

**PROBLEMAS DE**

**LAS OLIMPIADAS**

**INTERNACIONALES**

**DE FÍSICA**

**José Luis Hernández Pérez**

**Agustín Lozano Pradillo**

Madrid 2008

## XXXVI OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. ESPAÑA 2005

## I.-UN SATÉLITE DESAFORTUNADO

*La mayoría de las maniobras orbitales en una nave espacial consisten en cambios de velocidad a lo largo de la dirección de vuelo, con la finalidad de alcanzar órbitas mayores o de frenado cuando se produce reentradas en la atmósfera. En este problema se estudia las variaciones orbitales cuando el empuje del motor se aplica en dirección radial.*

*Para obtener valores numéricos se utilizará: Radio de la Tierra,  $R_T = 6,37 \cdot 10^6$  m, gravedad en la superficie terrestre  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>, día sideral  $T_0 = 24,0$  horas.*

*Consideramos un satélite geosincronizado (su periodo de revolución es  $T_0 = 24$  h) de masa  $m$ , colocado en una órbita ecuatorial de radio  $r_0$ . Este satélite dispone de un “motor apogeo” el cual proporciona un empuje tangencial necesario para alcanzar la órbita final.*

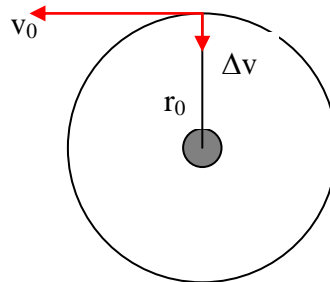
## Cuestión 1

1.1.- Calcular el valor numérico de  $r_0$ .

1.2.- Encontrar la expresión analítica de la velocidad  $v_0$  del satélite en función de  $g$ ,  $R_T$  y  $r_0$  y calcular su valor numérico.

1.3.- Obtener la expresión de su momento angular  $L_0$  y de la energía mecánica  $E_0$  en función de  $v_0$ ,  $m$ ,  $g$  y  $R_T$ .

*Una vez que se ha alcanzado la órbita circular sincronizada (ver figura F-1), el satélite ha sido estabilizado en el lugar deseado, y esta siendo preparado para realizar su misión, pero un error de los controladores de tierra origina que el motor apogeo se encienda de nuevo.*



F-1

*El empuje se dirige hacia el centro de la Tierra y origina una indeseada variación de velocidad  $\Delta v$  en el satélite, el cual se caracteriza por el*

cociente  $\beta = \Delta v / v_0$ . La duración del encendido del motor es despreciable con cualquier otro tiempo orbital por lo que se considera instantáneo.

Suponga que  $\beta < 1$

### Cuestión 2

2.1.- Determinar los parámetros de la nueva órbita (utilice la ayuda al final del problema), semi-latus-rectum  $l$ , y excentricidad  $\varepsilon$ , en función de  $r_0$  y  $\beta$ .

2.2.- Calcular el ángulo  $\alpha$  entre el eje mayor de la nueva órbita y el vector de posición en el punto del empuje accidental.

2.3.- Encontrar la expresión analítica del perigeo  $r_{\min}$  y apogeo  $r_{\max}$  respecto del centro de la Tierra, en función de  $r_0$  y  $\beta$  y calcular sus valores numéricos cuando  $\beta = 1/4$ .

2.4.- Determinar el periodo de la nueva órbita,  $T$ , en función de  $T_0$  y  $\beta$  y calcular su valor numérico para  $\beta = 1/4$ .

### Cuestión 3

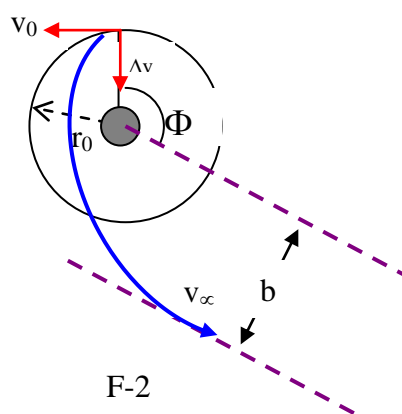
3.1.- Calcular el valor mínimo de  $\beta_{\text{esc}}$  necesario para que el satélite abandone el campo gravitatorio terrestre.

