PROBLEMAS DE

LAS OLIMPIADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

XXXIV OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. TAIWAN . 2003

I.-UN OSCILADOR CON UN PESO QUE CAE

1) Un cilindro rígido de radio R se mantiene en posición horizontal por encima del suelo. Una cuerda de masa despreciable y longitud L, L>2πR, lleva en su extremo libre una masa m estando el otro extremo sujeto a la parte superior del cilindro como se muestra en la figura 1a.

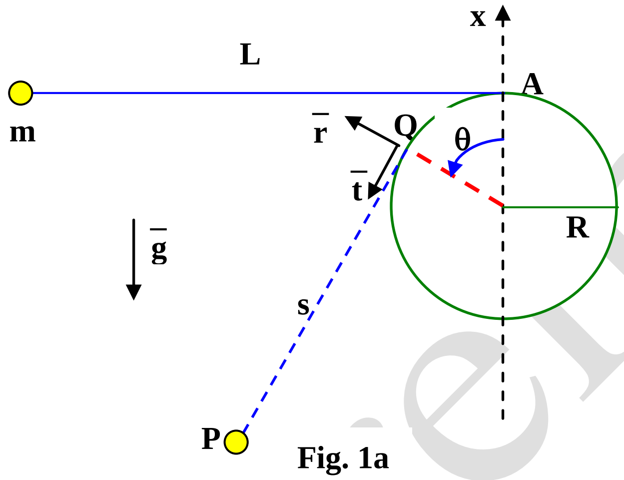

Fig. 1a

El péndulo así formado se eleva hasta alcanzar el nivel A y luego se deja en libertad a partir del reposo estando la cuerda tensa. Despreciar cualquier alargamiento de la cuerda. Se supone que la masa m es puntual y que el péndulo oscila en un plano perpendicular al eje del cilindro. Cuando posteriormente nos referimos a la masa puntual la denominamos <u>partícula</u>. La aceleración de la gravedad es $\vec{g}$ y el origen de coordenadas el punto O. Cuando la partícula se encuentre en el punto P (fig. 1a) la cuerda es tangente a la superficie del cilindro en el punto Q. La longitud QP se designa con s minúscula. Los vectores unitarios en dirección radial y tangencial en Q se representan por $\vec{r}$ y $\vec{t}$ respectivamente. El desplazamiento angular θ de radio OQ que se mide en sentido antihorario se considera como positivo.

Cuando θ=0 la longitud s es igual a L y la energía potencial gravitatoria U de la partícula es cero. A medida que la partícula se desplaza los cambios temporales de θ y s están representados por $\dot{\theta}$ y $\dot{s}$ respectivamente.
Si no se especifica otra cosa las velocidades están referidas al punto O.

PARTE A

En la parte A la cuerda está tirante a medida que la partícula se desplaza.

Encontrar en función de las magnitudes (s, q, $\dot{s}$, $\dot{\theta}$, R, L , g , $\vec{r}$ y $\vec{t}$)

a) La relación entre $\dot{\theta}$ y $\dot{s}$

b) La velocidad $\vec{v}_Q$ del punto móvil Q respecto de O

c) La velocidad $\vec{v}'$ de la partícula respecto del punto móvil Q cuando se encuentra en P.

d) La velocidad $\vec{v}$ de la partícula relativa a O cuando se encuentre en P.

e) La componente $\vec{t}$ de la aceleración de la partícula respecto de O cuando se encuentra en P
f) La energía potencial gravitatoria de la partícula cuando se encuentre en P

g) La velocidad $\vec{v}_m$ de la partícula en el punto más bajo de su trayectoria

PARTE B
En este apartado la relación entre L y R está dada por

$$\frac{L}{R} = \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3}\cot\frac{\pi}{16} = 3{,}534 + 3{,}352 = 6{,}886$$

h)¿Cuál es la velocidad $\vec{v}_s$ de la partícula cuando el segmento de cuerda comprendido entre Q y P está recto y tiene la mínima longitud?

i)¿Cuál es la velocidad $\vec{v}_H$ de la partícula en el punto más alto H cuando la partícula ha oscilado al otro lado del cilindro

PARTE C
Ahora el péndulo en lugar de estar fijo por el extremo A, la cuerda tiene colgada una masa M>m que se considera puntual y la cuerda puede resbalar sobre el cilindro sin rozamiento.
Inicialmente la partícula ocupa una posición tal que la cuerda es paralela al suelo y con longitud L. La masa M se encuentra por debajo del punto O(ver fig. 1b)

