

**PROBLEMAS DE**

**LAS OLIMPIADAS**

**INTERNACIONALES**

**DE FÍSICA**

**José Luis Hernández Pérez**

**Agustín Lozano Pradillo**

Madrid 2008

XXXIII OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. INDONESIA  
2002

### ***I.-RADAR PENETRANTE BAJO TIERRA***

*1) El radar penetrante bajo tierra (GPR) se utiliza para detectar y localizar objetos que están bajo la superficie terrestre a poca profundidad, para ello, se envían ondas electromagnéticas al interior de la tierra y se reciben las ondas reflejadas por los objetos. La antena y el detector están colocados sobre la superficie terrestre y en el mismo lugar. Una onda electromagnética plana polarizada de frecuencia angular  $\omega$  que se propaga en la dirección  $z$  está representada mediante la ecuación*

$$E = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

*En la que  $E_0$  es constante,  $\alpha$  es el coeficiente de atenuación y  $\beta$  es el número de onda expresados por*

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} - 1 \right]} \quad ; \quad \beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} + 1 \right]}$$

*$\mu, \epsilon$  y  $\sigma$  representan la permeabilidad magnética, la permitividad eléctrica y la conductividad eléctrica respectivamente.*

*La señal no se detecta cuando la amplitud de la señal del radar que proviene del objeto cae por debajo de  $1/e$  (37%) de su valor inicial. Se emplea una onda electromagnética de frecuencia variable (10 MHz a 1000 MHz) con la finalidad de ajustar el rango y resolución de la detección.*

*El funcionamiento del GPR depende de su resolución, la cual representa la mínima separación entre dos objetos reflectantes que pueden detectarse. La mínima separación debe originar como mínimo una diferencia de fase de  $180^\circ$  entre las dos ondas reflejadas que llegan al detector*

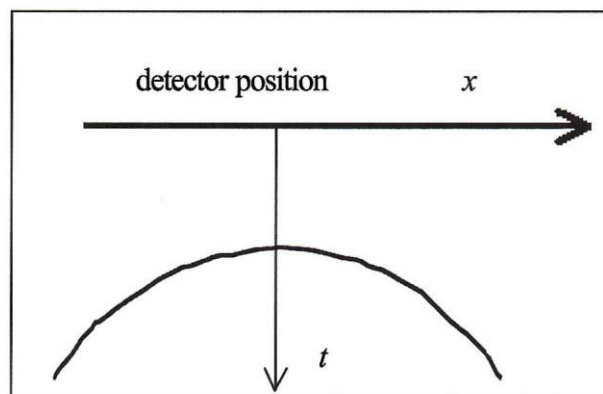
**Datos:**  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$     y     $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$

a) Suponer que la tierra es no magnética ( $\mu = \mu_0$ ) cumpliéndose la condición  $\left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2 \ll 1$ . Obtenga la velocidad de propagación  $v$  en términos de  $\mu$  y  $\epsilon$ .

b) Calcular la máxima profundidad a la que se puede detectar un objeto si la conductividad de la tierra es  $1,0 \text{ mS/m}$  y la permitividad  $9\epsilon_0$ , cumpliéndose la condición  $\left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2 \ll 1$

c) Considerar dos barras conductoras paralelas que están enterradas bajo tierra a una profundidad de  $4\text{m}$ . La tierra tiene una conductividad de  $1,0\text{mS/m}$  y una permitividad de  $9\epsilon_0$ . Suponer que el GPR está situado por encima de una de las barras y suponer que el detector es puntual. Calcule la mínima frecuencia requerida para obtener una resolución lateral de  $50 \text{ centímetros}$ .

d) Para determinar la profundidad de una barra enterrada a una distancia  $d$  de la superficie terrestre se hacen medidas a lo largo de una línea perpendicular a la superficie terrestre y el resultado de las mismas se refleja en la siguiente gráfica



Gráfica del tiempo empleado  $t$  frente a la posición  $x$  del detector,  $t$  (mínimo) =  $100 \text{ ns}$

Obtener la expresión matemática que relaciona  $t$  en función de  $x$  y calcular el valor de  $d$ .

a) .- Obtenga la velocidad de propagación  $v$  en términos de  $\mu$  y  $\epsilon$ .

Recordemos que la ecuación de una onda armónica es

$$E = E_0 \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) = E_0 \cos \left( \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi z}{\lambda} \right) = E_0 \cos \left( \frac{2\pi v}{\lambda} t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right)$$

identificando el paréntesis de la ecuación del problema con la ecuación anterior, se tiene:

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} \quad ; \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \omega = \beta v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\omega}{\beta}$$

El número de ondas que da el enunciado es:

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} + 1 \right]} \quad \text{si} \quad \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

De las ecuaciones (1) y (2) se deduce  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$

**b).- Calcular la máxima profundidad a la que se puede detectar un objeto**

El límite de detección se produce, según el enunciado, cuando  $E = \frac{E_0}{e} = 0,37E_0$

$$\frac{E_0}{e} = E_0 e^{-\alpha z} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{e} = e^{-\alpha z} \quad \Rightarrow \quad 1 = e^{-\alpha z + 1} \quad \Rightarrow \quad \ln 1 = -\alpha z + 1 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{\alpha}$$

$$z_m = \frac{1}{\omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} - 1 \right]}}$$

