PROBLEMAS DE

LAS OLIMPIADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

XXXV OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. COREA DEL SUR. 2004

I.-UN CONDENSADOR "PING-PONG"

Un condensador consiste en dos platos circulares paralelos entre sí, siendo R el radio de cada plato y d la distancia entre ellos, cumpliéndose que d<< R (fig 1.1 a). El plato superior está conectado a un voltaje constante V y el inferior a tierra. Después se coloca en el centro del plato inferior un pequeño disco de masa m y radio r (r<<R) y espesor t (t<<r)como indica la figura 1.1b.
Entre los platos se ha hecho el vacío siendo la constante dieléctrica ε_o, tanto los platos como el disco son conductores perfectos. Los efectos electrostáticos en los bordes así como la inductancia del circuito, los efectos relativistas y los efectos de la carga imagen son despreciables.

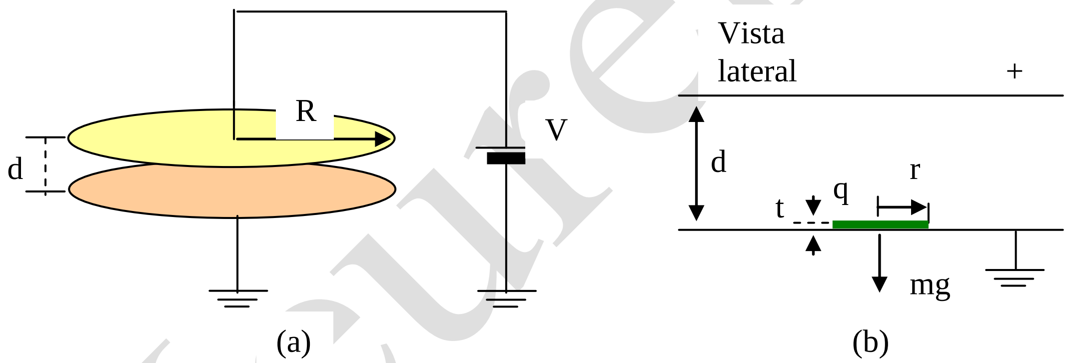

Fig. 1.1

Fig. 1.1 (a) es un dibujo esquemático del condensador conectado a la fuente de potencial V b) es una vista lateral del condensador con el pequeño disco de masa m colocado en el plato inferior

a) Calcule la fuerza electrostática F_e entre los platos separados la distancia d, antes de insertar el disco de masa m

b) Cuando el disco se coloca sobre el plato inferior, su carga q está relacionada con el voltaje V por la expresión $q = \Gamma V$. Encontrar Γ en función de r, d y ε_o

c) Los platos paralelos están colocados perpendicularmente a un campo gravitacional uniforme de intensidad g. Para elevar el disco de la

posición inicial de reposo se necesita aplicar un voltaje mayor que un voltaje umbral V_{th}. Obtener V_{th} en función de m, g, d y Γ.

d) Cuando $V>V_{th}$ el disco efectúa un movimiento arriba-abajo entre los platos (se supone que el disco se mueve verticalmente sin bamboleos). Las colisiones entre el disco y los platos son inelásticas siendo el coeficiente de restitución $\eta = \frac{v \text{ después}}{v \text{ antes}} = \frac{v_d}{v_a}$, siendo, respectivamente, v_a y v_d las velocidades inmediatamente antes y después de la colisión. Los platos permanecen en posiciones fijas. La velocidad del disco después de la colisión con el plato inferior se aproxima a una velocidad constante v_s que depende de V mediante la ecuación

$$v_s = \sqrt{\alpha V^2 + \beta}$$

Obtener los coeficientes α y β en función de m, g, Γ, d , y η
Se supone que el disco choca con el plato de tal modo que se produce un cambio instantáneo de carga en cada colisión

e) Después de alcanzar la velocidad constante, la corriente promedio I a través del condensador se puede aproximar mediante la expresión $I = \gamma V^2$ cuando $qV>>mgd$. Expresar el coeficiente g en términos de m , Γ d y η

f) Cuando el voltaje aplicado V decrece (de modo lento) existe un voltaje crítico V_c por debajo del cual la carga cesa de fluir. Encontrar el voltaje crítico V_c y la corriente I_c en función de m, g, d, Γ y η.
Comparando V_c con el voltaje umbral V_{th} hacer una gráfica aproximada de I-V cuando V aumenta y disminuye en el rango V=0 hasta 3 V_{th}

