

PROBLEMAS DE

LAS OLIMPIADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

XXXV OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. COREA DEL SUR. 2004

I.-UN CONDENSADOR “PING-PONG”

Un condensador consiste en dos platos circulares paralelos entre sí, siendo R el radio de cada plato y d la distancia entre ellos, cumpliéndose que $d \ll R$ (fig 1.1 a). El plato superior está conectado a un voltaje constante V y el inferior a tierra. Después se coloca en el centro del plato inferior un pequeño disco de masa m y radio r ($r \ll R$) y espesor t ($t \ll r$) como indica la figura 1.1b.

Entre los platos se ha hecho el vacío siendo la constante dieléctrica ϵ_0 , tanto los platos como el disco son conductores perfectos. Los efectos electrostáticos en los bordes así como la inductancia del circuito, los efectos relativistas y los efectos de la carga imagen son despreciables.

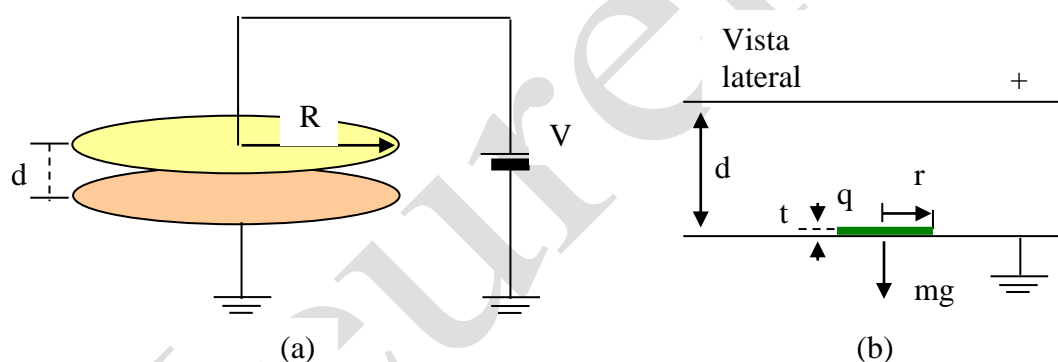


Fig. 1.1

Fig. 1.1 (a) es un dibujo esquemático del condensador conectado a la fuente de potencial V . (b) es una vista lateral del condensador con el pequeño disco de masa m colocado en el plato inferior.

a) Calcule la fuerza electrostática F_e entre los platos separados la distancia d , antes de insertar el disco de masa m .

b) Cuando el disco se coloca sobre el plato inferior, su carga q está relacionada con el voltaje V por la expresión $q = \Gamma V$. Encontrar Γ en función de r , d y ϵ_0 .

c) Los platos paralelos están colocados perpendicularmente a un campo gravitacional uniforme de intensidad g . Para elevar el disco de la

posición inicial de reposo se necesita aplicar un voltaje mayor que un voltaje umbral V_{th} . Obtener V_{th} en función de m , g , d y Γ .

d) Cuando $V > V_{th}$ el disco efectúa un movimiento arriba-abajo entre los platos (se supone que el disco se mueve verticalmente sin bamboleos). Las colisiones entre el disco y los platos son inelásticas siendo el coeficiente de restitución $\eta = \frac{v \text{ después}}{v \text{ antes}} = \frac{v_d}{v_a}$, siendo, respectivamente, v_a

y v_a las velocidades inmediatamente antes y después de la colisión. Los platos permanecen en posiciones fijas. La velocidad del disco después de la colisión con el plato inferior se aproxima a una velocidad constante v_s que depende de V mediante la ecuación

$$v_s = \sqrt{\alpha V^2 + \beta}$$

Obtener los coeficientes α y β en función de m , g , Γ , d , y η . Se supone que el disco choca con el plato de tal modo que se produce un cambio instantáneo de carga en cada colisión

e) Después de alcanzar la velocidad constante, la corriente promedio I a través del condensador se puede aproximar mediante la expresión $I = \gamma V^2$ cuando $qV \gg mgd$. Expresar el coeficiente γ en términos de m , Γ , d y η

f) Cuando el voltaje aplicado V decrece (de modo lento) existe un voltaje crítico V_c por debajo del cual la carga cesa de fluir. Encontrar el voltaje crítico V_c y la corriente I_c en función de m , g , d , Γ y η .

Comparando V_c con el voltaje umbral V_{th} hacer una gráfica aproximada de I - V cuando V aumenta y disminuye en el rango $V=0$ hasta $3 V_{th}$

a).-Calcule la fuerza electrostática F_e entre los platos separados la distancia d , antes de insertar el disco de masa m

La energía almacenada en un condensador es $U = \frac{1}{2} CV^2$ y la capacidad de un condensador plano

$$C = \epsilon_0 \frac{\pi R^2}{d}, \text{ luego: } U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\pi R^2}{d} V^2$$

Si queremos aumentar la distancia entre las placas una distancia δd se necesita realizar un trabajo $dW = F \delta d$ y se producirá una variación de energía

$$U_f = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\pi R^2}{d + \delta d} V^2 \Rightarrow \Delta U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \pi R^2 V^2 \left(\frac{1}{d + \delta d} - \frac{1}{d} \right) \Rightarrow -\frac{1}{2} \epsilon_0 \pi R^2 V^2 \frac{\delta d}{d^2} = F \delta d$$

$$F = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \pi R^2 \frac{V^2}{d}$$

b).- Cuando el disco se coloca sobre el plato inferior, su carga q está relacionada con el voltaje V por la expresión $q = \Gamma V$. Encontrar Γ en función de r , d y ϵ_0

La densidad superficial de carga es la misma en los platos que en el disco

$$\frac{Q}{\pi R^2} = \frac{q}{\pi r^2} \Rightarrow q = Q \frac{r^2}{R^2} = CV \frac{r^2}{R^2} = \epsilon_0 \frac{\pi R^2}{d} \frac{r^2}{R^2} V = \epsilon_0 \frac{\pi r^2}{d} V = \Gamma V$$

$$\Gamma = \epsilon_0 \frac{\pi r^2}{d}$$

c).- Para elevar el disco de la posición inicial de reposo se necesita aplicar un voltaje mayor que un voltaje umbral V_{th} . Obtener V_{th} en función de m , g , d y Γ .

La fuerza sobre el disco debe ser mayor que el peso para elevarlo e igual para obtener el equilibrio

$$\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \pi r^2 V_{th}^2}{d^2} = mg \Rightarrow V_{th}^2 = \frac{2mgd^2}{\epsilon_0 \pi r^2} = \frac{2mgd}{\Gamma} \Rightarrow V_{th} = \sqrt{\frac{2mgd}{\Gamma}}$$

d).- Obtener los coeficientes α y β en función de m , g , Γ , d , y η

Una vez que se ha establecido el equilibrio designamos con E_{Ci} la energía cinética que posee el disco nada más abandonar el plato inferior, en ese momento, el disco posee una carga q negativa. El campo eléctrico ejerce un trabajo sobre el disco que vale qV , trabajo que se emplea en aumentar la energía cinética al llegar al plato superior y dotarle de energía potencial. Sea E_{CI2} , la energía cinética del disco justamente antes de chocar con el plato superior,

$$E_{Ci} + qV = E_{CI2} + mgd$$

El disco después de rebotar en el plato superior posee una carga q positiva, su velocidad ha disminuido debido al choque inelástico y ahora designamos a su energía cinética por E_{CR2} . Podemos escribir

$$E_{CI2} = \frac{1}{2} m v_a^2; E_{CR2} = \frac{1}{2} m v_d^2 \Rightarrow \frac{E_{CR2}}{E_{CI2}} = \frac{v_d^2}{v_a^2} = \eta^2 \Rightarrow E_{CR2} = \eta^2 E_{CI2}$$

$$E_{CR2} = \eta^2 (E_{Ci} + qV - mgd)$$

Cuando el disco llegue a la placa 1 el campo ha hecho un trabajo qV y el disco ha perdido su energía potencial, por tanto, si designamos por E_{CI1} , la energía cinética de llegada al plato 1

$$E_{CI1} = E_{CR2} + qV + mgd = \eta^2 (E_{Ci} + qV - mgd) + qV + mgd$$

Al rebotar en el plato 1 su energía cinética es igual a E_{Ci} , ya que el régimen alcanzado es Estacionario

$$\begin{aligned}
E_{Ci} &= \eta^2 E_{CIII} = \eta^4 (E_{Ci} + qV - mgd) + \eta^2 (qV + mgd) \Rightarrow \\
\Rightarrow E_{Ci} (1 - \eta^4) &= qV\eta^2 (1 + \eta^2) + mgd (\eta^2 - \eta^4) \Rightarrow \\
\Rightarrow E_{Ci} &= \frac{qV\eta^2 (1 + \eta^2)}{(1 + \eta^2)(1 - \eta^2)} + mgd \eta^2 \frac{(1 - \eta^2)}{(1 + \eta^2)(1 - \eta^2)} = \frac{qV\eta^2}{(1 - \eta^2)} + \frac{mgd\eta^2}{(1 + \eta^2)}
\end{aligned}$$