Aplicando el desarrollo  $(1+x)^n \approx 1+nx$ , esto es,  $\left(1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}$

$$z_m = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu \sigma^2}{4\epsilon}}} = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$$

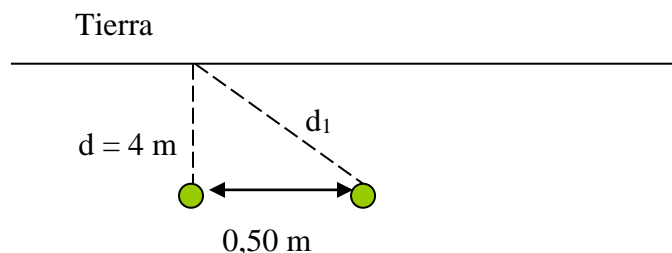
Teniendo en cuenta que

$$\sigma = 1,0 \frac{\text{mS}}{\text{m}} \quad , \quad \mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \quad , \quad \epsilon = 9\epsilon_0 = 9 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

$$z_m = \frac{2}{1,0 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\frac{9 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{4\pi \cdot 10^{-7}}} = 15,9 \text{ m}$$

**c) .- Calcule la mínima frecuencia requerida para obtener una resolución lateral de 50 centímetros.**

En la figura inferior se observa que la onda electromagnética para detectar la primera barra debe recorrer la distancia  $d$ , dos veces ida y vuelta, y para detectar la otra barra la distancia  $d_1$ , también dos veces.



El enunciado del problema dice que para la resolución la diferencia de fase debe ser  $180^\circ$ , por tanto entre la ida y la vuelta, debe existir una diferencia de media longitud de onda, o lo que es lo mismo  $d_1 = d + \frac{\lambda}{4}$

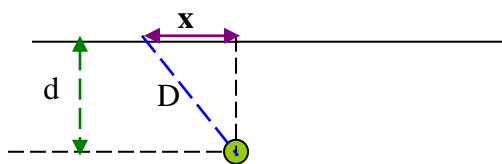
$$\left(d + \frac{\lambda}{4}\right)^2 = d^2 + 0,50^2 \Rightarrow \lambda^2 + 32\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 0,125 \text{ m}$$

Con este dato podemos obtener la frecuencia

$$v = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 * 9\epsilon_0}} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} * 9 * 8,85 \cdot 10^{-12}}} \frac{1}{0,125} = 8,0 \cdot 10^8 \text{ Hz}$$

**d).- Obtener la expresión matemática que relaciona  $t$  en función de  $x$  y calcular el valor de  $d$ .**

En la figura se observa que cuando el detector y antena estén justamente encima del objeto enterrado, la longitud que recorre la onda es mínima y por tanto el tiempo empleado en dicho recorrido



$$d^2 + x^2 = D^2 = v^2 t^2, \text{ como } v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{3\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} = 1,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x = \sqrt{10^{16} t^2 - d^2}$$

Al tiempo mínimo ( $t$  mínimo de ida y vuelta = 100 ns), le corresponde el valor  $x = 0$ .

$$0 = 10^{16} t^2 - d^2 \Rightarrow d = 10^8 t = 10^8 * 50 \cdot 10^{-9} = 5 \text{ m}$$

## II.-SEÑALES ELÉCTRICAS TRANSMITIDAS

*Algunos animales marinos tienen la habilidad de detectar a otras criaturas situadas a cierta distancia debido a las corrientes eléctricas que producen estas criaturas al respirar o a otras contracciones musculares. Algunos predadores utilizan estas señales eléctricas para localizar a sus presas aun cuando se encuentren escondidas bajo la arena.*

*El mecanismo eléctrico que subyace en la generación de la corriente por parte de las presas y su detección por parte del predador pueden modelarse tal como indica la figura 1.*

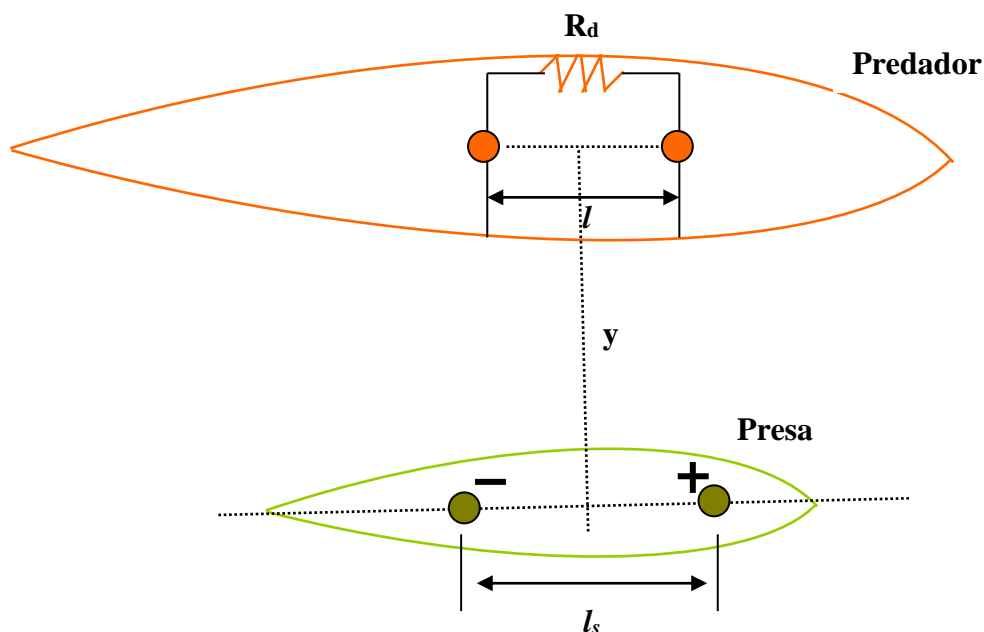


Fig1.- Un modelo para describir la detección de la potencia eléctrica proveniente de una presa hacia su predador