II.-GLOBO ASCENDENTE

Un globo de goma, lleno de helio, puede ascender en la atmósfera. La presión y temperatura de la atmósfera disminuyen con la altura. En el problema se considera que la forma del globo es esférica a pesar de los aparejos que pueda llevar y que el volumen de éstos es despreciable.
También se admite que la temperatura del gas helio dentro del globo es siempre igual a la de la atmósfera que lo rodea y que los gases tienen comportamiento ideal. La constante universal de los gases es R = 8,31J/(mol*K) , las masas molares del helio y del aire son M_{He}= 4,00.10^{-3} kg/mol y M_A = 28,9.10^{-3} kg/mol, respectivamente. La aceleración de la gravedad es 9,8 m/s^2.

Parte A

a) Sea P la presión del aire y T su temperatura. La presión dentro del globo es mayor que la de fuera debido a la tensión superficial de la goma del globo. Éste contiene n moles de gas helio siendo la presión en el interior $P+\Delta P$. Encontrar la fuerza ascensional F_B que actúa sobre el globo en función de P y ΔP.

b) En Corea y en un día de verano la temperatura T_Z a una altura z respecto del nivel del mar es

$$T_Z = T_o\left(1-\frac{z}{z_o}\right)$$

Expresión válida en el rango $0<z<15$ km ,siendo z_o= 49 km y T_o = 303 K. La presión y la densidad del aire al nivel del mar son, P_o=1,0 atm = 1,01.10^5 Pa y ρ_o= 1,16 kg/m^3, respectivamente.
Para el intervalo de altura especificado, la presión de la atmósfera se expresa mediante la ecuación

$$P_Z = P_o\left(1-\frac{z}{z_0}\right)^{\eta} \quad (2.1)$$

Expresar η en función de z_o, ρ_o, P_o y g y encontrar su valor numérico dando el resultado con dos cifras significativas. Se considera que g no varía con la altura.

Parte B

Si la goma de un globo esférico no tiene tensión y éste tiene un radio r_o, y se infla hasta que adquiere un radio $r>r_o$, la superficie del globo posee una energía elástica debido a su tensión. De acuerdo con una teoría sencilla la energía elástica para una temperatura constante T, está dada por la ecuación

$$U = 4\pi\ r_o^2 \kappa RT\left(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3\right) \qquad (2.2)$$

Siendo $\lambda = \frac{r}{r_o}$ *denominada razón de inflado,* κ *es una constante expresada en mol/m*^{3}.

c) Calcular ΔP en función de los parámetros dados en la ecuación (2.2) y dibujar la gráfica ΔP frente a λ.

d) La constante κ se puede determinar a partir de la cantidad de gas que se necesita para inflar el globo. A T_o= 303 K y P_o= 1atm=1,01.10^5 Pa, un balón sin tensión (λ=1) contiene n_o= 12,5 moles de helio. Cuando se infla el balón hasta que contiene 3,6n_o= 45 moles, el valor de λ es 1,5, siendo la presión y temperatura P_o y T_o ,respectivamente.
Calcular el parámetro del globo a, definido como $a = \frac{\kappa}{\kappa_o}$ *en función de n, n_o y λ, siendo* $\kappa_o = \frac{r_o P_o}{4RT_o}$*.Calcular a con dos cifras significativas.*

Parte C
Un globo preparado como en d) al nivel del mar (inflado con λ = 1,5, n= 3,6n_o= 45 moles de gas helio, a T_o =303 K y P_o = 1,01.10^5 Pa) tiene una masa total M_T=1,12 kg incluido el gas, el propio globo y sus aparejos.

e) Si este globo se eleva en la atmósfera, se detiene a una altura z_f para la cual la fuerza ascensional es igual al peso. Encontrar z_f y la razón de inflado λ_f a esa altura. Dar las respuestas con dos cifras significativas, no considerar la velocidad de ascensión y que no existe pérdida de gas durante el ascenso.