Si en la expresión anterior introducimos la velocidad

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} m v_s^2 &= \frac{qV\eta^2}{(1 - \eta^2)} + \frac{mgd\eta^2}{(1 + \eta^2)} \Rightarrow v_s = \sqrt{\frac{2qV\eta^2}{m(1 - \eta^2)} + \frac{2gd\eta^2}{(1 + \eta^2)}} = \sqrt{\frac{2\Gamma V * V\eta^2}{m(1 - \eta^2)} + \frac{2gd\eta^2}{(1 + \eta^2)}} \\
v_s &= \sqrt{\frac{2\Gamma\eta^2}{m(1 - \eta^2)} V^2 + \frac{2gd\eta^2}{(1 + \eta^2)}} \\
\alpha &= \frac{2\Gamma\eta^2}{m(1 - \eta^2)} \quad ; \quad \beta = \frac{2gd\eta^2}{(1 + \eta^2)}
\end{aligned}$$

e).- Después de alcanzar la velocidad constante, la corriente promedio I a través del condensador se puede aproximar mediante la expresión $I = \gamma V^2$ cuando $qV \gg mgd$. Expresar el coeficiente g en términos de m , Γ , d y η

La condición impuesta es que el trabajo del campo qV es mucho mayor que el valor de la energía potencial, por tanto, se puede prescindir de este término y observar que la aceleración del disco se debe únicamente al campo eléctrico

$$F_e = qE = ma \Rightarrow a = \frac{qE}{m} = \frac{qV}{md}$$

Si se llega a un estado estacionario el disco sale con una velocidad v_s del plato inferior y llega con una velocidad mayor v_M al plato superior, después rebota con una velocidad v_s y llega al plato inferior con una velocidad v_M para que después de rebotar en el plato inferior salga con la velocidad v_s . El tiempo de ir del plato inferior al superior es el mismo que del superior al inferior ya que se prescinde del peso del disco y su energía gravitatoria.

La relación entre estas velocidades $v_M = v_s + at$, la podemos expresar a través del coeficiente η .

$$v_M = v_s + at \quad ; \quad v_s = \eta v_M \Rightarrow \frac{v_s}{\eta} = v_s + at \Rightarrow v_s (1 - \eta) = \eta at$$

Como hemos encontrado antes, la energía cinética del disco es;

$$\frac{1}{2} m v_s^2 = \frac{qV\eta^2}{(1 - \eta^2)} + \frac{mgd\eta^2}{(1 + \eta^2)} \Rightarrow qV \gg mgd \Rightarrow v_s = \eta \sqrt{\frac{2qV}{m(1 - \eta^2)}}$$

Sustituyendo en la expresión de la velocidad v_s y teniendo en cuenta que $a = \frac{qV}{md}$

$$\eta \sqrt{\frac{2qV}{m(1-\eta^2)}}(1-\eta) = \eta \frac{qV}{md} t \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2qVm^2d^2}{m(1-\eta^2)q^2V^2}}(1-\eta) = \frac{1-\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \sqrt{\frac{2md^2}{qV}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{(1-\eta)\sqrt{1-\eta^2}}{(1-\eta^2)} \sqrt{\frac{2md^2}{qV}} = \sqrt{\frac{1-\eta^2}{(1+\eta)^2}} \sqrt{\frac{2md^2}{\Gamma V^2}} = \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}} \sqrt{\frac{2md^2}{\Gamma V^2}}$$

La intensidad de la corriente $I = \frac{q}{t} = \frac{\Gamma V}{t}$

$$I = \Gamma V \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \frac{\sqrt{\Gamma V^2}}{\sqrt{2md^2}} = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \sqrt{\frac{\Gamma^3}{2md^2}} * V^2$$

Y de la expresión $I = \gamma V^2$

$$\gamma = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \sqrt{\frac{\Gamma^3}{2md^2}}$$

f).- Encontrar el voltaje crítico V_c y la corriente I_c en función de m , g , d , Γ y η .

Para que la carga cese de fluir es preciso que el disco que abandona el plato 1 con la velocidad v_s no llegue al plato 2 y el límite se produce cuando la velocidad de llegada al plato 2 es nula. En estas condiciones el trabajo del campo se emplea únicamente en aumentar la energía potencial del disco

$$\frac{1}{2} m v_s^e + qV_c = mgd \Rightarrow v_s^2 + \frac{2qV_c}{m} = 2gd$$

En el apartado 2 hemos visto que $v_s = \sqrt{\frac{2\Gamma\eta^2}{m(1-\eta^2)} V^2 + \frac{2gd\eta^2}{(1+\eta^2)}}$

$$\frac{2\Gamma\eta^2}{m(1-\eta^2)} V_c^2 + \frac{2gd\eta^2}{(1+\eta^2)} + \frac{2\Gamma V_c^2}{m} = 2gd \Rightarrow \Gamma V_c^2 \left(\frac{\eta^2}{1-\eta^2} + 1 \right) = mgd \left(1 - \frac{\eta^2}{1+\eta^2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma V_c^2 \frac{1}{1-\eta^2} = mgd \frac{1}{1+\eta^2} \Rightarrow V_c = \sqrt{\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}} \sqrt{\frac{mgd}{\Gamma}}$$

En el apartado c) se ha calculado $V_{th} = \sqrt{\frac{2mgd}{\Gamma}}$

$$\frac{V_{th}}{V_c} = \frac{\sqrt{\frac{2mgd}{\Gamma}}}{\sqrt{\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}} \sqrt{\frac{mgd}{\Gamma}}} \Rightarrow \frac{V_{th}}{V_c} = \sqrt{\frac{2(1+\eta^2)}{1-\eta^2}} \Rightarrow \text{Si } \varsigma = \sqrt{\frac{1-\eta^2}{2(1+\eta^2)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_c}{V_{th}} = \varsigma$$

Supongamos que el disco abandona el plato 1 con la velocidad v_s y carga $-q$ y alcanza justamente el plato 2 con velocidad nula. Una vez que toque el plato 2 intercambia su carga y se hace positiva por lo que se dirige hacia el plato 1 partiendo con velocidad nula y aceleración hacia arriba a_{\uparrow} .

$$qE - mg = ma_{\uparrow} \Rightarrow q \frac{V_c}{d} - mg = ma_{\uparrow} \Rightarrow a_{\uparrow} = \frac{\Gamma V_c^2}{md} - g = \frac{\Gamma}{md} \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2} \frac{mgd}{\Gamma} - g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{\uparrow} = \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2} g - g = g \left(\frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2} - 1 \right) \Rightarrow a_{\uparrow} = \frac{-2\eta^2 g}{1 + \eta^2}$$

La aceleración hacia abajo, esto es, desde el plato superior al inferior, calculada de forma semejante es:

$$qE + mg = ma_{\downarrow} \Rightarrow a_{\downarrow} = g \left(\frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2} + 1 \right) \Rightarrow a_{\downarrow} = \frac{2g}{1 + \eta^2}$$

Vamos a calcular ahora los tiempos que emplea el disco en subir y bajar y por tanto en transmitir la carga $2q$

$$d = v_s t_{\uparrow} + \frac{1}{2} a_{\uparrow} t_{\uparrow}^2, \quad 0 = v_s + a_{\uparrow} t_{\uparrow} \Rightarrow t_{\uparrow} = -\frac{v_s}{a_{\uparrow}} = \frac{v_s (1 + \eta^2)}{2\eta^2 g}$$

$$d = \frac{1}{2} a_{\downarrow} t_{\downarrow}^2; \quad v_{\downarrow} = a_{\downarrow} t_{\downarrow} = \frac{v_s}{\eta} = a_{\downarrow} t_{\downarrow} \Rightarrow t_{\downarrow} = \frac{v_s}{\eta a_{\downarrow}} = \frac{v_s (1 + \eta^2)}{\eta 2g}$$