3.2.- Calcular en este caso la mínima distancia del satélite al centro de la Tierra en la nueva trayectoria de escape,  $r_{a \min}$  en función de  $r_0$

### Cuestión 4 (suponer que $\beta > \beta_{\text{esc}}$ )

4.1.- Determinar la velocidad residual en el infinito  $v_\infty$  en función de  $v_0$  y  $\beta$ .

4.2.- Obtener el parámetro de impacto  $b$ , en la dirección asintótica de escape en función de  $r_0$  y  $\beta$ . (ver figura F-2)

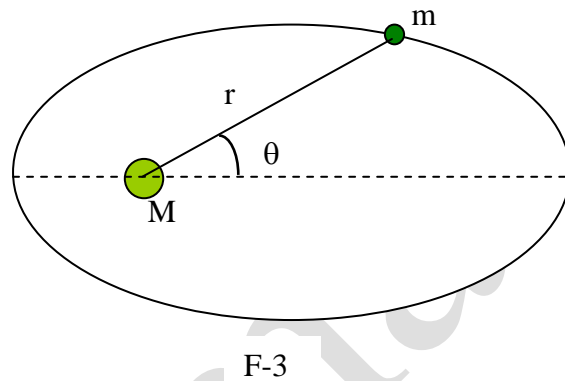


F-2

4.3.- Determinar el ángulo  $\phi$  de la dirección de escape asintótico en función de  $\beta$ . Calcular su valor numérico para  $\beta = 3/2 \beta_{esc}$ .

#### Ayuda

Bajo la acción de fuerzas centrales que obedecen a la ley del inverso del cuadrado, las trayectorias son elipses, parábolas o hipérbolas, con la aproximación de  $m \ll M$ , siendo  $M$  la masa gravitatoria de uno de los focos. Si se toma como origen este foco, la ecuación polar de estas curvas se puede escribir como (ver figura F-3)



$$r(\theta) = \frac{l}{1 - \varepsilon \cos\theta}$$

En la que  $l$  es una constante positiva que recibe el nombre de semi-latus-rectum y  $\varepsilon$  es la excentricidad de la curva. En función de constantes del movimiento

$$l = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \text{y} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}}$$

Donde  $G$  es la constante de la gravitación de Newton,  $L$  es el módulo del momento angular de la masa que orbita, con respecto al origen y  $E$  su energía mecánica, siendo la energía potencia nula en el infinito. Se presentan los siguientes casos

- i) Si  $0 \leq \varepsilon < 1$  la curva es una elipse (circunferencia cuando  $\varepsilon = 0$ )
- ii) Si  $\varepsilon = 1$ , la curva es una parábola
- iii) Si  $\varepsilon > 1$  la curva es una hipérbola

## II.-MEDIDA DE MAGNITUDES ELÉCTRICAS

2.-Las transformaciones científicas y tecnológicas ocurridas durante el siglo XIX produjeron la convincente necesidad de tener magnitudes eléctricas patrones aceptadas universalmente. La opinión es que las nuevas unidades absolutas deberían solamente depender de los patrones de longitud, masa y tiempo establecidos después de la Revolución Francesa. Un intenso trabajo experimental, para ajustar los valores de estas unidades, fue realizado entre los años 1861 y 1912. Aquí se proponen tres estudios.

### Determinación del ohmio (Kelvin)

Una bobina circular de  $N$  vueltas, radio  $a$  y resistencia  $R$  gira con velocidad angular constante  $\omega$  respecto de un diámetro en el seno de un campo magnético  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{i}$ .

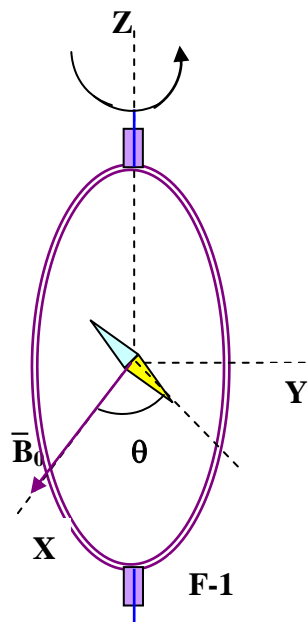
1.- Calcular la fuerza electromotriz  $\varepsilon$  inducida en la bobina y la potencia media  $\langle P \rangle^*$  necesaria para mantener la bobina en movimiento. Despreciar la autoinducción en la propia bobina.