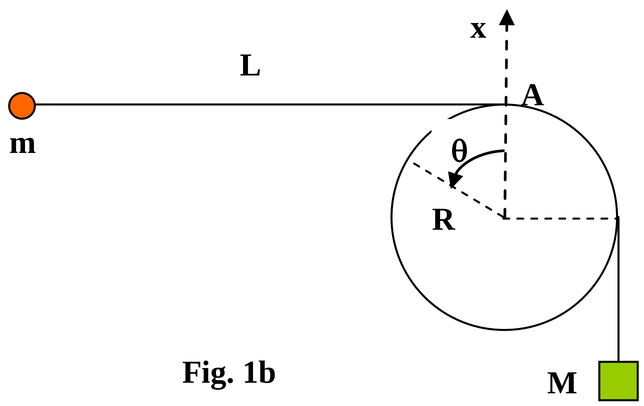

Fig. 1b

Si el sistema se deja en libertad a partir del reposo la masa M cae y la partícula oscila. Se supone que la partícula no tiene impedimento alguno para oscilar al mismo tiempo que la masa M cae.
El rozamiento cinético entre la cuerda y el cilindro es despreciable pero cuando la masa M se detenga el rozamiento estático es tal que la masa M ya no se mueve más ,esto es, permanece en reposo.
j) Se supone que la masa M después de caer una distancia D (L-D>>R), la partícula sigue oscilando alrededor del cilindro hasta un ángulo $\theta = 2\pi$ al mismo tiempo que los segmentos de la cuerda separados del cilindro permanecen rectos, para que esto ocurra el cociente $\alpha = \frac{D}{L}$ debe ser menor que un valor crítico α_c. Despreciando términos del orden de R/L o mayores estimar el valor de α_c.

II.-UN RESONADOR PEIZOELÉCTRICO BAJO LA ACCIÓN DE UN VOLTAJE ALTERNO

1) Una barra uniforme posee una longitud l y una sección A cuando no está sometida a tensiones (fig.2a).
Su longitud cambia en Δl cuando sobre ella actúan fuerzas de valor F aplicadas en dirección normal sobre las caras extremas. La tensión normal T (esfuerzo) está definida por F/A y el cambio relativo de su longitud por $\Delta l/l$, designando a esta magnitud adimensional por S y denominándola deformación unitaria.

En función de estos términos la ley de Hooke se expresa como

$$T = YS \qquad \rightarrow \qquad \frac{F}{A} = Y\frac{\Delta l}{l}$$

siendo Y el módulo de Young.

Cuando se verifica una compresión, T corresponde a F < 0 y da lugar a una disminución en la longitud (Δl < 0). Tal esfuerzo es negativo y su valor está relacionado con la presión p por p=-T.

Para una barra uniforme de densidad p, la velocidad de propagación de ondas longitudinales a lo largo de la barra es $u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$

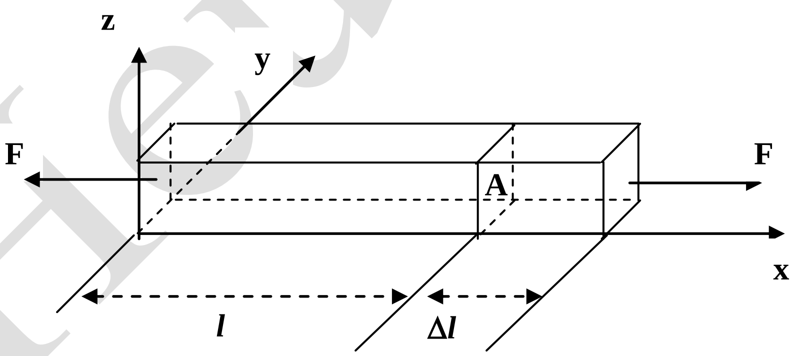

Fig. 2a

Los efectos de amortiguamiento y disipación deben despreciarse.

<u>Parte A. Propiedades mecánicas</u>

Una barra uniforme de longitud semi-infinita, extendiéndose desde x=0 a x=∞ (ver figura 2b) tiene una densidad ρ. Inicialmente no está sometida a tensión. Un pistón actúa de forma constante ejerciendo una presión p en

la cara izquierda a x=0 durante un corto tiempo Δt, originando una onda de presión que se propaga por la barra hacia la derecha con una velocidad u.