El tiempo total de subida y bajada es.

$$t_T = t_{\uparrow} + t_{\downarrow} = \frac{v_s (1 + \eta^2)}{2\eta g} \left(\frac{1}{\eta} + 1 \right)$$

Anteriormente hemos visto que

$$v_s = \sqrt{\frac{2\Gamma\eta^2}{m(1-\eta^2)} V_c^2 + \frac{2gd\eta^2}{(1+\eta^2)}} \quad \text{y} \quad V_c = \sqrt{\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}} \sqrt{\frac{mgd}{\Gamma}} \quad \text{de ambas resulta:}$$

$$v_s = \sqrt{\frac{2\Gamma\eta^2}{m(1-\eta^2)} * \frac{1-\eta^2}{1+\eta^2} * \frac{mgd}{\Gamma} + \frac{2gd\eta^2}{1+\eta^2}} = \sqrt{\frac{2\eta^2 gd}{1+\eta^2} + \frac{2gd\eta^2}{1+\eta^2}} = \sqrt{\frac{4\eta^2 gd}{1+\eta^2}}$$

Sustituyendo en la ecuación del tiempo t_T

$$t_T = \frac{v_s (1 + \eta^2)}{2\eta g} \left(\frac{1}{\eta} + 1 \right) = \sqrt{\frac{4\eta^2 gd}{1+\eta^2}} * \frac{1+\eta^2}{2\eta g} \left(\frac{1}{\eta} + 1 \right) = \sqrt{\frac{d(1+\eta^2)}{g}} \left(\frac{1}{\eta} + 1 \right)$$

y con este valor calculamos la intensidad crítica $I_C = \frac{2q}{t_T}$

$$I_c = \frac{2q}{t_T} = \frac{2\Gamma V_c}{\sqrt{\frac{d(1+\eta^2)}{g}} \left(\frac{1}{\eta} + 1\right)} = \frac{2\Gamma \sqrt{\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}} \sqrt{\frac{mgd}{\Gamma}}}{\sqrt{\frac{d(1+\eta^2)}{g}} \left(\frac{1}{\eta} + 1\right)} = \sqrt{\frac{4\Gamma^2(1-\eta^2)g^* mgd}{d(1+\eta^2)^2 \Gamma}} * \frac{\eta}{1+\eta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{4\Gamma mg^2(1-\eta)(1+\eta)}{(1+\eta^2)^2}} * \frac{\eta}{1+\eta} \Rightarrow I_c = \frac{2g\eta}{(1+\eta^2)} \sqrt{\frac{m\Gamma(1-\eta)}{1+\eta}} = \frac{2\eta\sqrt{1-\eta^2}}{(1+\eta^2)(1+\eta)} g\sqrt{m\Gamma}$$

Comparando V_c con el voltaje umbral V_{th} hacer una gráfica aproximada de I - V cuando V aumenta y disminuye en el rango $V=0$ hasta $3 V_{th}$

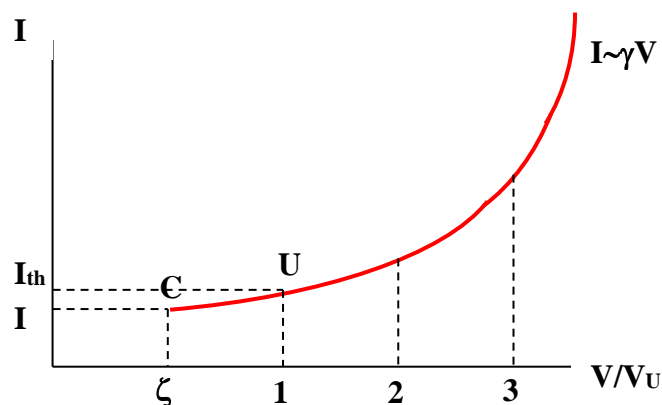
$I = q / t$, (intensidad promedio de la corriente cuando el disco alcanza su función constante. I a través del condensador se puede aproximar mediante la expresión $I = \gamma V^2$ cuando $qV \gg mgd$. Siendo $\gamma = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \sqrt{\frac{\Gamma^3}{2md^2}}$)

$$V_{th} = \sqrt{\frac{2mgd}{\Gamma}}, \text{ (} V_{th} \text{ es el voltaje umbral necesario para elevar el disco)}$$

$$V_c = \sqrt{\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}} \sqrt{\frac{mgd}{\Gamma}} \text{ (voltaje crítico, mínimo necesario para que el disco llegue al plato superior con velocidad nula)}$$

$$V_{th} = \sqrt{\frac{2(1+\eta^2)}{1-\eta^2}} V_c \text{ (relación entre ambos, } \frac{V_c}{V_{th}} = \zeta, \text{ con } \zeta = \sqrt{\frac{1-\eta^2}{2(1+\eta^2)}})$$

$$I_c = \frac{2\eta\sqrt{1-\eta^2}}{(1+\eta^2)(1+\eta)} g\sqrt{m\Gamma} \text{ (intensidad crítica, cuando el condensador alcanza su voltaje crítico. } I_c = 2q / t_T)$$



El punto C de la gráfica indica que su abscisa contiene el voltaje crítico V_C/V_{th} y su ordenada es la intensidad crítica I_C .

En el punto U la abscisa vale la unidad, lo que indica que $V = V_{th}$ es el voltaje umbral, y su ordenada es la intensidad umbral I_{th} .

Los valores de abscisas 1, 2 y 3, son los coeficientes de $V = V_{th}$, $V = 2V_{th}$ y $V = 3V_{th}$ múltiplos del voltaje umbral.

Heureka

II.-GLOBO ASCENDENTE

Un globo de goma, lleno de helio, puede ascender en la atmósfera. La presión y temperatura de la atmósfera disminuyen con la altura. En el problema se considera que la forma del globo es esférica a pesar de los aparejos que pueda llevar y que el volumen de éstos es despreciable.

También se admite que la temperatura del gas helio dentro del globo es siempre igual a la de la atmósfera que lo rodea y que los gases tienen comportamiento ideal. La constante universal de los gases es $R = 8,31\text{J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$, las masas molares del helio y del aire son $M_{\text{He}} = 4,00\cdot 10^{-3}\text{ kg/mol}$ y $M_{\text{A}} = 28,9\cdot 10^{-3}\text{ kg/mol}$, respectivamente. La aceleración de la gravedad es $9,8\text{ m/s}^2$.

Parte A

a) Sea P la presión del aire y T su temperatura. La presión dentro del globo es mayor que la de fuera debido a la tensión superficial de la goma del globo. Éste contiene n moles de gas helio siendo la presión en el interior $P+\Delta P$. Encontrar la fuerza ascensional F_B que actúa sobre el globo en función de P y ΔP .

b) En Corea y en un día de verano la temperatura T_z a una altura z respecto del nivel del mar es

$$T_z = T_o \left(1 - \frac{z}{z_o} \right)$$

Expresión válida en el rango $0 < z < 15\text{ km}$, siendo $z_o = 49\text{ km}$ y $T_o = 303\text{ K}$. La presión y la densidad del aire al nivel del mar son, $P_o = 1,0\text{ atm} = 1,01\cdot 10^5\text{ Pa}$ y $\rho_o = 1,16\text{ kg/m}^3$, respectivamente.

Para el intervalo de altura especificado, la presión de la atmósfera se expresa mediante la ecuación

$$P_z = P_o \left(1 - \frac{z}{z_o} \right)^\eta \quad (2.1)$$

Expresar η en función de z_o , ρ_o , P_o y g y encontrar su valor numérico dando el resultado con dos cifras significativas. Se considera que g no varía con la altura.