\*El valor medio  $\langle X \rangle$  de una cantidad  $X(t)$  en un proceso periódico  $T$ ,

$$\text{es: } \langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$$

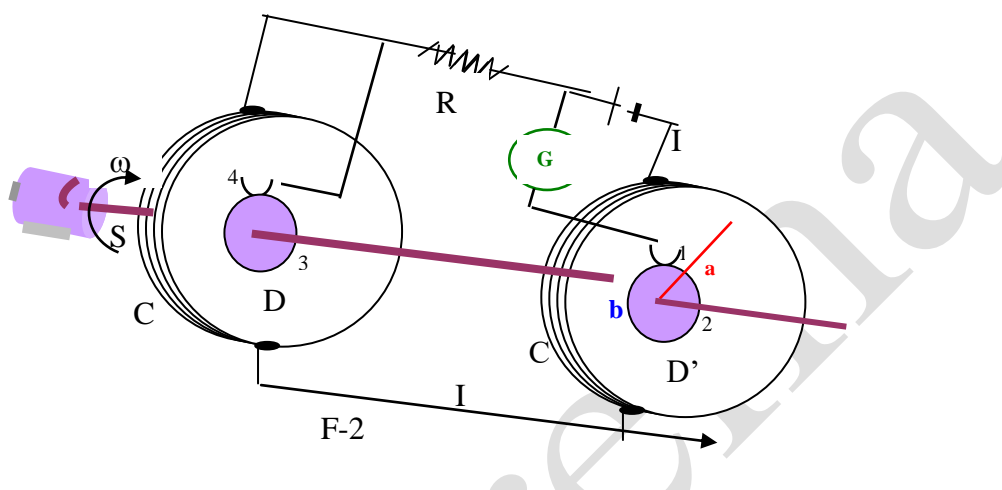
Una brújula pequeña se coloca en el centro de la bobina, tal como se muestra en la figura F-1 y puede rotar libremente alrededor del eje  $Z$  en un plano horizontal, pero no puede seguir la rápida rotación de la bobina.

2.-Una vez que se alcanza el régimen estacionario la brújula se coloca en una dirección que forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $X$ . Calcular la resistencia  $R$  de la bobina en función de este ángulo y los otros parámetros del sistema.



Lord Kelvin utilizó este método en 1860 para obtener el patrón absoluto del ohmio. Con la finalidad de evitar la rotación de la bobina Lorenz ideó un método diferente utilizado por Rayleigh y Ms Sidgwick, el cual analizamos en los próximos párrafos.

#### Determinación del ohmio (Rayleigh, Sidgwick)



El dispositivo experimental se indica en la figura F-2. Consiste en dos discos metálicos idénticos  $D$  y  $D'$  del mismo radio  $b$ , montados sobre un eje  $SS'$ .

Un motor hace girar al conjunto con velocidad angular  $\omega$ , la cual puede cambiarse para medir  $R$ . Dos bobinas idénticas  $C$  y  $C'$  (de radio  $a$  y  $N$  vueltas cada una) rodean a los discos. Ellos están conectados de tal manera que la corriente  $I$  fluye a través de ellos en direcciones opuestas. El dispositivo en su conjunto sirve para medir la resistencia  $R$ .

3.- Suponer que la corriente  $I$  fluye a través de las bobinas  $C$  y  $C'$  creando un campo magnético uniforme alrededor de  $D$  y  $D'$  y cuyo valor es igual al creado en el centro de la bobina. Calcular la fuerza electromotriz  $\varepsilon$  inducida entre los anillos 1 y 4, se supone que la distancia entre las bobinas es mucho mayor que su radio, esto es,  $a \gg b$ .