*La corriente eléctrica generada por la presa fluye entre dos esferas con potenciales positivo y negativo situadas en el cuerpo de la presa. La distancia entre los centros de las dos esferas es  $l_s$  y cada esfera tiene un radio  $r_s$ , siendo  $r_s$  mucho más pequeño que la distancia  $l_s$ .*

*La resistividad del agua de mar es  $\rho$ . Se supone que la resistividad del cuerpo de la presa es igual a la del agua de mar, lo cual supone que se debe ignorar la frontera límite indicada en la figura 1 para la presa.*

*Con la finalidad de describir la detección de la potencia eléctrica por parte del predador, el detector se modeliza también mediante dos esferas situadas en su cuerpo y que se encuentran en contacto con el agua de mar, situadas de forma paralela a las de la presa. Ambas esferas se encuentran a una distancia  $l_d$  y cada una posee un radio  $r_d$ , siendo éste*

*muy pequeño respecto de la distancia  $l_d$ . El campo eléctrico a lo largo de la línea de conexión de ambas esferas es constante. En este caso el centro del detector se encuentra a una distancia y por encima de la fuente como indica la figura 1.*

*El detector forma un circuito eléctrico cerrado formado por la presa, el agua de mar y el predador, tal como indica la figura 2.*

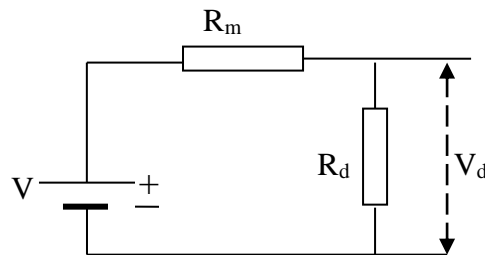


Fig 2.- El circuito cerrado es equivalente al del predador la presa y el agua de mar.

*En la figura 2,  $V$  es la diferencia de voltaje entre las esferas del detector debido al campo eléctrico inducido por la presa,  $R_m$  es la resistencia eléctrica debida al agua de mar,  $V_d$  y  $R_d$  son respectivamente la diferencia de voltaje entre las esferas detectoras y la resistencia entre ellas debido al cuerpo del predador.*

1.- Determinar la densidad de corriente  $\vec{j}$  (corriente por unidad de área) causada por una fuente de corriente puntual  $I_s$  a una distancia  $r$  en un medio infinito.

2.- Basado en la ley  $\vec{E} = \rho \vec{j}$ , calcular la intensidad del campo eléctrico  $E_p$  en el medio de las esferas de detección ( punto  $P$ ) para una corriente dada  $I_s$  entre las esferas del cuerpo de la presa.

3.-Determinar para la misma corriente  $I_s$  la diferencia de voltaje  $V_s$  entre las esferas de la presa y la resistencia eléctrica entre ellas y la potencia producida por la fuente

4.-Calcular  $R_m$  y  $V_d$  de la figura2 y también la potencia transferida ( $P_d$ ) desde la fuente al detector

5.-Calcular el valor óptimo de  $R_d$  que permite la máxima potencia de detección y determinar el valor de ésta.

Los modelos de campo fuente (source-field) más sencillos son el monopolo y el dipolo. A efectos de resolver este problema se puede hacer mediante las leyes electrostáticas, cambiando  $I_s$  por la carga estática y  $\sigma$  reemplaza a la permitividad y el vector densidad de corriente  $\mathbf{j}$  está relacionado con el campo mediante la expresión

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} = \rho \mathbf{j}$$

### 1).- Determinar la densidad de corriente $\mathbf{j}$

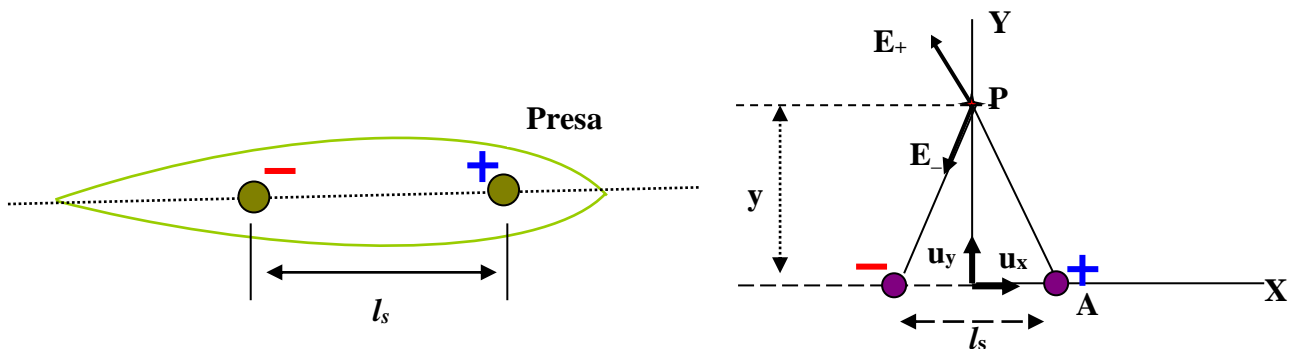
El campo creado por una carga puntual en un medio de permitividad  $\epsilon$ , esta dado por la expresión