Parte B

Si la goma de un globo esférico no tiene tensión y éste tiene un radio r_o , y se infla hasta que adquiere un radio $r > r_o$, la superficie del globo posee una energía elástica debido a su tensión. De acuerdo con una teoría sencilla la energía elástica para una temperatura constante T , está dada por la ecuación

$$U = 4\pi r_o^2 \kappa RT \left(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3 \right) \quad (2.2)$$

Siendo $\lambda = \frac{r}{r_o}$ denominada razón de inflado, κ es una constante expresada en mol/m³.

c) Calcular ΔP en función de los parámetros dados en la ecuación (2.2) y dibujar la gráfica ΔP frente a λ .

d) La constante κ se puede determinar a partir de la cantidad de gas que se necesita para inflar el globo. A $T_o = 303$ K y $P_o = 1 \text{ atm} = 1,01 \cdot 10^5$ Pa, un balón sin tensión ($\lambda = 1$) contiene $n_o = 12,5$ moles de helio. Cuando se infla el balón hasta que contiene $3,6n_o = 45$ moles, el valor de λ es 1,5, siendo la presión y temperatura P_o y T_o , respectivamente.

Calcular el parámetro del globo a , definido como $a = \frac{\kappa}{\kappa_o}$ en función de n ,

n_o y λ , siendo $\kappa_o = \frac{r_o P_o}{4RT_o}$. Calcular a con dos cifras significativas.

Parte C

Un globo preparado como en d) al nivel del mar (inflado con $\lambda = 1,5$, $n = 3,6n_o = 45$ moles de gas helio, a $T_o = 303$ K y $P_o = 1,01 \cdot 10^5$ Pa) tiene una masa total $M_T = 1,12$ kg incluido el gas, el propio globo y sus aparejos.

e) Si este globo se eleva en la atmósfera, se detiene a una altura z_f para la cual la fuerza ascensional es igual al peso. Encontrar z_f y la razón de inflado λ_f a esa altura. Dar las respuestas con dos cifras significativas, no considerar la velocidad de ascensión y que no existe pérdida de gas durante el ascenso.

a).-Encontrar la fuerza ascensional F_B que actúa sobre el globo en función de P y ΔP .

Sobre el globo actúa el empuje como una fuerza vertical y hacia arriba y el peso hacia abajo del globo que incluye los aparejos y el propio peso del gas que contiene. Si consideramos que la fuerza ascensional es el empuje, entonces

$$E = F_B = V_{\text{globo}} * \text{densidad del aire} * g$$

El volumen del globo es el volumen que ocupa el gas a la presión $P + \Delta P$ y a la temperatura T

$$(P + \Delta P)V_{\text{globo}} = nRT$$

La densidad del aire a la presión P y temperatura T

$$P = \frac{\rho}{\rho_0} P_0 = \frac{\rho}{\rho_0} \rho_0 \frac{RT}{M_A} = \frac{\rho}{M_A} RT$$

$$F_B = \frac{nRT}{P + \Delta P} * \frac{PM_A}{RT} * g = \frac{nPM_A}{P + \Delta P} * g$$

b).- Expresar η en función de z_0 , ρ_0 , P_0 y g y encontrar su valor numérico dando el resultado con dos cifras significativas.

Al nivel del mar la presión es P_0 y la temperatura T_0 , a una altura z la presión es P_z y la temperatura T_z . La diferencia de presiones se debe al peso de la columna de aire que existe entre el nivel del mar y la altura z . En un lugar intermedio de altura x ($0 < x < z$) la presión es P_x y la temperatura T_x . La disminución de la presión al elevarnos una altura dx es:

$$-dp_x = \rho_x g dx = \frac{P_x M_A}{RT_x} g dx \Rightarrow -\frac{dp_x}{P_x} = \frac{M_A g}{R} \frac{dx}{T_0 \left(1 - \frac{x}{z_0}\right)}$$

$$\int_{P_0}^{P_z} \frac{-dp_x}{P_x} = \frac{M_A g z_0}{RT_0} \int_0^z \frac{dx}{z_0 - x} \Rightarrow -\ln \frac{P_z}{P_0} = -\frac{M_A g z_0}{RT_0} [\ln(z_0 - x)]_0^z = -\frac{M_A g z_0}{RT_0} \ln \frac{z_0 - z}{z_0}$$

Tomando logaritmos en la ecuación de la presión dada en el enunciado

$\ln \frac{P_z}{P_0} = \eta \ln \frac{z_0 - z}{z_0}$ y comparando con la ecuación anterior resulta:

$$\eta = \frac{M_A g z_0}{RT_0} = \frac{M_A g z_0}{R \frac{P_0 M_A}{\rho_0 R}} = \frac{\rho_0 g z_0}{P_0} = \frac{1,16 * 9,8 * 49 * 10^3}{1,01 * 10^5} = 5,5$$

c).- Calcular ΔP en función de los parámetros dados en la ecuación (2.2) y dibujar la gráfica ΔP frente a λ .

Supongamos que la presión del interior del globo es P_i y la exterior P_e . Consideremos un trozo pequeño de superficie del globo ΔS , la fuerza resultante en ese trozo es: $F_i - F_e$ y el trabajo necesario para desplazarlo en dirección radial una distancia dr es:

$$dW_{\Delta S} = (F_i - F_e) * dr = (P_i - P_e) \Delta S * dr = \Delta P * \Delta S * dr$$

Como el desplazamiento es radial, el trabajo necesario para desplazar toda la envoltura del globo una distancia dr es:

$$dW = \Delta P * 4\pi r^2 * dr$$

Este trabajo se emplea en variar la energía elástica de la goma (ver fórmula en el enunciado)

$$U = 4\pi r_0^2 \kappa RT \left(2 \frac{r^2}{r_0^2} + \frac{r_0^4}{r^4} - 3 \right) \Rightarrow dU = 4\pi r_0^2 \kappa RT \left(\frac{4r}{r_0^2} - \frac{r_0^4 * 4r^3}{r^8} \right) dr$$

Igualando las expresiones de dW y de dU :

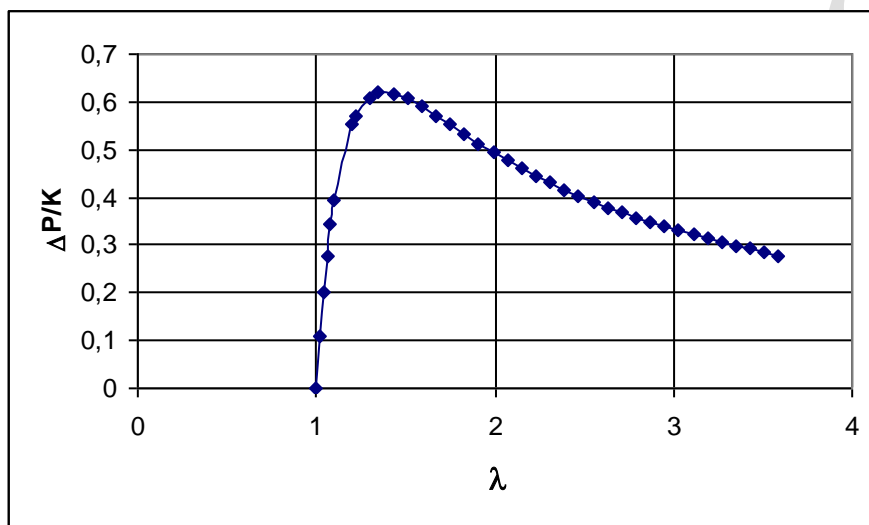
$$4\pi\kappa RT \left(4r - \frac{4r_o^6}{r^5} \right) = \Delta P * 4\pi r^2 \Rightarrow \Delta P = 4\kappa RT \left(\frac{r^6 - r_o^6}{r^7} \right) = 4\kappa RT \left(\frac{1}{r} - \frac{r_o^6}{r^7} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\kappa RT \left(\frac{1}{\lambda r_o} - \frac{r_o^6}{\lambda^7 r_o^7} \right) \Rightarrow \Delta P = \frac{4\kappa RT}{r_o} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right)$$

La expresión anterior se puede escribir como $\frac{\Delta P}{K} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7}$, esta ecuación representa una curva que tiene un máximo

$$\frac{d\left(\frac{\Delta P}{K}\right)}{d\lambda} = -\frac{1}{\lambda^2} - \frac{-7\lambda^6}{\lambda^{14}} = -\frac{1}{\lambda^2} + \frac{7}{\lambda^8} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{7}{\lambda^6} \Rightarrow \lambda = 7^{\frac{1}{6}} = 1,38$$

Dando valores a λ , a partir de la unidad se construye la correspondiente gráfica



d).- Calcular el parámetro del globo a.

Cuando el globo tiene 12,5 moles, $\lambda = 1$ y la ecuación del gas es $P_o * \frac{4}{3}\pi r_o^3 = n_o RT_o$.

