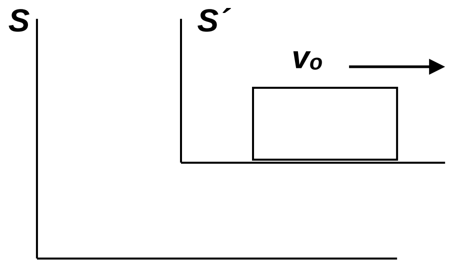
$$P_1 * hw - \frac{v_oB^2Lhw}{\rho} = kv_o \Rightarrow \quad P_1 = \frac{kv_o}{hw} + \frac{v_oB^2L}{\rho} = P + \frac{v_oB^2L}{\rho}$$

El incremento de presión necesario para mantener la velocidad vo será

$$P_1 - P = \frac{v_oB^2L}{\rho}$$

La potencia adicional vale: Potencia = ΔF*vo $= \frac{v_oB^2L}{\rho}hw * v_o = \frac{v_o^2B^2Lhw}{\rho}$

d).- La velocidad de a onda electromagnética en agua en reposo vale $v = \frac{c}{n}$. Si la onda se propaga en agua en movimiento cuya velocidad es v_o, la velocidad de la onda es diferente. La deducción de esta velocidad se puede hacer teniendo en cuenta la teoría de la relatividad de Einstein.



La velocidad con que se desplaza el sistema S’ respecto del sistema S es vo. Para el observador en S’ el agua está en reposo y si mide la velocidad de la onda electromagnética encuentra c/n. Para el observador en S el agua se desplaza y para encontrar la velocidad de la onda aplica las expresiones de la adición de velocidades relativista

$$v_S=\frac{\frac{c}{n}+v_o}{1+\frac{v_o\frac{c}{n}}{c^2}}=\frac{\frac{c}{n}+v_o}{1+\frac{v_o}{nc}}=\frac{\left(\frac{c}{n}+v_o\right)\left(1-\frac{v_o}{nc}\right)}{1-\frac{v_o^2}{n^2c^2}}=\frac{\frac{c}{n}-\frac{v_o}{n^2}+vo-\frac{v_o^2}{nc}}{1-\frac{v_o^2}{n^2c^2}}$$

Teniendo en cuenta que vo es una velocidad muy pequeña respecto de c, podemos ignorar los términos $\frac{v_o^2}{nc}$ y $\frac{v_o^2}{n^2c^2}$

$$v_S=\frac{c}{n}+v_o\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

La onda tara en recorrer la distancia L, cuando el agua está en reposo $t_1=\frac{L}{\frac{c}{n}}$.

Si el agua se desplaza con velocidad v_o , tarda un tiempo diferente

$$t_2=\frac{L}{\frac{c}{n}+v_o\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}$$

siendo la diferencia de tiempos

$$t_1-t_2=L\left[\frac{1}{\frac{c}{n}}-\frac{1}{\frac{c}{n}+v_o\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}\right]$$

El desfase entre las ondas es tal que si la diferencia de tiempos fuese un periodo T ,el desfase sería 2π.

$$\frac{2\pi}{T}=\frac{\Delta\varphi}{t_1-t_2}=2\pi f\Rightarrow\Delta\varphi=2\pi fL\left[\frac{\frac{c}{n}+v_o\left(1-\frac{1}{n^2}\right)-\frac{c}{n}}{\frac{c^2}{n^2}+\frac{c}{n}v_o\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}\right]$$

Teniendo en cuenta que $\frac{c^2}{n^2}>>\frac{c}{n}v_o\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, resulta:

$$\Delta\varphi=2\pi fL\left[\frac{v_o\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{c^2}{n^2}}\right]=2\pi fL\left[\frac{v_o\left(n^2-1\right)}{c^2}\right]$$