III.-MICROSCOPIO DE PRUEBA ATÓMICA

El microscopio de prueba atómico (APM) es una poderosa herramienta en el campo de la nanociencia. El movimiento de una palanca en el APM se registra mediante un fotodetector que monitoriza el haz reflejado por un láser (fig 3.1). La palanca solamente se puede desplazar en vertical y su desplazamiento z en función del tiempo t se describe mediante la ecuación

$$m\frac{d^2z}{dt^2}+b\frac{dz}{dt}+kz=F$$

siendo m es la masa de la palanca, $k=m\omega_o^2$ ***es la constante del muelle de la palanca ,b es un pequeño coeficiente de amortiguamiento que cumple*** $\omega_o \gg \frac{b}{m} > 0$***, y finalmente F es una fuerza externa aplicada en el tubo piezoeléctrico***

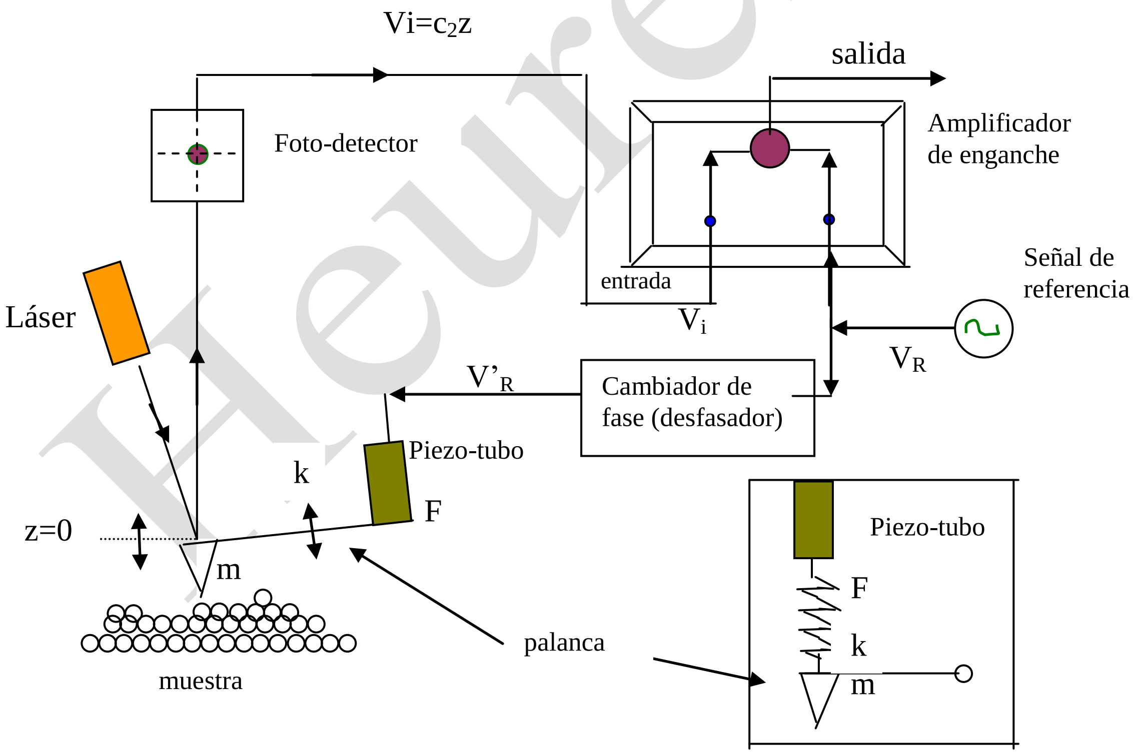

Fig. 3.1.- **Diagrama esquemático del microscopio de prueba atómico (APM). El cuadro de la derecha representa una versión simplificada del modelo mecánico que acopla el piezotubo con la palanca**