Cuando tiene 45 moles $P * \frac{4}{3}\pi r^3 = nRT_o$. De ambas ecuaciones

$$P - P_o = \Delta P = \frac{3nRT_o}{4\pi\lambda^3 r_o^3} - \frac{3n_o RT_o}{4\pi r_o^3} = \frac{3RT_o}{4\pi r_o^3} \left(\frac{n}{\lambda^3} - n_o \right) = \frac{4\kappa RT_o}{r_o} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right) \Rightarrow$$

$$\kappa = \frac{3}{16\pi r_o^2} \left(\frac{n}{\lambda^3} - n_o \right) \Rightarrow a = \frac{\kappa}{\kappa_o} = \frac{3}{16\pi r_o^2} \left(\frac{n}{\lambda^3} - n_o \right) * \frac{4RT_o}{P_o r_o} = \frac{3 \left(\frac{n}{\lambda^3} - n_o \right)}{16\pi r_o^3 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right)} * \frac{4RT_o}{\frac{3n_o RT_o}{4\pi r_o^3}}$$

$$a = \frac{\left(\frac{n}{\lambda^3} - n_o \right)}{\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right) n_o} = \frac{\frac{45}{1,5^3} - 12,5}{\left(\frac{1}{1,5} - \frac{1}{1,5^7} \right) * 12,5} = 0,11$$

e).- Encontrar z_f y la razón de inflado λ_f a esa altura.

Designamos con P_A a la presión del helio cuando el globo alcanza la altura z_f . A esa altura la presión y temperatura del aire son P_z y T_z respectivamente, el radio del globo es r y el número de moles de helio n . Inicialmente el globo se encuentra a T_o y P_o de

temperatura y presión siendo su número de moles n_o . Aplicamos la ecuación de los gases perfectos a las dos situaciones

$$P_A * \frac{4}{3} \pi r^3 = nRT_z ; P_o * \frac{4}{3} \pi r_o^3 = n_o RT_o \Rightarrow \frac{P_A r^3}{P_o r_o^3} = \frac{nT_z}{n_o T_o} \Rightarrow \frac{P_A}{P_o} \lambda_f^3 = \frac{nT_o \left(1 - \frac{z_f}{z_o}\right)}{n_o T_o} \quad (1)$$

$\lambda_f = \left(\frac{r}{r_o}\right)^3$ es la razón de inflado cuando el globo ha llegado a la altura z_f

A la altura z_f se produce un equilibrio entre el empuje y el peso

$$V_{\text{globo}} * \text{densidad} * g = M_T * g$$

$$V_{\text{globo}} = (4/3) \pi r^3 ;$$

Densidad a P_o y T_o $\rho_o = \frac{P_o M_A}{RT_o}$; densidad a P_z y T_z $\rho_A = \frac{P_z M_A}{RT_z}$, de ambas ecuaciones

$$\frac{\rho_A}{\rho_o} = \frac{P_z M_A RT_o}{P_o M_A RT_z} \Rightarrow \rho_A = \rho_o \frac{P_z T_o}{P_o T_z}$$

$$\frac{4}{3} \pi r^3 * \rho_o \frac{P_z T_o}{P_o T_z} = M_T \Rightarrow P_z = \frac{P_o T_z M_T}{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_o T_o} \quad (2)$$

En el apartado c) hemos deducido que

$$P_A - P_z = \frac{4\kappa RT_z}{r_o} \left(\frac{1}{\lambda_f} - \frac{1}{\lambda_f^7} \right) \quad (3)$$

De la ecuación (1) $\frac{P_A}{P_o} \lambda_f^3 = \frac{nT_z}{n_o T_o} \Rightarrow P_A = \frac{nP_o T_z}{n_o T_o \lambda_f^3}$ y de la ecuación (2)

$$P_z = \frac{P_o T_z M_T}{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_o T_o}$$

Llevados los valores de P_A y P_z a la ecuación (3) y teniendo en cuenta además que

$$a = \frac{\kappa}{\kappa_0} \Rightarrow \kappa = a\kappa_0 = \frac{a r_0 T_0}{4RT_0}, \text{ resulta:}$$

$$\begin{aligned} \frac{n P_0 M_T}{n_0 T_0 \lambda_f^3} - \frac{P_0 T_z M_T}{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 T_0} &= \frac{4 a r_0 P_0 R T_z}{4 R T_0 r_0} \left(\frac{1}{\lambda_f} - \frac{1}{\lambda_f^7} \right) \Rightarrow \frac{n}{n_0 \lambda_f^3} - \frac{M_T}{\frac{4}{3} \pi \lambda_f^3 r_0^3 \rho_0} \left(\frac{1}{\lambda_f} - \frac{1}{\lambda_f^7} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{n}{n_0} - \frac{M_T P_0}{n_0 R T_0 \rho_0} = a \left(\lambda_f^2 - \frac{1}{\lambda_f^4} \right) \end{aligned}$$

Dando valores numéricos a la última ecuación

$$\begin{aligned} 3,6 - \frac{1,12 * 1,01 * 10^5}{12,5 * 8,31 * 303 * 1,16} &= 0,11 \left(\lambda_f^2 - \frac{1}{\lambda_f^4} \right) \Rightarrow 3,6 - 3,098 = 0,11 \left(\lambda_f^2 - \frac{1}{\lambda_f^4} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4,56 = \lambda_f^2 - \frac{1}{\lambda_f^4} \Rightarrow 4,56 \approx \lambda_f^2 \Rightarrow \lambda_f = 2,1 \end{aligned}$$

Volviendo de nuevo a la ecuación (2)

$$\begin{aligned} P_z &= \frac{P_0 T_z M_T}{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 T_0} = \frac{P_0 T_0 \left(1 - \frac{z_f}{z_0} \right) M_T}{\frac{4}{3} \pi \lambda_f^3 r_0^3 \rho_0 T_0} \Rightarrow P_0 \left(1 - \frac{z_f}{z_0} \right)^\eta = \frac{P_0 T_0 \left(1 - \frac{z_f}{z_0} \right) M_T}{\frac{n_0 R T_0}{P_0} \lambda_f^3 \rho_0 T_0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(1 - \frac{z_f}{z_0} \right)^{\eta-1} = \frac{M_T}{n_0 R T_0 \lambda_f^3 \rho_0} \Rightarrow (\eta-1) \ln \left(1 - \frac{z_f}{z_0} \right) = \ln \frac{M_T}{n_0 R T_0 \lambda_f^3 \rho_0} \end{aligned}$$

Dando valores numéricos

$$\begin{aligned} (5,5 - 1) * \ln \left(1 - \frac{z_f}{49} \right) &= \ln \frac{1,12 * 1,01 * 10^5}{12,5 * 8,31 * 303 * 2,1^3 * 1,16} = \ln 0,3346 \\ \Rightarrow \ln \left(1 - \frac{z_f}{49} \right) &= \frac{-1,095}{4,5} = -0,243 \Rightarrow \left(1 - \frac{z_f}{49} \right) = 0,784 \Rightarrow -\frac{z_f}{49} = -0,216 \Rightarrow \\ &z_f = 10,6 \text{ km} \approx 11 \text{ km} \end{aligned}$$

III.-MICROSCOPIO DE PRUEBA ATÓMICA

El microscopio de prueba atómico (APM) es una poderosa herramienta en el campo de la nanociencia. El movimiento de una palanca en el APM se registra mediante un fotodetector que monitoriza el haz reflejado por un láser (fig 3.1). La palanca solamente se puede desplazar en vertical y su desplazamiento z en función del tiempo t se describe mediante la ecuación

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + kz = F$$

siendo m es la masa de la palanca, $k = m\omega_0^2$ es la constante del muelle de la palanca, b es un pequeño coeficiente de amortiguamiento que cumple $\omega_0 \gg \frac{b}{m} > 0$, y finalmente F es una fuerza externa aplicada en el tubo piezoeléctrico