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon r^2} \mathbf{e} \Rightarrow \rho \mathbf{j} = \frac{1}{4\pi \sigma r^2} \mathbf{e} \Rightarrow \mathbf{j} = \frac{I_s}{4\pi r^2} \mathbf{e} \quad (1)$$

$\mathbf{e}$  es un vector unitario con origen en la corriente punto y dirigido hacia le punto que dista  $r$ .

### 2).- Calcular la intensidad del campo eléctrico

Para calcular el campo en el punto P lo hacemos como si las esferas fuesen conductores con cargas eléctricas de distinto signo y aplicando la expresión (1)



$\mathbf{u}_x$  es un vector unitario en la dirección positiva del eje X ,  $\mathbf{u}_y$  es un vector unitario en la dirección positiva del eje Y

$$\mathbf{E}_+ = \rho \mathbf{j} = \frac{\rho I_s}{4\pi r^2} \mathbf{e}_1 \quad (2)$$

$\mathbf{e}_1$  es un vector unitario dirigido en la dirección y sentido AP y vale

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{AP}}{|\mathbf{AP}|} = \frac{\mathbf{OP} - \mathbf{OA}}{|\mathbf{AP}|} = \frac{y\mathbf{u}_y - \frac{l_s}{2}\mathbf{u}_x}{\sqrt{y^2 + \frac{l_s^2}{4}}} \quad (3)$$

Se sustituye (3) en (2)

$$\mathbf{E}_+ = \rho \mathbf{j} = \frac{\rho I_s}{4\pi r^2} \mathbf{e}_1 = \frac{\rho I_s}{4\pi AP^2} \mathbf{e}_1 = \frac{\rho I_s}{4\pi} \left[ \frac{y\mathbf{u}_y - \frac{l_s}{2}\mathbf{u}_x}{\left(y^2 + \frac{l_s^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \right]$$



Siguiendo el mismo procedimiento para  $E_-$  resulta:

$$\mathbf{E}_- = -\frac{\rho I_s}{4\pi} \left[ \frac{y\mathbf{u}_y + \frac{l_s}{2}\mathbf{u}_x}{\left(y^2 + \frac{l_s^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

El campo resultante

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = -\frac{\rho I_s}{4\pi} \left[ \frac{l_s\mathbf{u}_x}{\left(y^2 + \frac{l_s^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Teniendo en cuenta que  $y \gg l_s$

$$\mathbf{E}_p = -\frac{\rho I_s l_s}{4\pi y^3} \mathbf{u}_x \quad (4)$$

**3).- Determinar para la misma corriente  $I_s$  la diferencia de voltaje  $V_s$  entre las esferas de la presa y la resistencia eléctrica entre ellas y la potencia producida por la fuente**

Seguimos suponiendo que las esferas son dos conductores. El potencial de la positiva en su centro debido a la carga de ella misma es:

$$V_+ = \frac{\rho I_s}{4\pi r_s}$$

y el de la esfera negativa

$$V_- = -\frac{\rho I_s}{4\pi r_s}$$

Se hace la aproximación de que al ser  $l_s \gg r_s$  la influencia de una esfera en otra es despreciable

$$\Delta V = V_+ - V_- = \frac{\rho I_s}{2\pi r_s} \quad (5)$$

Con más rigor debemos tener en cuenta para el cálculo del potencial el que crea una esfera en el centro de la otra. Así

$$V_+ = \frac{\rho I_s}{4\pi r_s} + \frac{\rho I_s}{4\pi(l_s - r_s)} \quad ; \quad V_- = -\frac{\rho I_s}{4\pi r_s} + \frac{\rho I_s}{4\pi(l_s - r_s)}$$

$$\Delta V = V_+ - V_- = \frac{2\rho I_s}{4\pi r_s} - \frac{2\rho I_s}{2\pi(l_s - r_s)} = \frac{\rho I_s(l_s - r_s) - \rho I_s r_s}{2\pi r_s(l_s - r_s)} = \frac{\rho I_s(l_s - 2r_s)}{2\pi r_s(l_s - r_s)}$$

La expresión anterior conduce a (5) cuando  $l_s \gg r_s$

La resistencia eléctrica entre las dos esferas vale:  $R_s = \frac{V_s}{I_s} = \frac{\frac{\rho I_s}{2\pi r_s}}{I_s} = \frac{\rho}{2\pi r_s}$  (6)

La potencia:  $P = V_s I_s = \frac{\rho I_s^2}{2\pi r_s}$  (7)

4).- De acuerdo con la expresión (6) el valor de  $R_m$  es:  $R_m = \frac{\rho}{2\pi r_d}$