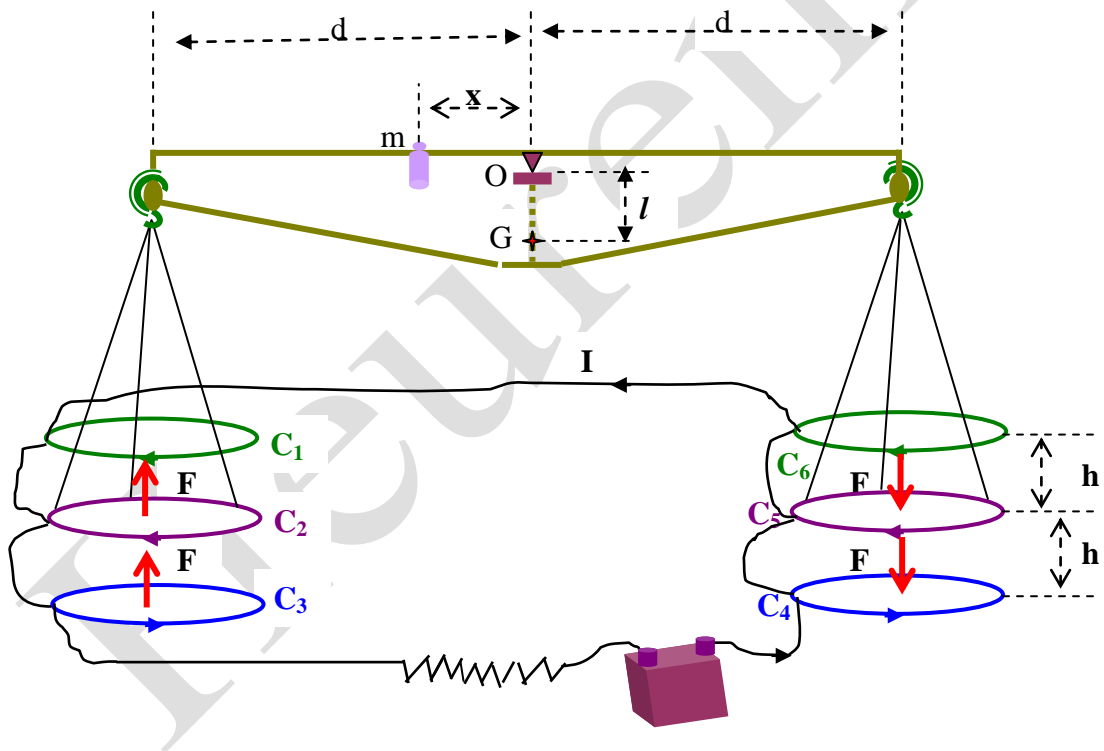
Los discos se conectan al circuito mediante unas escobillas y el galvanómetro  $G$  detecta la corriente a través del circuito 1-2-3-4.

4.- La resistencia  $R$  se mide cuando  $G$  marca cero. Encontrar  $R$  en función de los parámetros del circuito.

### Determinación del amperio

Cuando pasa la corriente a través de dos conductores y se mide la fuerza entre ellos es posible determinar la intensidad de la corriente. La “balanza de corrientes” diseñada por Lord Kelvin en 1882 se basa en este método. Consiste en seis idénticas bobinas  $C_1, C_2, \dots, C_6$ , de radio  $a$  conectadas en serie. Como indica la figura F-3, las bobinas fijas  $C_1, C_3, C_4$  y  $C_6$  están en dos planos horizontales separadas por una pequeña distancia  $2h$ . Las bobinas  $C_2$  y  $C_5$  están unidas a los brazos de una balanza y se mantienen en equilibrio equidistante de ambos planos.

La corriente  $I$  fluye por las bobinas de modo que la fuerza magnética sobre  $C_2$  es hacia arriba y sobre  $C_5$  hacia abajo. Una masa  $m$  situada a una distancia  $x$  del punto de suspensión del brazo se requiere colocar para restaurar la posición de equilibrio cuando pasa la corriente por las bobinas.



5.- Calcular la fuerza  $F$  sobre  $C_2$  debido a la interacción magnética con  $C_1$ . Para simplificar se supone que la fuerza por unidad de longitud es la que aparece cuando dos hilos rectos y de gran longitud llevan corrientes paralelas.

6.- La corriente  $I$  se mide cuando la balanza se encuentra en equilibrio. Encontrar el valor de  $I$  en función de los parámetros físicos del sistema. Las dimensiones del aparato son lo suficientemente grandes para despreciar las interacciones entre las bobinas de la izquierda y de la derecha.