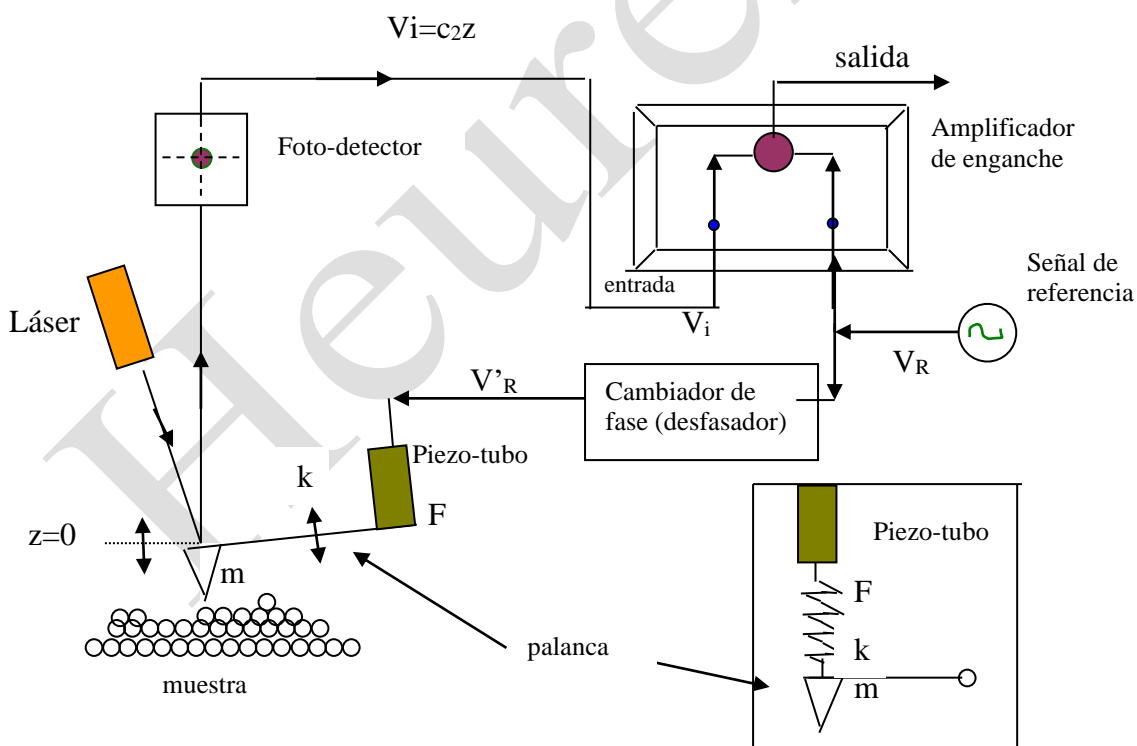


Fig. 3.1.- Diagrama esquemático del microscopio de prueba atómico (APM). El cuadro de la derecha representa una versión simplificada del modelo mecánico que acopla el piezotubo con la palanca

Parte A

a) Cuando $F = F_0 \text{ sen } (\omega t)$, $z(t)$ satisface la ecuación (3.1) y se puede escribir como $z(t) = A \text{ sen } (\omega t - \phi)$, en la que $A > 0$ y $0 \leq \phi \leq \pi$. Encontrar la expresión de la amplitud A y $\text{tag } \phi$ en función de F_0 , m , ω , ω_0 y b . Obtener

A y la fase ϕ a la frecuencia de resonancia $\omega = \omega_0$

b) Un amplificador de enganche mostrado en la fig. 3.1, multiplica la señal de entrada por la señal de referencia de enganche, $V_R = V_{RO} \text{ sen } \omega t$, y luego solamente permite pasar la componente continua de la señal multiplicada. Se supone que la señal de entrada está dada por $V_i = V_{i0} \text{ sen } (\omega_i t - \phi_i)$; V_{RO} , V_{i0} , ω_i , y ϕ_i son todas constantes positivas conocidas. Encontrar la condición $\omega > 0$ para una señal de salida no desvanecida. ¿Cuál es la expresión para la señal de corriente continua de salida no desvanecida a esa frecuencia?

c) Pasando la señal de enganche a través de un desfasador, el voltaje $V_R = V_{RO} \text{ sen } \omega t$ cambia a $V_R' = V_{RO} \text{ sen } (\omega t + \frac{\pi}{2})$; V_R' , aplicada al tubo piezoeléctrico, actúa sobre la palanca con una fuerza $F = c_1 V_R'$, luego el fotodetector convierte el desplazamiento de la palanca, z , en un voltaje $V_i = c_2 z$; c_1 y c_2 son constantes. Encontrar la expresión de la señal continua de salida a $\omega = \omega_0$

d) Un cambio pequeño, Δm , en la masa de la palanca cambia la frecuencia de resonancia por $\Delta \omega_0$. Como resultado la fase ϕ a la frecuencia original de resonancia ω_0 , cambia en $\Delta \phi$. Encontrar el cambio de masa Δm correspondiente a un cambio de fase $\Delta \phi = \frac{\pi}{1800}$. Los parámetros físicos de la palanca son $m = 1,0 \cdot 10^{-12}$ kg, $k = 1,0$ N/m y $(b/m) = 1,0 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$.

Utilice las aproximaciones

$$(1+x)^a \approx 1+ax \quad \text{y} \quad \text{tag} \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \approx -\frac{1}{x}, \quad \text{cuando } |x| \ll 1$$

Parte B

Vamos a considerar ahora que algunas fuerzas, además de la fuerza conductora discutida en la parte A, actúe sobre la palanca debida a la muestra tal como indica la figura 3.1

e) Suponiendo que la fuerza adicional $f(h)$ dependa solamente de la distancia h entre la palanca y la superficie de la muestra, se puede encontrar una nueva posición de equilibrio h_0 . Próximo a $h=h_0$, podemos escribir $f(h) \approx f(h_0) + c_3(h-h_0)$, donde c_3 es una constante en h . Encontrar la nueva frecuencia de resonancia ω_1 en función de ω_0 , m y c_3 .

f) Mientras se escanea la superficie moviendo la muestra horizontalmente, la punta de la palanca cargada con $Q = 6e$ se encuentra con un electrón de carga $q=e$, atrapado a alguna distancia por debajo de la superficie. Durante el escaneo la máxima desviación de la

frecuencia de resonancia $\Delta\omega_0 = (\omega_1 - \omega_0)$ se observa que es mucho más pequeña que ω_0 . Calcular la distancia d_0 desde la palanca al electrón atrapado cuando es máxima la desviación, en función de $m, q, Q, \omega_0, \Delta\omega_0$ y la constante K de la ley de Coulomb. Evaluar d_0 en nm para $\Delta\omega_0 = 20 \text{ s}^{-1}$. Los parámetros físicos de la palanca son $m = 1 \cdot 10^{-12} \text{ kg}$ y $k = 1 \text{ N/m}$. No considerar cualquier efecto de polarización tanto en la punta de la palanca como en la superficie.

$$k_e = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} = 9,0 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \text{ y } e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

a).- Encontrar la expresión de la amplitud A y $\text{tag } \phi$

Si $z(t) = A \text{ sen } (\omega t - \phi)$

$$\frac{dz}{dt} = A\omega \cos(\omega t - \phi) \quad ; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -A\omega^2 \text{ sen } (\omega t - \phi)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} -m\omega^2 \text{ sen } (\omega t - \phi) + b\omega \cos(\omega t - \phi) + k \text{ sen } (\omega t - \phi) &= \frac{F_0}{A} \text{ sen } (\omega t) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow -m\omega^2 (\text{sen } \omega t \cdot \cos \phi - \cos \omega t \cdot \text{sen } \phi) + b\omega (\cos \omega t \cdot \cos \phi + \text{sen } \omega t \cdot \text{sen } \phi) + \\ + k (\text{sen } \omega t \cdot \cos \phi - \cos \omega t \cdot \text{sen } \phi) &= \frac{F_0}{A} \text{ sen } \omega t \end{aligned}$$

Sacando factor común a $\text{sen } \omega t$ y a $\cos \omega t$

$$\text{sen } \omega t \left(-m\omega^2 \cos \phi + b\omega \text{ sen } \phi + k \cos \phi - \frac{F_0}{A} \right) + \cos \omega t (m\omega^2 \text{ sen } \phi + b\omega \cos \phi - k \text{ sen } \phi) = 0$$

Si esta ecuación es nula, entonces cada paréntesis debe anularse

$$(m\omega^2 \sin \varphi + b \omega \cos \varphi - k \sin \varphi) = 0 \Rightarrow m\omega^2 \sin \varphi + b \omega \cos \varphi - m\omega_0^2 \sin \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tag \varphi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (1)$$

$$-m\omega^2 \cos \varphi + b\omega \sin \varphi + m\omega_0^2 \cos \varphi = \frac{F_0}{A} \Rightarrow A = \frac{\frac{F_0}{\cos \varphi}}{m(\omega_0^2 - \omega^2) + b\omega \tag \varphi}$$