El campo eléctrico creado por la presa en el punto P corresponde a la expresión (4).  
Teniendo en cuenta que este es constante resulta:

$$V = E_p * l_d = \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3}$$

Si observamos el circuito eléctrico del enunciado

$$i_d = \frac{V}{R_d + R_m} ; i_d = V_d R_d \Rightarrow V_d = \frac{V R_d}{R_d + R_m} = \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3} \frac{R_d}{R_d + \frac{\rho}{2\pi r_d}}$$

$$P_d = i_d V_d = \frac{V V_d}{R_d + R_m} = \frac{V^2 R_d}{(R_d + R_m)^2} = \left( \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3} \right)^2 \frac{R_d}{\left( R_d + \frac{\rho}{2\pi r_d} \right)^2} \quad (8)$$

Para calcular el valor máximo de la potencia transmitida derivamos la expresión (8) respecto de la variable  $R_d$  e igualamos a cero.

$$\frac{dP_d}{dR_d} = V^2 \left[ \frac{(R_d + R_m)^2 - 2R_d(R_d + R_m)}{(R_d + R_m)^4} \right] = 0 \Rightarrow R_d + R_m - 2R_d = 0 \Rightarrow R_d = R_m = \frac{\rho}{2\pi r_d}$$

$$P_d(\max) = \left( \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3} \right)^2 * \frac{R_m}{4R_m^2} = \left( \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3} \right)^2 * \frac{2\pi r_d}{4\rho} = \frac{\rho (I_s l_s l_d)^2}{32\pi y^6}$$

### III- VEHÍCULO PESADO MOVIÉNDOSE POR UN PLANO INCLINADO

La figura III-1 es un modelo simplificado de un vehículo pesado que tiene un cilindro en la parte trasera y otro en la delantera como ruedas y que se desplaza por un plano inclinado de ángulo  $q$ . Cada cilindro tiene una masa  $M$  y su forma (ver figura III.2), consiste en un cilindro hueco siendo el radio exterior  $R_o = R$  y el interior  $R_i = 0,8 R_o$ , además lleva ocho radios iguales distribuidos simétricamente siendo la masa total  $0,2 M$ . La masa del tren de aterrizaje que soporta el armazón del vehículo se considera despreciable. El vehículo se desplaza hacia abajo de un plano inclinado por la acción del campo gravitatorio terrestre y de las fuerzas de rozamiento

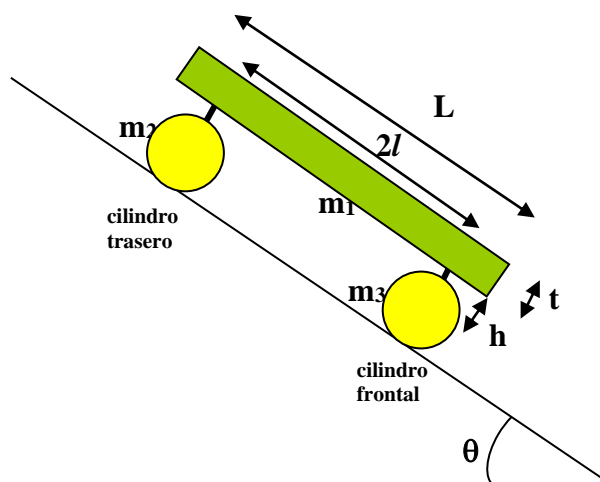


Fig. III-1

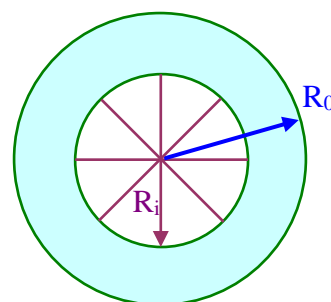


Fig. III-2

Los coeficientes de rozamiento estático y dinámico entre los cilindros y la carretera son  $\mu_s$  y  $\mu_k$  respectivamente. El armazón del vehículo tiene una masa  $5M$ , una longitud  $L$  y un espesor  $t$ . La distancia entre los centros de los cilindros es  $2l$  y éstos están dispuestos simétricamente respecto del armazón. La distancia desde el centro de un cilindro a la base inferior del armazón es  $h$ . El rozamiento entre eje y cilindro es despreciable.

1) Calcular el momento de inercia de cada cilindro

2) Dibujar todas las fuerzas que actúan en los cilindros y en el armazón. Escribir las ecuaciones de movimiento de cada parte (cilindros y armazón)

3) *El vehículo parte del reposo y se mueve libremente bajo la influencia del campo gravitatorio. Calcular las aceleraciones para los siguientes casos: 1) rodadura pura de ambos cilindros 2) rodadura con deslizamiento de ambos cilindros 3) rodadura pura del cilindro delantero y rodadura con deslizamiento del trasero.*

4) *Suponer que después de que el vehículo ha recorrido una distancia  $d$  con rodadura pura penetra en una sección de la carretera en la que los coeficientes de rozamiento son menores  $\mu_{ss}$  y  $\mu_{kk}$  de modo que ambos cilindros comienzan a deslizar. Determinar la velocidad lineal y angular de cada cilindro después de que el vehículo haya viajado una distancia total de  $s$  metros. Se supone que  $d$  y  $s$  son mucho mayores que las dimensiones del vehículo.*

1) El momento de inercia de cada cilindro es la suma del momento de inercia de los radios más la del cilindro hueco.