Sea  $M$  la masa de la balanza (excepto  $m$  y las partes que cuelgan),  $G$  es el centro de masas y  $l$  la distancia

7.-El equilibrio de la balanza es estable frente a desviaciones pequeñas  $\delta z$  en la altura de  $C_2$  y  $-\delta z$  en  $C_5$ . Calcular el máximo valor  $\delta z_{max}$  para el que la balanza aún puede volver a la posición de equilibrio cuando se deja en libertad, (considerar que los centros permanecen alineados).

Puede utilizar las siguientes integrales

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos x \, dx = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x \, dx = 0; \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \pi$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

Utilice las aproximaciones

$$\frac{1}{1 \pm \beta} \approx 1 \mp \beta + \beta^2 \text{ ó } \frac{1}{1 \pm \beta^2} \approx 1 \mp \beta^2 \text{ para } \beta \ll 1, \text{ y } \sin \theta \approx \text{tag } \theta \text{ para } \theta \text{ pequeño}$$



### III. NEUTRONES EN UN CAMPO GRAVITACIONAL

2.-En el mundo familiar clásico, el rebote elástico de una bola en la superficie de la Tierra es un ejemplo ideal de movimiento perpetuo. La bola se encuentra atrapada: no puede ir por debajo de la superficie o por encima del punto de retorno, permanece en este estado cayendo y subiendo una y otra vez. Solamente la resistencia del aire o choques inelásticos pueden detener el proceso y esto será ignorado en lo que sigue.

Un grupo de físicos del Instituto Laue-Langevin in Grenoble (V.V. Nesvizhevsky y colaboradores “ Quantum states of neutrons in the Earth’ gravitational field” Nature 415 ( 2002) 297 . Phys.Rev. D 67,102002(2003)) demostraron experimentalmente el comportamiento de los neutrones en el campo gravitatorio terrestre. En el experimento, a los neutrones que se desplazan por la izquierda se les permite caer hacia un cristal que actúa como espejo de neutrones , donde rebotaban elásticamente hasta la altura inicial una y otra vez.

El dispositivo experimental está esquematizado en la figura F-1. Consiste en una rendija  $W$ , el espejo de neutrones  $M$  (a la altura  $z = 0$ ), el absorbedor de neutrones  $A$  (a la altura  $z=H$  y con una longitud  $L$ ) y el detector de neutrones  $D$ .