En la última expresión sustituimos la ecuación (1)

$$A = \frac{\frac{F_0}{\cos \varphi}}{m(\omega_0^2 - \omega^2) + b\omega \tag \varphi} = \frac{\frac{F_0}{\cos \varphi}}{m(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{b^2 \omega^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}} \quad (2)$$

De la expresión (1) deducimos que

$$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi} = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1 = \frac{b^2 \omega^2}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - b^2 \omega^2}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3)$$

Llevando la expresión (3) a la ecuación (2)

$$A = \frac{\frac{F_0}{\cos \varphi}}{m(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{b^2 \omega^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}} = \frac{\frac{F_0}{\cos \varphi} * m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2) + b^2 \omega^2} =$$

$$\frac{F_0 * m(\omega_0^2 - \omega^2) * \frac{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - b^2 \omega^2}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2) + b^2 \omega^2} \Rightarrow A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2 \omega^2}} \quad (4)$$

Para la frecuencia de resonancia

$$A = \frac{F_0}{b\omega_0} \quad ; \quad \tag \varphi = \infty \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

b).-Encontrar la condición $\omega > 0$ para una señal de salida no desvanecida. ¿Cuál es la expresión para la señal de corriente continua de salida no desvanecida a esa frecuencia?

Señal de entrada $V_{i_0} = V_{i_0} \sin(\omega_i t - \varphi_i)$; Señal de referencia $V_R = V_{RO} \sin \omega t$

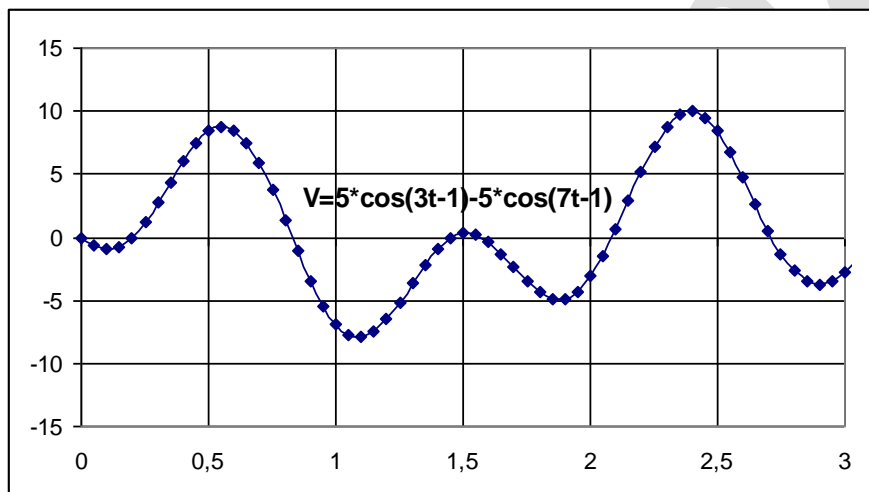
Hacemos el producto de las dos señales, teniendo en cuenta que

$$\text{sen}\alpha * \text{sen}\beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

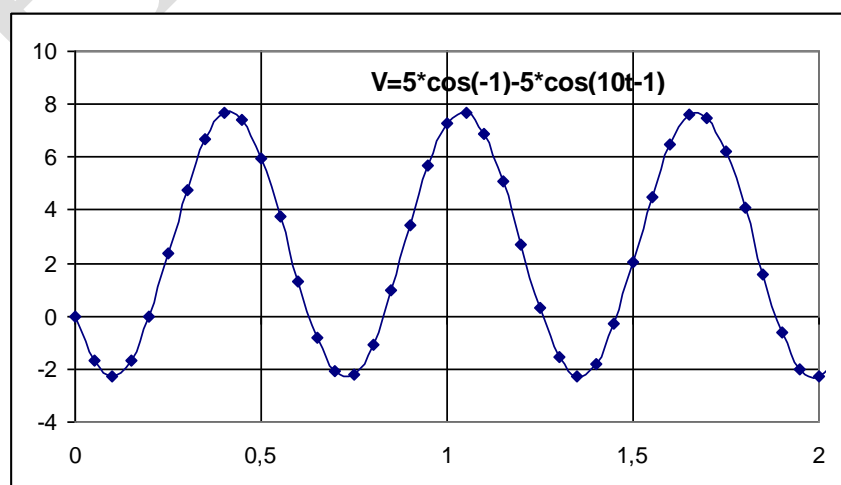
Hacemos el producto de las dos señales $V_i * V_R$

$$\begin{aligned} V_{i_o} \text{sen}(\omega_i t - \varphi_i) * V_{R_o} \text{sen}(\omega t) &= \frac{1}{2} V_{i_o} V_{R_o} [\cos(\omega_i t - \varphi_i - \omega t) - \cos(\omega_i t - \varphi_i + \omega t)] = \\ &= \frac{1}{2} V_{i_o} V_{R_o} [\cos(t(\omega_i - \omega) - \varphi_i) - \cos(t(\omega_i + \omega) - \varphi_i)] \quad (5) \end{aligned}$$

Supongamos que $\frac{1}{2} V_{i_o} V_{R_o} = 5$, $\omega_i = 5$ y $\omega = 2$, la ecuación (5), queda de la forma $5 * \langle \cos[t(5 - 2) - 1] - \cos[t(5 + 2) - 1] \rangle = 5 * \cos(3t - 1) - 5 * \cos(7t - 1)$. La representación gráfica de la ecuación es:



Supongamos que $\frac{1}{2} V_{i_o} V_{R_o} = 5$, $\omega_i = 5$ y $\omega = 5$, la ecuación (1), queda de la forma $5 * \langle \cos[-1] - \cos[10t - 1] \rangle$. La representación gráfica de la ecuación es:

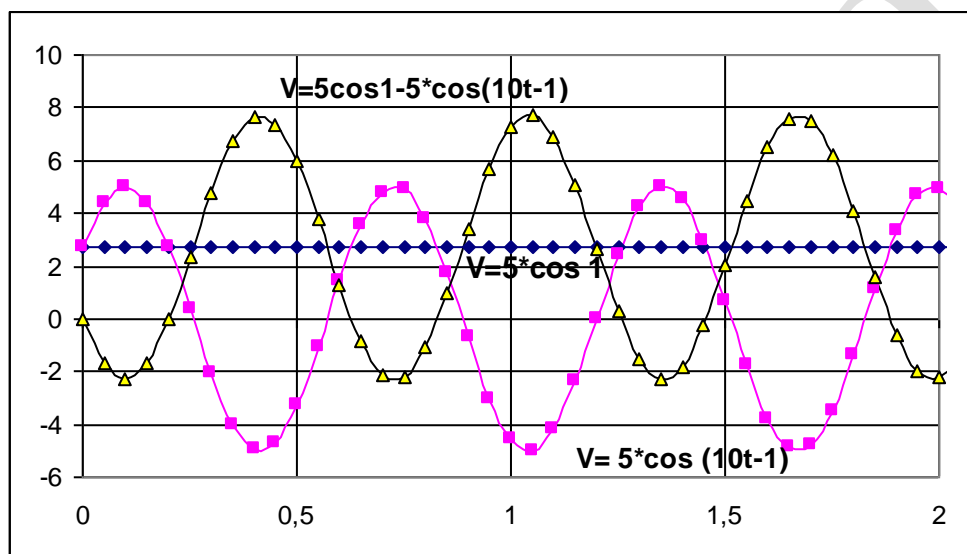


La forma de esta onda es como una onda armónica y solamente aparece cuando $\omega_i = \omega$

$$\frac{1}{2} V_{io} V_{RO} [\cos(t(\omega_i - \omega) - \varphi_i) - \cos(t(\omega_i + \omega) - \varphi_i)] \quad \text{si} \quad \omega_i = \omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} V_{io} V_{RO} \cos \varphi_i - \frac{1}{2} V_{io} V_{RO} \cos(2\omega_i t - \varphi_i) \quad (6)$$

Si en la ecuación (6) seguimos manteniendo que, $\frac{1}{2} V_{io} V_{RO} = 5$ y representamos en un mismo gráfico el primer sumando y, el segundo y la diferencia de ambos obtenemos