Cada radio gira alrededor de su extremo y su momento de inercia se puede calcular partiendo del momento de inercia de una barra homogénea y del teorema de Steiner

$$I_{\text{radio}} = \frac{1}{12} ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3} \Rightarrow I_{\text{8radios}} = \frac{0,2MR_i^2}{3} = \frac{0,2M(0,8R)^2}{3} = \frac{0,128MR^2}{3}$$

Para calcular el momento de inercia del cilindro hueco debemos recurrir al cálculo integral. Supongamos que a una distancia  $R_i < x < R$  consideramos una capa cilíndrica de espesor  $dx$ , sea  $\rho$  la densidad del material y  $H$  su altura, su masa vale

$$dm = H * 2\pi x \, dx * \rho$$

y su momento de inercia respecto del eje del cilindro  $dI = H * 2\pi x \, dx * \rho * x^2$ . El momento de inercia del cilindro hueco se obtiene por integración de la expresión anterior entre los límites  $R_i$  y  $R$

$$I_{\text{cil.hueco}} = \int_{R_i}^R H * 2\pi x^3 \, dx * \rho = 2\pi H \rho \frac{x^4}{4} \Big|_{R_i}^R = \pi H \rho \left( \frac{R^4 - R_i^4}{2} \right) = \frac{\pi H \rho}{2} (R^2 + R_i^2)(R^2 - R_i^2)$$

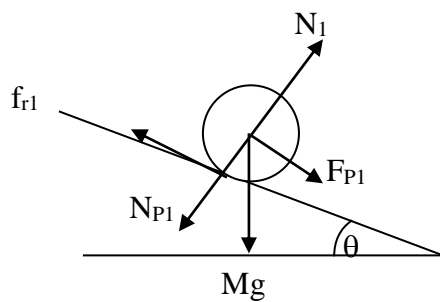
La masa del cilindro hueco es

$$0,8 M = \pi(R^2 - R_i^2) * H * \rho$$

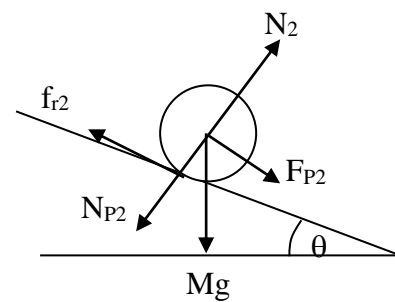
De las dos últimas ecuaciones se deduce

$$I_{\text{cil.hueco}} = 0,4M(R^2 + R_i^2) = 0,4M(R^2 + 0,64R^2) = 0,656MR^2$$

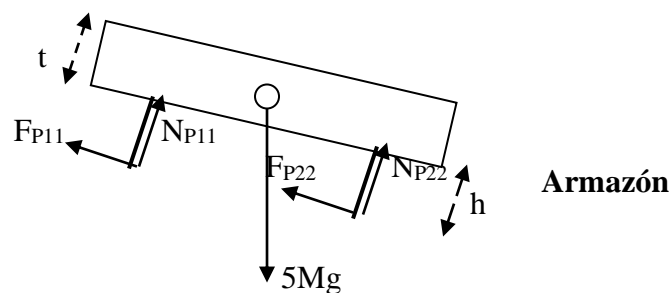
$$I_{\text{cilindro}} = I_{\text{cil.hueco}} + I_{\text{8radios}} = 0,656MR^2 + \frac{0,128}{3}MR^2 \approx 0,7MR^2$$



Rueda trasera



Rueda delantera



Armazón

**Rueda trasera :**  $Mg$  es el peso ,  $f_{r1}$  la fuerza de rozamiento,  $N_1$  la fuerza que ejerce el plano inclinado ,  $N_{P1}$  y  $F_{P1}$  son las componentes que el armazón ejerce sobre la rueda

**Rueda delantera :**  $Mg$  es el peso ,  $f_{r2}$  la fuerza de rozamiento,  $N_2$  la fuerza que ejerce el plano inclinado ,  $N_{P2}$  y  $F_{P2}$  son las componentes que el armazón ejerce sobre la rueda

**Armazón:**  $5 Mg$  es el peso aplicado en el centro de masas,  $F_{P11}$  es la reacción a  $F_{P1}$  ,  $N_{P11}$  es reacción de  $N_{P1}$ ,  $F_{P22}$  reacción a  $F_{P2}$  ,  $N_{P22}$  reacción a  $N_{P2}$

Ecuaciones del movimiento

**Rueda trasera**       $F_{P1} - f_{r1} + Mg \operatorname{sen}\theta = Ma$     (1)    ;     $N_{P1} + Mg \cos\theta = N_1$     (2)

**Rueda delantera**     $F_{P2} - f_{r2} + Mg \operatorname{sen}\theta = Ma$     (3)    ;     $N_{P2} + Mg \cos\theta = N_2$     (4)

**Armazón**             $5Mg \operatorname{sen}\theta - F_{P1} - F_{P2} = 5Ma$     (5)    ;  $5Mg \cos\theta = N_{P1} + N_{P2}$     (6)

En el armazón se cumple que la suma de momentos de las fuerzas respecto al centro de masas es nula.

$$-N_{P1} * l + N_{P2} * l - F_{P1} \left( h + \frac{t}{2} \right) - F_{P2} \left( h + \frac{t}{2} \right) = 0$$

En las ecuaciones del armazón se ha hecho uso del principio de acción y reacción, esto es, que los módulos de las fuerzas de acción y reacción son iguales.