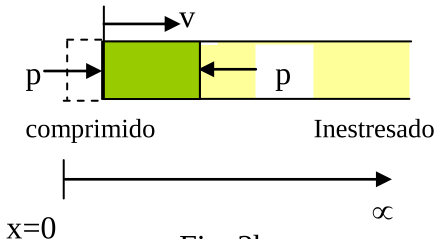

Fig. 2b

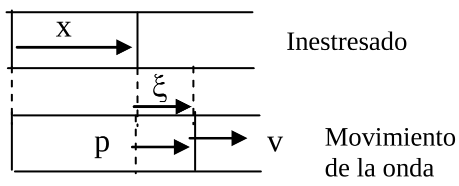

Fig. 2c

a) Si el pistón origina que la cara izquierda de la barra se mueva con una velocidad constante v (fig. 2b), cuáles son la deformación unitaria (S)y la presión p en la cara izquierda durante el tiempo Δt. La respuesta debe darse en función de ρ, u y v

b) Considerar una onda longitudinal desplazándose por la barra a lo largo de la dirección x. Para una sección normal a x cuando la barra está sin tensión (fig 2c) sea $\xi(x,t)$

$$\xi(x,t) = \xi_o \text{ sen } k(x-ut)$$

siendo ξ_o y k constantes .Calcular la velocidad v(x,t),deformación unitaria S (x,t) y p(x,t)

<u>Parte B. Propiedades electromecánicas incluyendo el efecto fotoeléctrico</u>

Considerar un bloque de cristal de cuarzo de longitud b, ancho w y altura h (figura 2d)

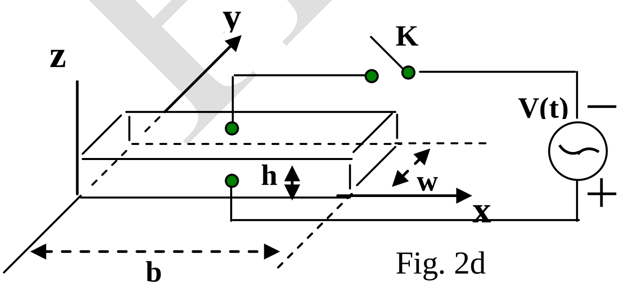

Fig. 2d

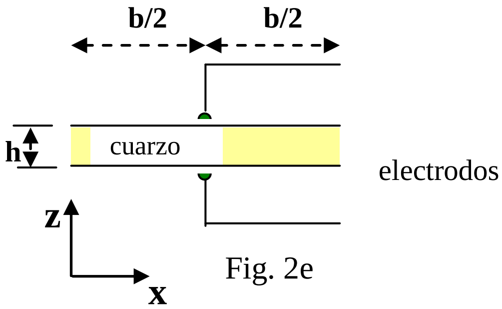

Fig. 2e

Los electrodos estas formados por capas metálicas delgadas que cubren las superficies superior e inferior del bloque. En el centro de los electrodos se han soldado cables conductores que sirven también de

soportes los cuales no son afectados por las posibles oscilaciones a lo largo del eje x.

El cristal de cuarzo tiene una densidad $\rho = 2{,}65.10^{3}\ \dfrac{kg}{m^{3}}$ *y un módulo de Young* $Y = 7{,}87.10^{10}\ \dfrac{N}{m^{2}}$. *La longitud b del bloque es 1,00 cm y el ancho y la altura son tales que h<< w y w<<b. Con el interruptor K abierto se supone que en el bloque de cuarzo en la dirección x, se producen ondas longitudinales estacionarias siendo la frecuencia* $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ *y el desplazamiento*

$$\xi(x,t) = 2\xi_o\ g(x)\ \cos\ \omega t$$

siendo ξ_o *una cantidad positiva constante y la función g(x)*

$$g(x) = B_1\ \operatorname{sen} k\left(x - \frac{b}{2}\right) + B_2\ \cos k\left(x - \frac{b}{2}\right)$$

g(x) tiene como valor máximo la unidad y $k = \dfrac{\omega}{u}$. *Teniendo presente que los centros de los electrodos son nodos y las caras izquierda y derecha del bloque están libres y deben tener esfuerzo cero (o presión)*

c) Determinar los valores de B_1 *y* B_2 *para una onda longitudinal estacionaria en el bloque de cuarzo*

d) ¿Cuáles son las dos frecuencias más bajas de la onda estacionaria con que se puede excitar el bloque de cuarzo?

El efecto piezoeléctrico es una propiedad especial del cristal de cuarzo. La compresión o dilatación del cristal genera un voltaje eléctrico y también ocurre el efecto contrario, esto es, la aplicación de un voltaje externo puede comprimir o expandir al cristal dependiendo de la polaridad del voltaje aplicado. En consecuencia se pueden acoplar las oscilaciones mecánica y eléctrica.

Respecto al efecto piezoeléctrico se designa con □σ y □σ las densidades de carga de los electrodos superior e inferior cuando sobre el bloque de cuarzo actúa un campo eléctrico E en la dirección del eje z. S y T representan la deformación unitaria y el esfuerzo respectivamente.