La componente de corriente continua es $5 \cos 1$, y de forma general

$$\frac{1}{2} V_{io} V_{RO} \cos \varphi_i \quad (7)$$

En la expresión (7), φ_i representa la diferencia de fase entre las dos señales

c).- Encontrar la expresión de la señal continua de salida a $\omega = \omega_0$

La señal de entrada al amplificador de enganche es

$$V_i = c_2 z = c_2 A \sin(\omega t - \varphi)$$

Como $F = c_1 V_{RO} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ y está aplicada a la palanca el fotodetector tiene la misma frecuencia y por consiguiente la señal de entrada al amplificador de enganche y la señal de referencia tienen la misma frecuencia. Por otra parte si $F = F_0 \sin \omega t$, entonces $z = A \sin(\omega t - \varphi)$ siendo $\varphi = \frac{\pi}{2}$, como ahora, $F = c_1 V_{RO} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$, $\varphi = 0$ la expresión (7) es:

$$\frac{1}{2} V_{io} V_{RO} \cos 0 = \frac{1}{2} V_{io} V_{RO}$$

A la frecuencia de resonancia

$$A = \frac{F_o}{b\omega_o} = \frac{c_1 V_{RO}}{b\omega_o} \Rightarrow V_{io} = c_2 A = \frac{c_1 c_2 V_{RO}}{b\omega_o}$$

La señal de continua es:

$$\frac{1}{2} \frac{c_1 c_2 V_{RO}^2}{b\omega_o}$$

d).- Encontrar el cambio de masa Δm correspondiente a un cambio de fase $\Delta\phi = \frac{\pi}{1800}$.

En todo lo que sigue se supone que Δm y $\Delta\omega_o$ son valores muy pequeños que al multiplicarlos entre sí o al elevarlos al cuadrado esas cantidades se consideran despreciables. La constante k' para la nueva frecuencia es:

$$k' = (m + \Delta m) * (\omega_o + \Delta\omega_o)^2 = m\omega_o^2 + m\Delta\omega_o^2 + 2m\omega_o\Delta\omega_o + \Delta m\omega_o^2 + \Delta m\Delta\omega_o^2 + 2\Delta\Delta m\omega_o\Delta\omega_o \Rightarrow k' = m\omega_o^2 + 2m\omega_o\Delta\omega_o + \Delta m\omega_o^2 \Rightarrow k' - k = 2m\omega_o\Delta\omega_o + \Delta m\omega_o^2$$

Y su diferencia con la constante anterior, $k' - k$, es muy pequeña

$$k' - k \approx 0 = 2m\omega_o\Delta\omega_o + \Delta m\omega_o^2 \Rightarrow \Delta\omega_o = -\frac{\Delta m \omega_o}{2m} \quad (8)$$

En el apartado a) hemos visto que $\text{tag}\phi = \frac{b\omega}{m(\omega_o^2 - \omega^2)}$ y a la frecuencia de resonancia

$\omega = \omega_o \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$, si ahora cambia la masa de la palanca y sustituimos ω por ω_o y la masa por $m + \Delta m$, el ángulo $\pi/2$ se desplazara un valor $\Delta\phi$

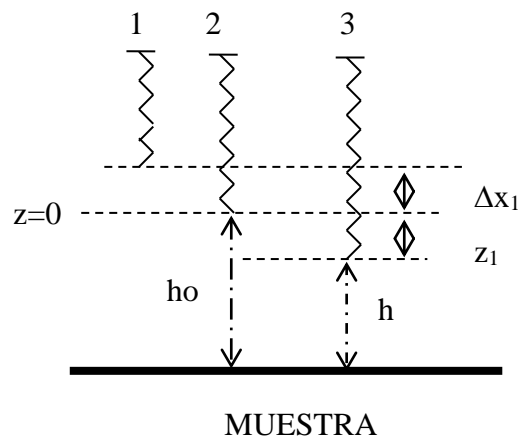
$$\begin{aligned} \text{tag}\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\phi\right) &= \frac{b\omega_o}{(m + \Delta m) * [(\omega_o + \Delta\omega_o)^2 - \omega_o^2]} = \frac{b\omega_o}{(m + \Delta m) * (\Delta\omega_o^2 + 2\omega_o\Delta\omega_o)} \approx \\ &\approx \frac{b\omega_o}{m2\omega_o\Delta\omega_o} = \frac{b}{2m \Delta\omega_o} \Rightarrow -\frac{1}{\text{tag}\Delta\phi} \approx -\frac{1}{\Delta\phi} = \frac{b}{2m \Delta\omega_o} \quad (9) \end{aligned}$$

Llevando la ecuación (8) a la (9), obtenemos el valor de Δm

$$-\frac{1}{\Delta\phi} = \frac{b}{2m * \left(-\frac{\Delta m \omega_o}{2m}\right)} \Rightarrow \Delta m = \frac{b\Delta\phi}{\omega_o} = \frac{1,0 \cdot 10^3 * 1,0 \cdot 10^{-12} * \frac{\pi}{1800}}{\sqrt{\frac{1,0}{1,0 \cdot 10^{-12}}}} = 1,7 \cdot 10^{-18} \text{ kg}$$

e).- Encontrar la nueva frecuencia de resonancia ω_I en función de ω_o , m y c_3 .

Cuando sobre el muelle no actúa la fuerza exterior, éste se encuentra en equilibrio debido al peso de la palanca y a la fuerza elástica del muelle, en la figura la posición (1)



$$mg = k\Delta x$$

siendo m la masa de la palanca y Δx el alargamiento del muelle respecto de su longitud natural, esto es, sin el peso de la palanca. Cuando el muelle se desplaza de esa posición de equilibrio y actúa la fuerza exterior a ese desplazamiento lo llamamos z y esta regido por la ecuación diferencial

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + kz = F$$

En la posición 2 existe un nuevo equilibrio debido al peso de la palanca a la fuerza elástica del muelle y a la nueva fuerza que vale $f(h_0)$.

$$mg = k(\Delta x + \Delta x_1) - f(h_0)$$

y de las dos ecuaciones se deduce $k\Delta x_1 = f(h_0)$

Si ahora la palanca se desplaza una distancia z_1 de la nueva posición de equilibrio, la ecuación diferencial es

$$m \frac{d^2 z_1}{dt^2} + b \frac{dz_1}{dt} + k(z_1 + \Delta x_1) = F + f(h) = F + f(h_0) + cz_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \frac{d^2 z_1}{dt^2} + b \frac{dz_1}{dt} + kz_1 - cz_1 = F$$

$$m\omega_1^2 = k - c_3 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c_3}{m}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c_3}{m}}$$

f).- Calcular la distancia d_0

La máxima desviación ocurrirá cuando la punta de la palanca esté a la distancia más próxima al electrón y esto ocurrirá cuando esté justamente encima del mismo

$$f(h) = k_e \frac{Qq}{h^2}$$

La constante c_3 depende de h , por tanto.

$$c_3 = \frac{df}{dh} = -\frac{2k_e Qq}{h^3} \quad (10)$$

Siendo $h=d_0$

La desviación de la frecuencia es:

$$\begin{aligned} \Delta\omega_0 &= \omega_1 - \omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c_3}{m}} - \omega_0 \Rightarrow \Delta\omega_0 + \omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c_3}{m}} \Rightarrow \\ \Rightarrow (\Delta\omega_0)^2 + \omega_0^2 + 2\omega_0 \Delta\omega_0 &= \omega_0^2 - \frac{c_3}{m} \end{aligned}$$

Como $\Delta\omega_0$ es muy pequeño frente a ω_0 , resulta que:

$$\Delta\omega_0 = -\frac{c_3}{2m\omega_0} \quad (11)$$

Combinado las ecuaciones (10) y (11)

$$\frac{k_e Qq}{d_0^3} = m\omega_0 \Delta\omega_0 \Rightarrow d_0 = \sqrt[3]{\frac{k_e Qq}{m\omega_0 \Delta\omega_0}}$$

Si se aplican los datos numéricos en la última ecuación

$Q = 6q = 6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $k_e = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$, $m = 1 \cdot 10^{-12} \text{ kg}$ y $k = 1 \text{ N/m}$, $\Delta\omega_0 = 20 \text{ s}^{-1}$,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{10^{-6}} = 10^6 \text{ s}^{-1}$$

$$d_0 = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{1,0 \cdot 10^{-12} \cdot 10^6 \cdot 20}} = 4,1 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 41 \text{ nm}$$