Parte A

a) Cuando $F = F_0$ sen $\left(\omega\ t\right)$, z(t) satisface la ecuación (3.1)y se puede escribir como z(t)=A sen (ωt-ϕ),en la que A>0 y $0 \le \phi \le \pi$. Encontrar la expresión de la amplitud A y tag ϕ en función de F_o , m, ω , ω_o y b. Obtener
A y la fase ϕ a la frecuencia de resonancia $\omega = \omega_o$

b) Un amplificador de enganche mostrado en la fig. 3.1 , multiplica la señal de entrada por la señal de referencia de enganche ,$V_R = V_{RO} sen\omega\ t$, y luego solamente permite pasar la componente continua de la señal multiplicada. Se supone que la señal de entrada esta dada por $V_i = V_{iO} sen\left(\omega_i t - \phi_i\right)$; V_{RO},V_{io}, ω_i , y ϕ_i son todas constantes positivas conocidas. Encontrar la condición ω>0 para una señal de salida no desvanecida. ¿Cuál es la expresión para la señal de corriente continua de salida no desvanecida a esa frecuencia?

c) Pasando la señal de enganche a través de un desfasador, el voltaje $V_R = V_{RO} sen\omega\ t$ cambia a $V'_R = V_{RO} sen\left(\omega\ t + \frac{\pi}{2}\right)$; V'_R, aplicada al tubo piezoeléctrico, actúa sobre la palanca con una fuerza $F = c_1 V'_R$, luego el fotodetector convierte el desplazamiento de la palanca ,z , en un voltaje $V_i = c_2 z$; c_1 y c_2 son constantes. Encontrar la expresión de la señal continua de salida a $\omega = \omega_0$

d) Un cambio pequeño, Δm, en la masa de la palanca cambia la frecuencia de resonancia por $\Delta\omega_o$. Como resultado la fase ϕ a la frecuencia original de resonancia ω_o, cambia en $\Delta\phi$. Encontrar el cambio de masa Δm correspondiente a un cambio de fase $\Delta\phi = \frac{\pi}{1800}$. Los parámetros físicos de la palanca son m=1,0.10^{-12} kg , k=1,0 N/m y (b/m)=1,0.10^{3}s^{-1}.
Utilice las aproximaciones

$$(1+x)^a \approx 1 + ax \quad y \quad tag\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \approx -\frac{1}{x}, \text{ cuando } |x| << 1$$

Parte B
Vamos a considerar ahora que algunas fuerzas, además de la fuerza conductora discutida en la parte A, actúe sobre la palanca debida a la muestra tal como indica la figura 3.1

e) Suponiendo que la fuerza adicional f(h) dependa solamente de la distancia h entre la palanca y la superficie de la muestra, se puede encontrar una nueva posición de equilibrio h_o. Próximo a $h=h_o$, podemos escribir $f(h) \approx f(h_o) + c_3(h - h_o)$, *donde c_3 es una constante en h. Encontrar la nueva frecuencia de resonancia ω_1 en función de ω_o, m y c_3.*

f) Mientras se escanea la superficie moviendo la muestra horizontalmente, la punta de la palanca cargada con Q = 6e se encuentra con un electrón de carga q=e , atrapado a alguna distancia por debajo de la superficie. Durante el escaneo la máxima desviación de la

frecuencia de resonancia $\Delta\omega_o$,=$(\omega_1 - \omega_o)$ se observa que es mucho más pequeña que ω_o Calcular la distancia d_o desde la palanca al electrón atrapado cuando es máxima la desviación, en función de m, q ,Q , ω_o $\Delta\omega_o$ y la constante K de la ley de Coulomb. Evaluar d_o en nm para $\Delta\omega_o$=20 s^{-1}.Los parámetros físicos de la palanca son m=1.10^{-12} kg y k=1 N/m. No considerar cualquier efecto de polarización tanto en a punta de la palanca como en la superficie.

$$k_e = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o} = 9{,}0.10^9\ \frac{N.m^2}{C^2}\ \text{y,}\quad e = -1{,}6.10^{-19}\ C$$