El efecto piezoeléctrico en el cristal de cuarzo queda descrito por las siguientes ecuaciones:

$$S = \frac{T}{Y} + d_p E \qquad ; \qquad \sigma = d_p T + \varepsilon_T E$$

donde $\varepsilon_T = 4{,}06.10^{-11}$ *F/m es la permitividad a esfuerzo constante y* $d_p = 2{,}25.10^{-12}$ *m/V es el coeficiente piezoeléctrico*

Si el interruptor K de la fig. 2d se cierra, el voltaje alterno

$$V(t)=V_m \cos \omega t$$

actúa a través de los electrodos y en el bloque de cuarzo aparece un campo eléctrico uniforme $E(t) = V(t)/h$ en la dirección del eje z. Cuando se alcanza un estado estacionario, una onda estacionaria longitudinal de frecuencia ω aparece en el bloque en la dirección x.
Con E constante la longitud de onda λ y la frecuencia de la onda estacionaria en el bloque se relacionan por medio de la ecuación $\lambda = u/f$ en la que u esta dada por la ecuación $u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$, pero ya no se cumple la relación $T = YS$ tal como puede observarse en la primera de las ecuaciones del efecto piezoeléctrico, aun cuando siguen siendo válidas las definiciones de deformación unitaria y esfuerzo y además las caras extremas del bloque permanecen libres con esfuerzo cero.

e) A partir de las dos ecuaciones del efecto piezoeléctrico, se deduce que la densidad de carga σ en el electrodo inferior es de la forma

$$\sigma(x,t) = \left[D_1 \cos k\left(x - \frac{b}{2} \right) + D_2 \right] \frac{V(t)}{h}$$

en la que $k=\omega/u$. Encontrar las expresiones para D_1 y D_2.

f) La carga total superficial Q(t) en el electrodo inferior está relacionada con V(t)

$$Q(t) = \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{2}{kb} \operatorname{tag} \frac{kb}{2} - 1 \right) \right] C_o V(t)$$

Encontrar la expresión de C_o y la expresión y el valor numérico de α^2.

III Parte A MASA DEL NEUTRINO Y DESINTEGRACIÓN DEL NEUTRÓN

Un neutrón libre de masa m_n, que se encuentra en reposo respecto del sistema de laboratorio, se desintegra en tres partículas que no interactúan entre sí: un protón, un electrón y un antineutrino. La masa en reposo del protón es m_p, y se supone que la masa m_ν del antineutrino no es nula aunque mucho más pequeña que la masa en reposo del electrón m_e. La velocidad de la luz se indica por c. Las masas de las partículas son

$$m_n = 939{,}56563\ \frac{MeV}{c^2}\ ;\ m_p = 938{,}27231\frac{MeV}{c^2}\ ;\ m_e = 0{,}5109907\frac{MeV}{c^2}$$

En lo que sigue todas las energías y velocidades se refieren al sistema del laboratorio. E designa a la energía total del electrón procedente de la desintegración

Encontrar el valor máximo E_{max} de E y la velocidad v_m del antineutrino cuando E = E_{max}. Las respuestas se darán en función de la masa en reposo de las partículas y de la velocidad de la luz. Dado que $m_\nu < 7{,}3\ \frac{eV}{c^2}$

Calcular E_{max} y la razón $\frac{v_m}{c}$ con tres cifras significativas.

III Parte B

Levitación con luz

Un hemisferio de vidrio transparente tiene una radio R, una masa m y un índice de refracción n. El medio que rodea al hemisferio posee un índice de refracción unidad.
Un haz cilíndrico paralelo de luz láser monocromática incide de forma perpendicular sobre la superficie circular del hemisferio como indica la figura 3a.

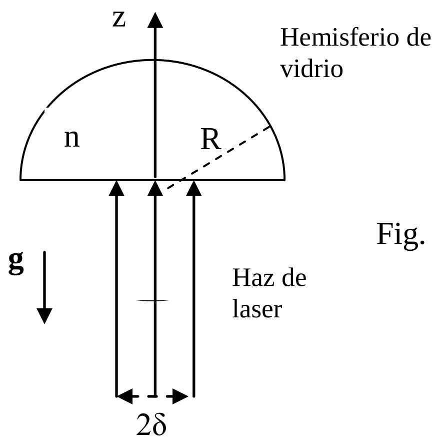

Fig. 3a

El radio del haz es δ y es mucho más pequeño que R. Tanto el haz como el hemisferio son simétricos respecto al eje Z.

Se supone que el hemisferio no absorbe nada de luz del haz y que tampoco existe reflexión. La luz láser entra en el hemisferio y sale por la superficie curva sufriendo una refracción.

Si es preciso se desprecian los términos $(\delta/R)^3$ o superiores. Calcular la potencia del haz de luz láser que equilibra justamente el peso del hemisferio.

Puede utilizarse la aproximación $\cos\theta = 1-(\theta^2/2)$