### 3)-1 Calcular las aceleraciones para el siguiente caso: 1) rodadura pura de ambos cilindros

Sumamos las ecuaciones (1) y (2)

$$F_{P1} + F_{P2} - f_{r1} - f_{r2} + 2Mg \operatorname{sen}\theta = 2Ma \quad (8)$$

Como los dos cilindros ruedan sin deslizar se cumple:

$$f_{r1} * R = I\alpha \quad ; \quad a = \alpha R \Rightarrow f_{r1} = \frac{Ia}{R^2}; \quad f_{r2} * R = I\alpha \quad ; \quad a = \alpha R \Rightarrow f_{r2} = \frac{Ia}{R^2}$$

Sustituyendo en la ecuación (8)

$$F_{P1} + F_{P2} - \frac{2Ia}{R^2} + 2Mg \operatorname{sen}\theta = 2Ma \quad (9)$$

De la ecuación (5) se deduce:  $F_{P1} + F_{P2} = 5M(g \operatorname{sen}\theta - a)$ , llevado a la ecuación (9)

$$\begin{aligned} 5M(g \operatorname{sen}\theta - a) - \frac{2Ia}{R^2} + 2Mg \operatorname{sen}\theta &= 2Ma \Rightarrow 7Mg \operatorname{sen}\theta = 7Ma + \frac{2 * 0,7MR^2 * a}{R^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow 7Mg \operatorname{sen}\theta &= 8,4Ma \Rightarrow a = \frac{7}{8,4} g \operatorname{sen}\theta = 0,833g \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

El ángulo  $\theta$  debe cumplir alguna relación para que se verifique la rodadura pura.

A partir de la ecuación (7) se deduce:  $1(N_{P2} - N_{P1}) = \left(h + \frac{t}{2}\right)(F_{P1} + F_{P2}) \quad (10)$

La ecuación (6)  $N_{P1} + N_{P2} = 5Mg \cos\theta$ , se suma a la (10), resulta:

$$N_{P2} = 2,5M \left( g \cos\theta + \frac{h + \frac{t}{2}}{1} (g \operatorname{sen}\theta) - 0,833g \operatorname{sen}\theta \right)$$

Llevando esta relación a la ecuación (4)

$$N_2 = 3,5Mg \cos\theta + 0,42Mg \operatorname{sen}\theta \frac{h + \frac{t}{2}}{1} \quad (11)$$

Si la ecuación (6) se suma en lugar de restarse a (10) y se opera el resultado es:

$$N_1 = 3,5Mg \cos\theta - 0,42Mg \operatorname{sen}\theta \frac{h + \frac{t}{2}}{1}$$

Si existe rodadura pura, se tienen que cumplir las siguientes condiciones para la rueda trasera

$$f_{r1} < \mu_s N_1 ; f_{r1} * R = I\alpha ; a = \alpha R \Rightarrow f_{r1} * R < \mu_s N_1 R \Rightarrow \frac{Ia}{R} < \mu_s N_1 R \Rightarrow$$

$$0,7MR^2 * 0,833g \operatorname{sen}\theta < \mu_s R^2 \left( 3,5Mg^{3,5} \cos\theta - 0,42Mg \operatorname{sen}\theta \frac{h + \frac{t}{2}}{1} \right) \Rightarrow$$

$$0,583 \operatorname{sen}\theta < 3,5\mu_s \cos\theta - 0,42\mu_s \operatorname{sen}\theta \frac{h + \frac{t}{2}}{1} \Rightarrow \operatorname{tag}\theta \left( 0,583 + 0,42\mu_s \frac{h + \frac{t}{2}}{1} \right) < 3,5\mu_s \Rightarrow$$

$$\operatorname{tag}\theta < \frac{3,5\mu_s}{0,583 + 0,42\mu_s \frac{h + \frac{t}{2}}{1}} \quad (12)$$

Para la rueda delantera las condiciones son:

$$f_{r2} < \mu_s N_2 ; f_{r2} * R = I\alpha ; a = \alpha R \Rightarrow f_{r2} * R < \mu_s N_2 R \Rightarrow \frac{Ia}{R} < \mu_s N_2 R$$

y operando de la misma manera que antes se llega a

$$\operatorname{tag}\theta < \frac{3,5\mu_s}{0,583 - 0,42\mu_s \frac{h + \frac{t}{2}}{1}} \quad (13)$$

### 3)-2 Calcular las aceleraciones para el siguiente caso: 2) rodadura con deslizamiento de ambos cilindros

Si los dos cilindros deslizan las fuerzas de rozamiento son las máximas posibles

$$f_{r1} = \mu_k N_1 ; f_{r2} = \mu_k N_2$$

Sumamos las ecuaciones (1) y (3)

$$F_{p1} + F_{p2} - \mu_k(N_1 + N_2) + 2Mg \operatorname{sen}\theta = 2Ma \quad (14)$$