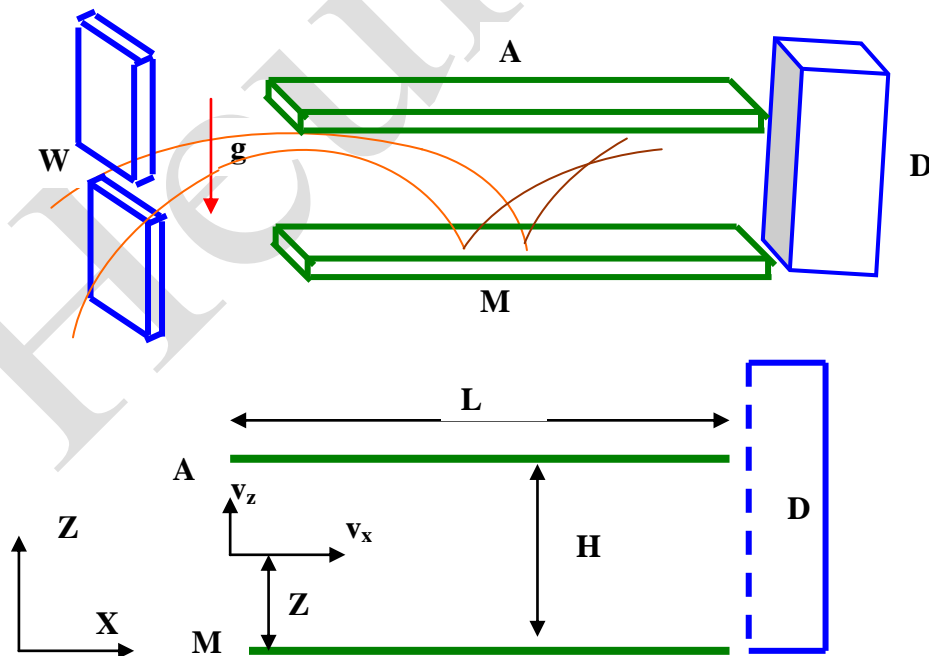


Fig. F-

El haz de neutrones vuela con velocidad horizontal constante  $v_x$  desde  $W$  hasta  $D$ , a través de la cavidad situada entre  $A$  y  $M$ . Todos los neutrones que alcanzan la superficie  $A$  son absorbidos y desaparecen del experimento. Los que alcanzan la superficie  $M$  se reflejan elásticamente. El detector  $D$  cuenta la tasa  $N(H)$ , el número de neutrones que alcanzan  $D$  por unidad de tiempo. Los neutrones penetran en la cavidad con un amplio rango de velocidades verticales positivas y negativas,  $v_z$ . Una vez dentro de la cavidad se desplazan entre el espejo inferior y el absorbedor superior.

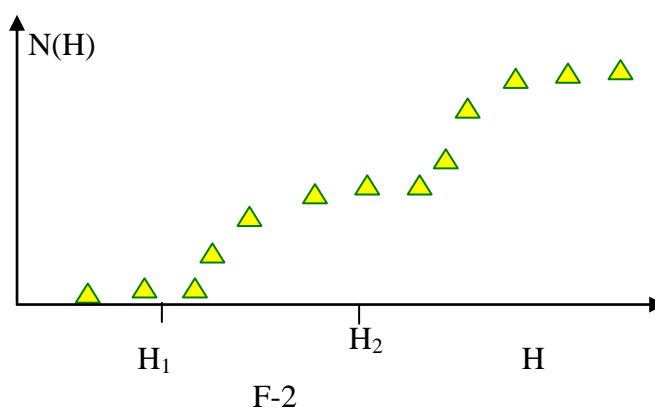
1.- Determinar clásicamente el rango de velocidades verticales ( $v_z$ ) de los neutrones, que penetran a una altura  $z$ , y pueden alcanzar el detector  $D$ . Admitir que la longitud  $L$  es mucho mayor que cualquier otra longitud del problema.

2.- Calcular clásicamente la longitud mínima  $L_c$  de la cavidad para asegurar que todos los neutrones fuera del rango de las velocidades anteriores, a pesar de los valores de  $z$ , son absorbidos por  $A$ . Utilice  $v_x = 10$  m/s y  $H = 50$   $\mu\text{m}$ .

La tasa de llegada  $N(H)$  la mide  $D$  y se espera que crezca linealmente con  $H$ .

3.- Calcular clásicamente la tasa  $N_c(H)$  suponiendo que todos los neutrones llegan a la cavidad con velocidad vertical  $v_z$  a una altura  $z$ , siendo los valores de  $v_z$  y  $z$  igualmente probables. Dar la respuesta en términos de  $\rho$ , número constante de neutrones por unidad de tiempo, por unidad de velocidad vertical y por unidad de altura que entran en la cavidad con velocidad vertical  $v_z$  y altura  $z$ .

El experimento de Grenoble está en desacuerdo con las predicciones clásica, ya que el valor de  $N(H)$  incrementa de forma clara cuando  $H$  adquiere algunas alturas críticas  $H_1, H_2, \dots$  (fig.F-2)



*En otras palabras el experimento muestra que el movimiento vertical de los neutrones rebotando en el espejo esta cuantizado. Según el lenguaje que Bohr y Sommerfeld utilizaron para obtener los niveles de energía en el átomo de hidrógeno, se puede escribirse” La acción  $S$  de estos neutrones a lo largo de la dirección vertical es un múltiplo entero de la constante de Planck”,  $S$  está dado por:*

$$S = \int p_z(z) dz = nh \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

*donde  $p(z)$  es la componente vertical del momento clásico y la integral se extiende a un rebote completo. Solamente los neutrones con estos valores de  $S$  están permitidos en la cavidad.*

**4.- Calcule las alturas de vuelta  $H_n$  y los niveles de energía. En (asociados al movimiento vertical) utilizando la condición cuántica Bohr-Sommerfeld. Dé el resultado numérico para  $H_1$  en  $\mu\text{m}$  y para  $E_1$  en eV.**