Sumamos las ecuaciones (2) y (4) y sustituimos el valor de la (6)

$$N_1 + N_2 = N_{p1} + N_{p2} + 2Mg \cos\theta = 7Mg \cos\theta \quad (15)$$

De la ecuación (5)

$$F_{p1} + F_{p2} = 5M(g \operatorname{sen}\theta - a) \quad (16)$$

Se sustituye (15) y (16) en la (14)

$$5Mg \operatorname{sen}\theta - 5Ma - \mu_k 7Mg \cos\theta + 2Mg \operatorname{sen}\theta = 2Ma \Rightarrow a = g \operatorname{sen}\theta - \mu_k \cos\theta$$

**3)-3. Calcular las aceleraciones para el siguiente caso: 3) rodadura pura del cilindro delantero y rodadura con deslizamiento del trasero**

La rueda trasera desliza

$$F_{p1} - \mu_K N_1 + Mg \operatorname{sen}\theta = Ma$$

La rueda delantera rueda

$$F_{p2} - f_{r2} + Mg \operatorname{sen}\theta = Ma \quad \Rightarrow \quad F_{p2} - I \frac{a}{R^2} + Mg \operatorname{sen}\theta = Ma$$

Se suman estas dos ecuaciones y se sustituye el valor del momento de inercia

$$F_{p1} + F_{p2} - \mu_K N_1 + 2Mg \operatorname{sen}\theta - 0,7Ma = Ma$$

De la ecuación (5) se deduce:  $F_{p1} + F_{p2} = 5M(g \operatorname{sen}\theta - a)$ , combinando esta ecuación con la anterior

$$5Mg \operatorname{sen}\theta - 5Ma - \mu_K N_1 + 2Mg \operatorname{sen}\theta - 0,7Ma = Ma \Rightarrow a = \frac{7Mg \operatorname{sen}\theta - \mu_K N_1}{7,7M} \quad (17)$$

La ecuación (7) conduce a  $-N_{p1} + N_{p2} = \left( \frac{h + \frac{t}{2}}{l} \right) (F_{p1} + F_{p2}) = \left( \frac{h + \frac{t}{2}}{l} \right) 5M(g \operatorname{sen}\theta - a)$

La ecuación (6)  $N_{p1} + N_{p2} = 5Mg \cos\theta$

A partir de estas dos últimas ecuaciones  $2N_{p1} = 5Mg \cos\theta - \left( \frac{h + \frac{t}{2}}{l} \right) 5M(g \operatorname{sen}\theta - a)$

De la ecuación (2)  $N_{p1} = N_1 - Mg \cos\theta$ , la ecuación inmediata anterior queda

$$N_1 = 3,5Mg \cos\theta - \left( \frac{h + \frac{t}{2}}{l} \right) 2,5M(g \operatorname{sen}\theta - a) \quad (18)$$

De la ecuación (17) se despeja  $N_1$   $N_1 = \frac{7Mg \operatorname{sen}\theta - 7,7Ma}{\mu_K}$  y se lleva a la (18)



$$7Mg \operatorname{sen}\theta - 7,7Ma = 3,5M\mu_k g \cos\theta - \left(\frac{h+t}{1}\right) 2,5M\mu_k g \operatorname{sen}\theta + \left(\frac{h+t}{1}\right) 2,5M\mu_k a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7g \operatorname{sen}\theta + \left(\frac{h+t}{1}\right) 2,5\mu_k g \operatorname{sen}\theta - 3,5\mu_k g \cos\theta = 7,7a + \left(\frac{h+t}{1}\right) 2,5\mu_k a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{g \operatorname{sen}\theta \left[ 7 + \left(\frac{h+t}{1}\right) 2,5\mu_k \right] - 3,5\mu_k g \cos\theta}{7,7 + \left(\frac{h+t}{1}\right) 2,5\mu_k}$$

4).- Si el vehículo parte del reposo y rueda sin deslizamiento su aceleración vale

$$a_d = 0,833g \operatorname{sen}\theta$$

y su velocidad lineal al final del tramo de longitud d

$$v_d = \sqrt{2da_d} = \sqrt{1,666 d g \operatorname{sen}\theta}$$

Su velocidad angular 
$$\omega_d = \frac{v_d}{R} = \frac{\sqrt{1,666 d g \operatorname{sen}\theta}}{R}$$

Cuando el vehículo entra en la zona de deslizamiento la fuerza de rozamiento disminuye y la aceleración vale

$$a_s = g \operatorname{sen}\theta - \mu_{kk} g \cos\theta$$

Las ecuaciones de movimiento de traslación son:

$$v_s = v_d + a_s t \quad ; \quad s - d = v_d t + \frac{1}{2} a_s t^2$$

Despejando el tiempo de la segunda ecuación

$$t = \frac{v_d \pm \sqrt{v_d^2 + 2a_s(s-d)}}{a_s}$$

sustituyéndolo en la ecuación de la velocidad

$$v_s = v_d + a_s \frac{v_d \pm \sqrt{v_d^2 + 2 a_s(s-d)}}{a_s} = \sqrt{v_d^2 + 2 a_s(s-d)}$$

La fuerza de rozamiento crea un momento de valor  $f_r * R = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\mu_{KK}R}{I}$

y la velocidad angular

$$\omega_s = \omega_d + \alpha t = \frac{\sqrt{1,666 \text{ g sen}\theta}}{R} + \frac{\mu_{KK}R}{I} \left( \frac{v_d + \sqrt{v_d^2 + 2a_s(s-d)}}{a_s} \right)$$